UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Construcción e Ingeniería
de Fabricación

CURSO DE

GEOMETRIA METRICA

POR

PEDRO PUIG ADAM

De la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Ingeniero Industrial Doctor en Ciencias Exactas.
Profesor titular de la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid
y Catedrático del Instituto San Isidro.

TOMO I

FUNDAMENTOS

DECIMOSEXTA EDICION

MADRID 1.986

Arturo Soria, 155. 28043 MADRID.
Tf.: 4.13.33.18
ISBN: 84-85731-05-0
Depósito Legal: M. 41217 - 1.986
Impreso en Talleres Gráficos Peñalara.
Ctra. de Villaviciosa de Odón a Pinto Km. 15,180. FUENLABRADA.

CURSO DE GEOMETRIA METRICA

TOMO I

PROLOGO (1.ª edición)

No sé si este libro merece prólogo. Acaso sólo lo merezca la intención con que se ha escrito. Nació de una afectuosa indicación que quise obedecer y de una disconformidad que me acuciaba. Creció entre el afán de lo por lograr y el descontento por lo no logrado.

Se me pidió un libro adecuado para la preparación a ingreso en nuestra Escuela. Creo que toda preparación termina en deformación cuando las pruebas que se exige superar se realizan en masa y contra reloj, y, por reacción, di en querer hacer, ante todo, un libro formativo. Perdóneseme, pues, la rebeldía y la vanidad de mi intento.

Las crecientes multitudes que acuden a las puertas de las Escuelas especiales de Ingeniería originaron, hace tiempo, una conocida técnica de exámenes. Imperativos de rapidez y objetividad motivaron el cómodo recurso de los problemas, y, seleccionando soluciones, se creyó solucionar la selección.

Pero, a una técnica examinadora, se adapta pronto una técnica preparadora. Para el preparador y el preparado se trata, ante todo, de asegurar el éxito o de aumentar su probabilidad. Vengan, pues, millares de problemas y ejercicios; regístrense y archívense codiciosamente las soluciones, cuantas más mejor, aunque la teoría quede reducida a segundo plano, aunque los conceptos fundamentales terminen deslavazados y desvaídos en la mente del escolar. Lo que importa es ingresar. Y la pretendida formación científica del futuro técnico resulta, en definitiva, convertida en una gimnasia contraproducente y deformadora, por defectuosa alimentación.

Se imponía volver discretamente por los fueros de la teoría, y ello precisamente para dar normas seguras a la práctica; recordar la importancia y significación de los principios; reflejar la estructura interna de la ciencia; perfilar sus conceptos y manejar sus métodos para orientar soluciones.

La ciencia del ingeniero debe ser práctica, pero no empírica. El empirismo termina en rutina, y la rutina en ceguera. El ingenio se cultiva también con la luz de la razón cuando la intuición no ilumina lo bastante, y la Matemática que necesita el técnico debe proporcionarle no sólo los conocimientos pragmáticos, los útiles de su trabajo, sino también el hábito de manejarlos con buen criterio.

La enseñanza del ingeniero debe ser, pues, en todo momento, racional. Pero el principio de economía que debe orientar al técnico, aun en su formación, exige que este racionalismo no engendre por exageración una sistemática desconfianza que le impida, por ejemplo, clavar un clavo sin antes calcular el momento de inercia de la sección del martillo. No se anheló el rigor para matar la intuición, sino para vigorizarla.

¡Quién supiera, pues, escribir un libro capaz de despertar el respeto al rigor sin ahogar la intuición! ¡Quién supiera conjugar en él la honradez científica, el interés formativo y la eficacia práctica! ¡Quién pudiera hacer vibrar los espíritus críticos y sistematizadores de un Hibert, de un Klein, junto a los venerables legados de un Euclides, de un Apolonio, de un Poncelet, de un Chasles...! ¡Quién supiera ser a un tiempo clásico y moderno, breve y completo, claro y conciso!

Tal ha sido la quimera constante del autor en la encrucijada de su triple tendencia pedagógica, científica y técnica, al acometer, temeroso de su impotencia, el empeño de escribir un libro para escolares, bajo el fuego cruzado de los críticos puros y de los críticos prácticos. Se contentaría con haber conseguido una primera aproximación aceptable... Pero la magnitud del error cometido se la dirá el público a cuyo juicio se somete de antemano, a un tiempo contrito y esperanzado.

* * *

Dejando el tema de los propósitos y pasando al del desarrollo, debo empezar confesando un defecto: mi inveterada pereza a seguir la línea de pensamiento ajeno. Perdóneseme, pues, si en muchas ocasiones me aparto de los caminos trillados.

Ya en la elección de axiomas hube de preferir los que establecen las propiedades generales del movimiento a los que postulan las particulares de la congruencia de segmentos y ángulos, con ser éstos los preferidos por los tratadistas. Tales axiomas conducen invariablemente a la «triangulación» de la Geometría, al rígido reticulado euclídeo cuyas mallas triangulares aprisionan las figuras dictando leyes de igualdad y de proporción. Más educativo parece, sobre todo para técnicos, caracterizar desde un principio los movimientos, las transformaciones típicas de la Geometría y ligar a cada figura aquellas transformaciones que ponen de manifiesto sus propiedades.

Este modo de proceder tiene la ventaja de encuadrar desde un principio la Geometría métrica en el marco de clasificación general de las Geometrías establecido por Klein en su famoso programa de Erlangen. Así procedimos con mi querido y venerado maestro D. Julio Rey Pastor en una obrita escrita para niños («Elementos de Geometría»), al introducir, hace veinte años, los métodos intuitivos en la enseñanza de la Matemática elemental española. Faltaba desarrollar el mismo programa en plan racional, y ampliarlo debidamente, lo mismo en sus raíces que en sus frutos, y esto es lo que he intentado hacer en este primer tomo, titulado por esta razón, «Fundamentos». En el segundo («Complementos») se estudiarán la Trigonometría, la Geometría métrico-proyectiva y las cónicas.

Todas las cuestiones fundamentales han sido, pues, objeto preferente de mi atención, y, por el defecto antes confesado, he tenido que cargar frecuentemente con la responsabilidad de llevar la exposición por caminos personales. Entre tales puntos, citaré como los más salientes: el estudio del sentido, lo mismo en el plano que en el espacio (noción de haz abierto, y demostraciones *derivadas); la adición del Axioma III (de rigidez) a los del movimiento; la deducción de las propiedades de los movimientos especiales, y de las primeras relaciones métricas (capítulos II y III); la nueva definición de equivalencia geométrica de polígonos y demostraciones derivadas: la demostración del teorema de Jordan para polígonos simples, y para curvas cerradas cuyo número de puntos de intersección con cualquier recta es finito, etc.*

No ha sido mi propósito escribir un libro de Geometría pura, *sino* métrica, *aun en el sentido etimológico de la palabra, y, por tanto, he introducido en el momento oportuno la noción de medida con objeto de operar cuanto antes con medidas de segmentos, en lugar de instituir un cálculo segmentario autónomo desvinculado de la Aritmética, como se hace en los modernos tratados alemanes. Esto último es más perfecto desde un punto de vista científico puro, pero poco conveniente para el técnico. En esto he preferido, pues, seguir la tradición.*

La división de los capítulos en lecciones quizá parezca infantil. No obedece tanto al deseo de dosificar el trabajo del alumno, lo que éste agradece siempre, como al deseo de acotarme los temas ante el temor de hacer un libro demasiado extenso. Creo sinceramente excesiva toda obra de Geometría métrica, preparatoria de escuela técnica, que rebase lo que normalmente puede desarrollarse en un curso de clase diaria. Aún más que los teoremas y resultados en sí, tiene interés para el alumno la disciplina de pensamiento, la adquisición de métodos y la visión de una arquitectura. En atención a ello, no he pretendido agotar los temas, y he preferido abreviar y aun omitir cuestiones de detalle a dejar cabos sin atar en cuestiones fundamentales.

Especial atención me ha merecido el capítulo sobre metodología de las construcciones geométricas, que creo también de gran interés formativo: Quizá él sirva para reconciliarme con aquel sector de público que busca en los libros reglas de acción con preferencia a motivos de reflexión, y quién sabe si incluso le invite a reflexionar...

El gran recurso que para múltiples problemas proporciona la transformación por inversión me ha decidido a incluirla en este tomo, a continuación de la homotecia, a sabiendas de que no es una transformación del grupo métrico; por otra parte, tampoco encajaba en el segundo tomo, por no ser del grupo proyectivo.

Aun cuando, como antes dije, he huído, en todo lo posible, de transcripciones más o menos disimuladas (cuando me he inspirado en ideas ajenas, lo advierto claramente), es inevitable alguna que otra consulta para acotar temas y contrastar vías demostrativas. He aquí las principales obras consultadas:

HILBERT: *Grundlagen der Geometrie* (séptima edición).
KLEIN: *La Matemática elemental desde un punto de vista superior.*
ENRIQUES: *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*
BERZOLARI: *Enciclopedia delle Matematiche elementari.*
THIEME: *Die Elemente der Geometrie.*
HADAMARD: *Lecons de Géométrie élémentaire.*
E. TORROJA: *Tratado de Geometria de la Posición y sus aplicaciones a la Geometría de la medida.*

ROUCHÉ COMBEROUSSE: *Traité de Géométrie.*
DELTHEIL CAIRE: *Géométrie.*
SCHWAN: *Elementare Geometrie.*
ZACHARIAS: *Elementargeometrie der Ebene und des Raumes.*
HALSTED: *Géométrie Rationelle* (trad. francesa de Barbarin).

* * *

Me reprocharía de ingratitud si al citar fuentes bibliográficas olvidara a quienes fueron y sigo conceptuando mis maestros. Pero también he cavilado si sería atrevida necedad citar unos nombres, por mí tan respetados, al frente de ofrenda tan pobre. Al fin dejé que el sentimiento ahogara la razón y preferí pasar, en todo caso, por necio a tenerme por ingrato.

En lo que se refiere a mi formación en el campo de la Geometría debo gratitud al que fué mi iniciador en la matemática rigurosa, en la disciplina de pensamiento y expresión, D. Antonio Torroja; al, por todos conceptos, tan llorado y recordado D. Miguel Vegas, cuyas enseñanzas y afecto fueron para mí inapreciables; al maestro y amigo entrañable D. Julio Rey Pastor, cuya colaboración he echado tanto de menos en esta ocasión, y, por fin, a mi bueno y parternal amigo D. José Alvarez Ude, a quien he conceptuado siempre maestro virtual mío, y lo ha sido efectivo al revisar con su característica agudeza crítica los originales de este libro. A sus atinadas observaciones se debe que pueda salir corregido de muchos de sus defectos. No sé cómo expresarle mi agradecimiento por su espontánea y para mí tan preciada colaboración.

Madrid, marzo de 1947.

P. PUIG ADAM

INTRODUCCION

Experiencia, intuición y lógica en la génesis de la Ciencia.—Toda Ciencia, aun la más abstracta como la Matemática, tiene en el individuo, como ha tenido en la especie humana, un origen experimental. Las experiencias primeras son simples observaciones de hechos que la vida misma presenta a nuestra consideración. El análisis de estos hechos suscita el deseo de crear artificialmente otros nuevos, para someterlos también a estudio y comparación.

Esta fase experimental, que en algunas Ciencias ha tenido largos siglos de historia, en Matemáticas ha sido más breve. Un proceso subconsciente de inducción despierta pronto en el hombre la facultad de adivinar, de predecir el resultado de nuevas experiencias matemáticas, con sólo *imaginarlas*. Pero esta maravillosa facultad, llamada *intuición* (de *in*=dentro, *tueor*=mirar) que es tan preciosa para el científico puro como para el técnico, no basta muchas veces para predecir ciertos resultados; y, lo que es peor, otras veces nos engaña sorprendentemente.

De aquí que sean necesarios el raciocinio y la lógica, no sólo para dar solidez y estabilidad al edificio científico construído con los materiales cognoscitivos que la experiencia y la intuición han aportado, sistematizándolos y organizándolos deductivamente, sino también para llegar por vía deductiva a predecir los resultados que la intuición, por sí sola, es incapaz de alcanzar.

Numerosísimos son los ejemplos y curiosidades que muestran la insuficiencia o los engaños de la intuición. Por su brevedad y elementalidad nos contentaremos con los dos siguientes:

1.° Supongamos un interlocutor de mediana cultura, que sepa que España tiene más de 20 millones de habitantes, y que nuestro cuero cabelludo tiene bastante menos de 5 cabellos por mm^2; y preguntémosle si es seguro que existen dos españoles con igual número de cabellos.

La imposibilidad de imaginar la experiencia comparativa le hará sin duda declarar al pronto que la pregunta no tiene contestación posible.

Sin embargo, un sencillísimo razonamiento permite llegar donde la intuición no llega, y contestar afirmativamente; pues si todos los españoles tuviesen distinto número de cabellos, habría alguno con más de 20 millones de cabellos, para lo cual necesitaría una superficie de cabeza mayor de 4 metros cuadrados.

2.° Propongamos al mismo interlocutor que imagine una cinta metálica pegada a la superficie de la Tierra, a lo largo del Ecuador, y preguntémosle si al cortarla e intercalar un trozo adicional de un metro se separaría un poco o mucho la cinta de la Tierra. Si responde intuitivamente, estimará, sin duda, que la separación resultaría imperceptible. Engaño de la intuición, pues siendo el radio invariablemente igual al perímetro dividido por la constante 2π, al añadir al perímetro un metro, el radio aumentará en $1:2\pi$ 0,16 m. cualquiera que sea su magnitud.

Edificación racional de la Geometría —La Geometría empezó siendo también un conjunto de reglas y conocimientos empíricos, obtenidos por vía experimental, y usados por los constructores y medidores de terrenos de los antiguos pueblos orientales. El genio griego la organizó deductivamente.

Deducir o *demostrar* una verdad es establecerla como consecuencia de verdades anteriormente establecidas. Retrocediendo en tal cadena deductiva, llegaremos necesariamente a un punto de partida, constituído por algunas verdades imposibles de reducir a otras más simples, y cuya certeza es forzoso admitir, bien sea por su evidencia inmediata, bien sea por la validez del cuerpo de doctrina que de ellas se deduce. Estas proposiciones se llaman *axiomas* o *postulados*, para distinguirlas de las proposiciones demostrables, llamadas *teoremas*. Así aparecen clasificadas las proposiciones de la Geometría desde los famosos «Elementos» de Euclides (s. III a. J. C.).

Del mismo modo que hay proposiciones que han de admitirse sin demostración, existen *conceptos primarios* que no es posible definir, por la imposibilidad de referirlos a otros más sencillos. Tales conceptos se caracterizan o definen indirectamente, estableciendo sus propiedades esenciales mediante los referidos axiomas o postulados (*).

Después de la intensa revisión crítica que sufrió la Matemática toda, a fines del siglo pasado y comienzos del presente, se han abandonado ya los antiguos intentos de definir el punto, la recta, el plano, etc., y la edificación racional de la Geometría se funda modernamente en las siguientes normas:

1.ª Enunciar, sin definición, los conceptos primeros.
2.ª Admitir, sin demostración, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos, enunciando los axiomas correspondientes.
3.ª Deducir lógicamente las restantes propiedades o teoremas.

Axiomática.—Se comprende, por lo expuesto, que la Geometría puede fundarse sobre distintos sistemas de axiomas, según las cadenas deductivas que se establezcan entre sus proposiciones, de tal suerte que una misma proposición puede aparecer como axioma en una determinada sistematización y como teorema en otra.

Desde un punto de vista estrictamente lógico, un sistema será tanto más perfecto cuanto menor sea el número de axiomas que necesite; pero será de todo punto inadmisible si entre ellos, o sus consecuencias, existiera alguna incompatibilidad o contradicción.

He aquí, pues, las dos condiciones que se preceptúan en todo sistema de axiomas:

1.ª *Los axiomas han de ser compatibles*, es decir, ninguno de ellos debe estar en contradicción con los demás o sus consecuencias.

2.ª *Los axiomas deben ser independientes*, es decir, ninguno de ellos o parte de ellos debe poder demostrarse como consecuencia de los demás.

La primera propiedad es esencial para la validez del sistema La segunda

(*) Los mismos «Elementos» de Euclides, de tan notable perfección deductiva, adolecen del defecto de pretender definir los elementos primarios, punto recta, plano, en términos que, a la luz de la crítica actual, apaceren totalmente vacuos.

es una condición de elegancia o perfección que interesa más al matemático puro que al técnico. Mientras aquél tiende a la economía de materiales empíricos en la edificación de su ciencia, en gracia a la pureza de la misma, éste tiende, por el contrario, al mayor uso posible de la intuición, en gracia a la economía de razonamiento.

La rama de la Matemática que se ocupa del estudio de los diversos sistemas de axiomas, así como de su compatibilidad e independencia, es de moderna creación y se llama *Axiomática*. En atención a las consideraciones anteriores, procuraremos conjugar las dos tendencias crítica y pragmática, sin prescindir del rigor axiomático indispensable para legitimar nuestras primeras intuiciones, pero adoptando axiomas lo bastante amplios para poder edificar lo más rápidamente posible los primeros estratos de la Geometría, aun cuando sea sacrificando levemente el prurito científico de independencia absoluta de los axiomas adoptados.

Los cinco grupos fundamentales de axiomas.—Según lo dicho, la Geometría estudia, en definitiva, relaciones que ligan directa o indirectamente los elementos (puntos, rectas, planos) constitutivos de las figuras geométricas.

Hilbert acertó a distinguir en la infinita complejidad de tales relaciones, las cinco categorías primarias independientes que siguen:

1.ª *Relaciones de enlace o incidencia* (Verknüpfung); del tipo: «estar en», «pasar por», «unir», «cortar», ... Ejemplo: «Por dos rectas secantes pasa un plano y sólo uno.

2.ª *Relaciones de ordenación* (Anordnung); del tipo: «estar entre», «separar», «preceder», «seguir», ... Ejemplo: «Una diagonal de un cuadrilátero convexo lo divide (separa) en dos triángulos».

3.ª *Relaciones de igualdad o congruencia*. Ejemplos: Las relaciones de perpendicularidad (igualdad de ángulos adyacentes): los criterios de igualdad de triángulos.

4.ª *Relaciones de paralelismo*. Ejemplo: «Si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas».

5.ª *Relaciones de continuidad*. Ejemplos: Existencia de puntos de intersección de circunferencias. Existencia del límite de los perímetros de polígonos regulares inscritos en una circunferencia, cuyo número de lados crece indefinidamente.

A cada una de estas categorías de relaciones corresponde un conjunto de axiomas que las fundamenta Aun cuando los axiomas, sobre los que fundamentaremos esta exposición de la Geometría métrica, no coincidan con los de Hilbert, respetaremos su clasificación, y los ordenaremos en los cinco grupos siguientes, que iremos introduciendo a medida que los vayamos necesitando:

Axiomas I. *De enlace o incidencia.*
Axiomas II. *De ordenación.*
Axiomas III. *De congruencia o movimiento*
Axioma IV. *De paralelismo.*
Axioma V. *De continuidad.*

Capítulo I.—ENLACE, ORDENACION Y SENTIDO EN EL PLANO

LECCIÓN 1.ª—LAS RELACIONES DE INCIDENCIA

1. Axiomas de existencia y enlace:

Ax. I, 1.—*Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados «puntos», cuyo conjunto llamaremos «espacio»* (*).

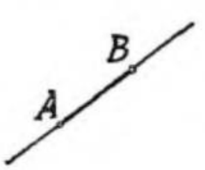
Ax. I, 2.—*Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados «planos» y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados «rectas».*

Al calificar los planos y las rectas como conjuntos *parciales* significamos: *Fuera de cada recta de un plano hay otros puntos del mismo. Fuera de cada plano hay otros puntos del espacio.*

Si un punto pertenece a una recta (plano) se dice que *está en* o *sobre* ella (él), o que la recta (plano) *pasa por* el punto, o que ambos son *incidentes*. Lo mismo se dice de una recta perteneciente a un plano.

Designaremos los puntos por letras mayúsculas: A, B, C, ..., las rectas por minúsculas: a, b, c, ... y los planos por letras griegas: α, β, γ, ...

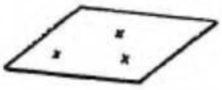
Los puntos, rectas y planos se enlazan por ciertas relaciones de posición, cuyas propiedades fundamentales, que la intuición nos dicta, están contenidas en los siguientes axiomas:



Ax. I, 3.—*Por dos puntos distintos pasa una recta y sólo una.*

Este hecho se expresa también diciendo: *Dos puntos A y B determinan una recta que los contiene.* La llamaremos «*recta AB*».

Los puntos de una misma recta se dice que están *alineados*.



Ax. I, 4.—*Por tres puntos no alineados pasa un plano y sólo uno.*

De otro modo: *Tres puntos no alineados «determinan» un plano que los contiene.*

(*) Esta «denominación» no implica una «definición» de espacio como simple conjunto de infinitos puntos. Sólo cuando éstos cumplen ciertas relaciones llámase a su conjunto «espacio». Ya hemos dicho que son *todos* los axiomas admitidos los que, en definitiva, «definen» los conceptos en ellos enunciados. Huelga, pues, hacer idéntica observación con los conceptos «recta», «plano».

Ax. I, 5.—*Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los demás puntos de la recta lo están también.*

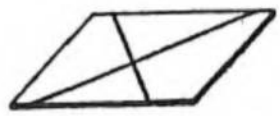
2. Otras determinaciones del plano.—De los axiomas anteriores deducimos fácilmente los dos siguientes teoremas:

Una recta y un punto exterior determinan un plano que pasa por ellos.

Existe, en efecto, un plano y sólo uno que pasa por el punto dado y dos puntos de la recta (Ax. I, 4), el cual contiene toda la recta (Ax. I, 5).

El lector demostrará análogamente que:

Dos rectas distintas que tienen un punto común determinan un plano que las contiene.



3. Proyectar, trazar, unir, cortar.—El uso ha consagrado gran variedad de términos para expresar las ideas de determinación contenidas en los axiomas y teoremas anteriores.

«Trazar la recta AB», «unir A con B», «proyectar B desde A, o A desde B», son frases que equivalen a «determinar la recta AB».

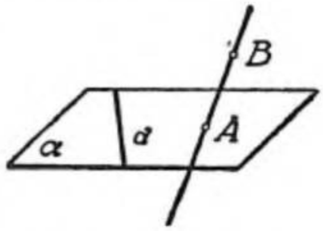
«Trazar el plano Ar», «unir el punto A con la recta r», «proyectar A desde r o r desde A», equivalen a «determinar el plano Ar».

Dos rectas, o una recta y un plano con un solo punto común, se dice que *se cortan* en este punto, o que son *secantes* en él, punto que se llama de *intersección*. También se llama *pie* o *traza* de una recta sobre la otra o sobre el plano

4. Posiciones de dos rectas.—Si dos o más rectas o puntos están en un mismo plano se dice que son *coplanarios*. El último teorema establecido puede, pues, expresarse diciendo: *Dos rectas secantes son coplanarias*.

¿Es cierto lo recíproco?, es decir, ¿dos rectas coplanarias son secantes? No podemos contestar a esta pregunta con los axiomas establecidos.

En cambio podemos reconocer la *existencia de rectas no coplanarias*. Dada una recta a de un plano α, para obtener otra no coplanaria con ella basta unir un punto A de α exterior a a, con otro punto B exterior al plano



Las rectas a y AB no pueden estar en un mismo plano, pues, por el teorema antes demostrado, no existe más que el plano α que contiene a y A, y en él habría de estar B, contra lo supuesto.

Dos rectas no coplanarias no pueden, pues, tener punto alguno común y se dice que se *cruzan*.

5. **Carácter tridimensional del espacio sensible.**—Hemos visto que una recta queda determinada por *dos* puntos, un plano por *tres*. ¿No podríamos admitir por analogía la existencia de nuevos conjuntos *parciales* de puntos del espacio determinados por cuatro,

cinco, ... puntos y de propiedades análogas a las que hemos establecido axiomáticamente para las rectas y los planos?

Nada hay que se oponga lógicamente a ello, considerando el espacio como un conjunto abstracto de puntos. Admitamos, pues, provisionalmente la existencia de nuevos conjuntos parciales llamados ***hiperplanos*** que cumplan los siguientes axiomas (*):

Ax. 4' *Existe un hiperplano y sólo uno que contiene cuatro puntos no coplanarios.* (Propiedad análoga a la de la determinación del plano.)

Ax. 5' *Todo plano que tiene tres puntos en un hiperplano tiene en él todos los demás.* (Propiedad análoga a la que cumplen la recta y el plano.)

Con estos axiomas podríamos demostrar la determinación del hiperplano por un plano y una recta secantes, por dos rectas cruzadas, etc.; pero llegaríamos también a consecuencias curiosas como la que sigue:

Existen pares de planos que tienen un solo punto común.

Consideremos, en efecto, el plano determinado por tres puntos no alineados ABC y el hiperplano $ABCD$ determinado por aquéllos y un nuevo punto D exterior al plano ABC. Si, como hemos supuesto, el hiperplano $ABCD$ es un *conjunto parcial* de puntos del espacio, podemos elegir otro punto D' fuera de él, y definir otro hiperplano $ABCD'$ distinto del $ABCD$.

Es fácil ver ahora que los planos ABC y ADD' no pueden tener más punto común que A; pues si tuvieran otro punto común P, el hiperplano $ABCD$ contendría P por contener ABC (Ax. 5') y por consiguiente contendría también al plano ADP (**) que es el mismo ADD' (por estar P en dicho plano). En consecuencia el hiperplano $ABCD$ contendría D', contra lo supuesto.

Esta consecuencia choca a tal punto con la intuición que tenemos de las propiedades de nuestro espacio sensible, que si queremos construir, como hasta ahora, una Geometría que las traduzca y encauce racionalmente, hemos de admitir axiomáticamente «la imposibilidad de la existencia de tales conjuntos parciales» o que «dos planos con un punto común tienen común otro punto» (Hilbert), con lo que tendrán común una recta que éstos determinan (de acuerdo con lo que la intuición nos dicta), o bien habremos de demostrar este hecho como consecuencia de nuevos axiomas, como haremos más adelante al enunciar el axioma de división del espacio. (V. la parte de Geometría del Espacio.)

EJERCICIOS

1. ¿Cuántas rectas determinan n puntos no alineados tres a tres?

2. ¿Cuántos planos determinan n puntos no coplanarios cuatro a cuatro?

3. Llámase *cuadrilátero completo* a la figura formada por cuatro rectas secantes entre sí dos a dos, sin que tres de ellas pasen por un punto. Estas rectas se llaman *lados* del cuadrilátero, y sus puntos de intersección *vértices*. Se llaman *diagonales* del cuadrilátero las rectas que unen vértices no situados en un mismo lado. ¿Cuántos vértices y cuántas diagonales tiene el cuadrilátero completo?

4. Llámase *cuadrivértice completo* a la figura formada por cuatro puntos coplanarios no alineados tres a tres, llamados *vértices*, y las rectas que los unen dos a dos llamados *lados*. Llámanse *puntos diagonales* del cuadrivértice los puntos de intersección de lados no concurrentes en un vértice. ¿Cuántos lados tiene el cuadrivértice? ¿Cuántos puntos diagonales tiene a lo sumo? ¿Podemos asegurar su existencia?

(*) De hecho, así se estudian por vía sintética las variedades lineales en el espacio de n dimensiones.

(**) El punto P no puede estar en la recta AD, porque en tal caso la recta APD pertenecería al plano ABC, en el que estaría situado D, contra la hipótesis.

LECCIÓN 2.ª—LAS RELACIONES DE ORDEN Y SEPARACIÓN

1. Ordenación lineal. Conceptos «precede» y «sigue».

Al decir que los vocablos de un diccionario están *ordenados*, entendemos, en definitiva, que se dispone de un criterio (ordenación alfabética) que permite reconocer si un vocablo precede o sigue a otro. Esta relación tiene la propiedad de ser *transitiva*, es decir, si un vocablo precede a otro precede también a todos los que siguen a éste, gracias a lo cual, encontramos con facilidad un vocablo sin necesidad de compararlo con *todos* los demás.

Diremos que un conjunto (finito o infinito) de elementos está ordenado linealmente cuando es posible relacionarlos entre sí mediante el verbo «*preceder*», *de tal modo que:*

1.° *Dados dos elementos* A *y* B, *o* «A *precede a* B» *o* «B *precede a* A».

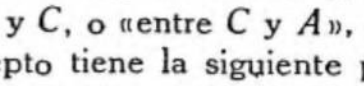
2.° *Si* A *precede a* B, *y* B *precede a* C, A *precede a* C (propiedad transitiva).

En lugar del verbo *preceder* (estar delante, antes) puede emplearse el verbo *seguir* (estar detrás, después), cambiando entre sí los elementos. Es decir, si «*A* precede a *B*», «*B* sigue a *A*». *El concepto* «sigue» *tiene, pues, las mismas propiedades que el concepto* «precede», y en particular: Si *C* sigue a *B* y *B* sigue a *A*, *C* sigue a *A*

2. Conceptos «estar entre» y «separar».—Cuando un elemento *B* precede a *C* y sigue a *A* se dice que «*está entre*» *A* y *C*, o «entre *C* y *A*», o también que *separa* a ambos elementos. Este concepto tiene la siguiente propiedad, consecuencia de la anterior

Si D *está entre* A *y* B, *y* B *está entre* A *y* C, *está también* D *entre* A *y* C.

Basta aplicar la propiedad transitiva de los conceptos «precede» o «sigue» a los elementos *D*, *B* y *C*.



3. Axioma de ordenación de los puntos de la recta.

Reconocemos por intuición que son conjuntos ordenados linealmente. los días del año; los números enteros; los puntos de una recta. Sin embargo hay algunas diferencias esenciales en la ordenación de estos tres conjuntos:

Existe un *primero* y un *último* día del año; quiere decir: un día que precede a todos los demás, y otro que sigue a todos los demás. No existe en cambio ni primero ni último número entero (..., —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, ...).

Existen días y números enteros *consecutivos*, es decir, entre los cuales no hay ningún otro. No existen, en cambio, en la recta ni primero, ni último punto, ni tampoco puntos consecutivos. Esta propiedad de la recta que la intuición nos dicta, constituirá nuestro primer axioma de ordenación.

Ax. II, 1.—*La recta es un conjunto linealmente ordenado de puntos que no tiene ni primero ni último punto, y en el que no hay puntos consecutivos.*

Al decir que no tiene *primero* ni *último* punto, significamos:

Dado un punto cualquiera, existe por lo menos otro que le precede y otro que le sigue. De donde resulta: *Existen infinitos puntos que preceden e infinitos puntos que siguen a uno dado de la recta.*

Basta, en efecto, aplicar reiteradamente la propiedad de la existencia de un punto precedente (siguiente) y la propiedad transitiva del concepto «precede» (sigue). Por ejemplo: Dado A existe un siguiente B, y un siguiente a éste C, que lo será a A, etc.

Al decir que la recta no tiene puntos *consecutivos*, entendemos:

Dados dos puntos cualesquiera, existe por lo menos otro situado entre ambos. De donde: *Existen infinitos puntos situados entre dos cualesquiera de la recta.*

Basta aplicar reiteradamente la propiedad de la existencia de un punto y la transitiva del concepto «entre». Así: Entre A y B existe C; entre A y C existe D, que también está entre A y B; entre A y D existe E; etc.

Para expresar abreviadamente la primera propiedad diremos: *La recta es un conjunto «abierto» de puntos* (*). Para expresar la segunda, se dice: *La recta es un conjunto «denso» de puntos.* En resumen, el axioma de ordenación puede expresarse abreviadamente así:

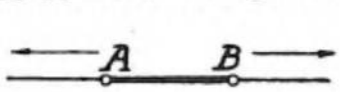
Ax. II. 1.—*La recta es un conjunto de puntos linealmente ordenado, abierto y denso.*

Dado un número *finito* de puntos $A, B, C, D, \ldots$ de una recta habrá uno que precede a los demás; le llamaremos *primero*. Llamando *segundo* al primero de los restantes; *tercero* al primero de los demás y así sucesivamente.. diremos que se ha *ordenado* el conjunto finito $A, B, C, D, \ldots$

4. Definiciones de semirrecta y de segmento.—*El conjunto definido por un punto de una recta y todos los de ésta que le preceden (o siguen) se llama «semirrecta».* Cada punto de una recta determina, pues, en ella dos semirrectas, llamadas *opuestas*. El punto en cuestión se llama *origen* de ambas, las cuales se designan enunciando primero el origen y después otro punto de la semirrecta. Por ejemplo: semirrecta AB.

El conjunto formado por dos puntos de una recta y todos los situados entre ambos se llama «segmento». Los puntos en cuestión se llaman *extremos* del segmento, del cual se dice que *une* sus extremos; los restantes se llaman *interiores* al segmento.

Dos puntos A y B, determinan, pues, un segmento, designado «segmento AB» o AB, que puede también considerarse definido por los *puntos comunes a las semirrectas AB y BA* (por la definición de «estar entre» y de semirrecta). Las semirrectas opuestas a éstas se llaman *prolongaciones del segmento*. Llamaremos prolongación por el lado de B y designaremos por $AB\rightarrow$ la prolongación opuesta a la semirrecta BA. Análogamente se define $BA\rightarrow$.



(*) El adjetivo «abierto» que aplicamos a la recta tiene, pues, aquí, un significado diferente del que se usa en teoría de conjuntos. Otros calificativos (indefinido, ilimitado) tienen inconvenientes todavía peores.

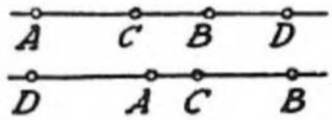
De las definiciones establecidas se desprende:

El segmento que une dos puntos cualesquiera situados en $\left\{\begin{matrix}\textit{dos semirrectas opuestas}\\ \textit{una misma semirrecta}\end{matrix}\right.$ *y distintos de su origen* $\left\{\begin{matrix}\textit{contiene}\\ \textit{no contiene}\end{matrix}\right.$ *dicho origen.*

Todo punto P *interior a un segmento, le divide en dos partes o segmentos parciales,* constituídos respectivamente por *P* y los puntos del segmento que le preceden o siguen.

5. Pares de puntos separados.—*Dados dos pares de puntos alineados,* AB *y* CD, *diremos que* C *y* D *están separados por* A *y* B *cuando uno de los puntos* C *o* D *pertenece al segmento* AB *y el otro no.*

La separación es recíproca, es decir uno de los dos puntos *A* o *B* pertenece entonces al segmento *CD* y el otro no. Basta ordenar los cuatro puntos; en virtud de la definición, el par *A*, *B* tiene un solo punto intermedio del otro par, luego coincide con el par 1.°-3.° o con el 2.°-4.°; por lo tanto, el par *CD* será respectivamente el 2.°-4.° o el 1.°-3.°

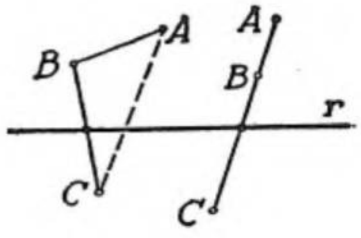


6. Axioma de la división del plano.—Del mismo modo que un punto de una recta la divide en dos regiones de puntos separados por él, la intuición nos dice que toda recta divide también al plano en dos regiones separadas, de acuerdo con el axioma siguiente.

Ax. II, 2.—*Toda recta de un plano establece una clasificación de los puntos no contenidos en ella en dos únicas clases o regiones tales que:*

Todo punto exterior a r *pertenece a una u otra región.*

El segmento que une dos puntos $\left\{\begin{matrix}\mathrm{AB}\\ \mathrm{AC}\end{matrix}\right\}$ *de* $\left\{\begin{matrix}\textit{la misma}\\ \textit{distinta}\end{matrix}\right\}$ *región* $\left\{\begin{matrix}\textit{no corta}\\ \textit{corta}\end{matrix}\right\}$ *a la recta* r



Al decir que un segmento *AC* corta una recta *r* entendemos que tiene en ella un punto distinto de sus extremos. También se dice que la recta *r separa* los puntos *A* y *C*, o que éstos están a *distinto lado* de *r*. Recíprocamente:

Si (supuestos *A*, *B*, C no en *r*) $\left\{\begin{matrix}\mathrm{AB}\ \textit{no corta}\\ \mathrm{AC}\ \textit{corta}\end{matrix}\right\}$ r $\left\{\begin{matrix}\mathrm{A}\ \textit{y}\ \mathrm{B}\\ \mathrm{A}\ \textit{y}\ \mathrm{C}\end{matrix}\right\}$ *están en* $\left\{\begin{matrix}\textit{la misma}\\ \textit{distinta}\end{matrix}\right\}$ *región.*

En efecto; si *A* y *B* estuviesen en distinta región, en virtud del axioma, *AB* cortaría a *r* contra lo supuesto. Análogamente, para *A* y C.

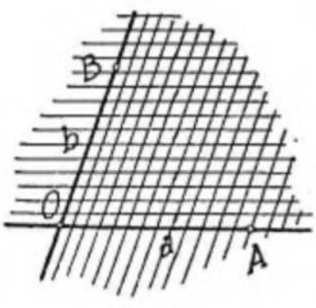
Del axioma de división del plano resulta inmediatamente el teorema siguiente:

Dados tres puntos A, B, C *y una recta* r *de su plano que no pasa por ellos si* r *separa un par* AC *de estos puntos, separa también otro par* BC, *pero no el* *tercero.* En efecto, A y C están en distinta región, luego B está necesariamente en igual región que uno de los puntos y en distinta región que el otro (*).

7. Definiciones de semiplano y de ángulo.—*Dada una recta* r *del plano, el conjunto de sus puntos y los de cada una de las regiones en que divide al plano se llama «semiplano».* La recta r recibe el nombre de *borde* de ambos semiplanos, llamados *opuestos* entre sí. Designaremos cada semiplano por el borde y un punto: por ejemplo: «semiplano rA».

Dos rectas secantes se dividen mutuamente en dos semirrectas, cada una de ellas contenida en uno de los semiplanos definidos por la otra recta.

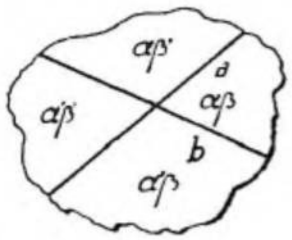
Dadas dos semirrectas no opuestas a *y* b, *de origen común* O, *llamaremos ángulo convexo* ab *o, simplemente, ángulo* ab *a la interferencia de los (o conjunto de puntos comunes a los) semiplanos siguientes: aquel cuyo borde es la recta* a *y que contiene* b, *y aquel cuyo borde es la recta* b *y que contiene* a. (V. la región de rayado doble de la figura.)

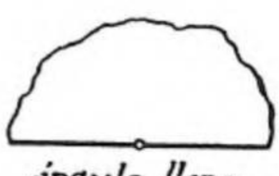


Las semirrectas a y b se llaman *lados* y su origen común *vértice* del ángulo, el cual se designa dando sus lados ab, o un punto en cada lado y el vértice en medio, así. $\sphericalangle AOB$.

8. Angulos adyacentes y opuestos por el vértice. Angulo cóncavo y llano.—Dos rectas secantes definen, pues, cuatro ángulos convexos según los semiplanos que hagamos interferir. Llamando α y α' los semiplanos limitados por la primera y β, β' los limitados por la segunda, estos ángulos son las interferencias de $\alpha\beta$, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ y $\alpha'\beta'$ (v fig.).

Los pares de ángulos procedentes de la interferencia con un mismo semiplano α, como, por ejemplo, $\alpha\beta$ y $\alpha\beta'$ se llaman *adyacentes.* Los procedentes de interferencia de semiplanos distintos se llaman *opuestos por el vértice,* como, por ejemplo, $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$





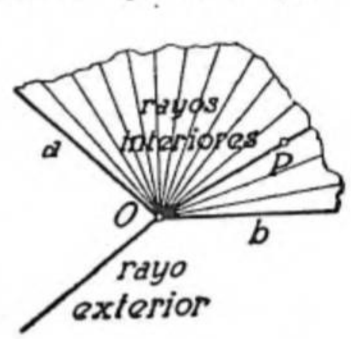
ángulo llano

Cada ángulo $\alpha\beta$ tiene, pues, dos adyacentes $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ y un opuesto por el vértice $\alpha'\beta'$. El conjunto de estos tres se llama *ángulo cóncavo* y se consideran como lados de él los mismos del convexo $\alpha\beta$.

Para dar al concepto ángulo la debida generalidad convendremos también en llamar *ángulo llano* a cada uno de los semiplanos limitados por dos semirrectas opuestas.

(*) Recíprocamente; admitido este teorema como axioma, puede demostrarse el axioma de la división del plano. Así proceden Pasch, Hilbert, ...

9. El ángulo como conjunto de rayos.—Si unimos un punto P perteneciente a un *ángulo convexo* y no situado en sus lados, es decir, *interior* a él, con el vértice O, todos los puntos de la semirrecta OP serán también *interiores* al ángulo, por pertenecer a los dos semiplanos que le definen. Lo mismo puede repetirse para un *ángulo cóncavo*, puesto que la semirrecta considerada pertenecerá a alguno de los tres ángulos convexos que le definen.

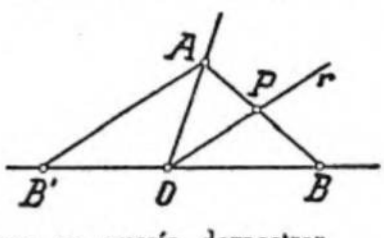


Los puntos interiores a un ángulo, pueden, pues, agruparse en semirrectas llamadas «rayos» interiores, y podemos considerar, así, el ángulo como el conjunto de sus rayos interiores. Las semirrectas no interiores distintas de los lados se llaman *rayos exteriores* al ángulo.

Demostremos ahora el teorema siguiente:

El segmento que une dos puntos A *y* B *respectivamente situados en lados distintos de un ángulo convexo, corta a todo rayo* r *interior.*

En efecto, tomando B' en la semirrecta opuesta a OB, el segmento AB' no corta a r por estar en semiplano distinto respecto de OA (definición del ángulo); tampoco corta a la semirrecta opuesta a r por estar AB' en el mismo semiplano que r respecto a BB'; A y B' están, pues, en un mismo semiplano respecto de la recta de r; y como B y B' están separados por dicha recta, también lo estarán A y B, es decir: el segmento AB (todo él contenido en el ángulo) corta a la recta de r en los puntos de ella interiores al mismo, luego corta a la semirrecta r, como se quería demostrar.



Llamando P al punto de intersección, todo otro rayo r' interior al ángulo AOB cortará a AB en el segmento AP o en el PB, es decir, pertenecerá al ángulo AOr o al rOB.

En consecuencia: *Todo rayo* r *interior a un ángulo convexo lo divide en dos partes o ángulos parciales situados en distinto semiplano respecto de* r.

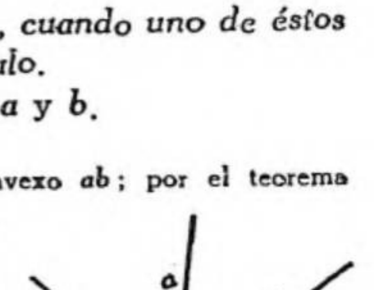
10. Pares de rayos separados.—Todas las semirrectas o rayos con origen común en un punto O se dice que constituyen un ***haz*** de vértice O. Denominación: haz O.

Dos rayos de un haz definen, según lo dicho, dos ángulos, uno convexo y otro cóncavo, o dos ángulos llanos.

Diremos que dos rayos a *y* b *separan otros dos* c *y* d, *cuando uno de éstos está en uno de los ángulos* ab, *y el otro en el otro ángulo.*

La separación es recíproca. Es decir, c y d separan a y b.

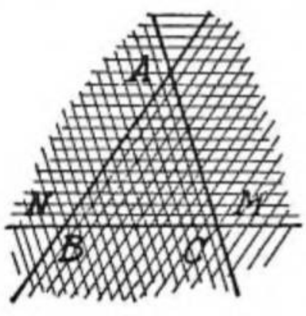
En efecto, supongamos, por ejemplo, c interior al ángulo convexo ab; por el teorema anterior a y b están en distintos semiplanos respecto de la recta de c. Si d es opuesto a c, el teorema está demostrado; si no es así, uno de estos semiplanos, el que contiene ca, por ejemplo, contiene a d, y el otro no; luego el lado b es exterior al ángulo convexo cd y a es interior (por separar d y c y pertenecer al semiplano cd).



Por ser b exterior al ángulo convexo ac, lo mismo que d, y por ser a y d ambos exteriores a cb (situados en distinto semiplano respecto de c), resulta además:

Si a, b *están separados por* c *y* d, *los pares* ac *y* bd, *como los* ad *y* bc, *no están separados.*

11. Definición de triángulo y de polígono convexo.—*Dados tres puntos* A, B, C *no alineados, llamaremos «triángulo» a la interferencia (conjunto de puntos comunes) de los tres semiplanos limitados por las rectas* AB, BC, CA *y que contienen respectivamente los puntos* C, A *y* B. (Región triplemente rayada de la figura.)

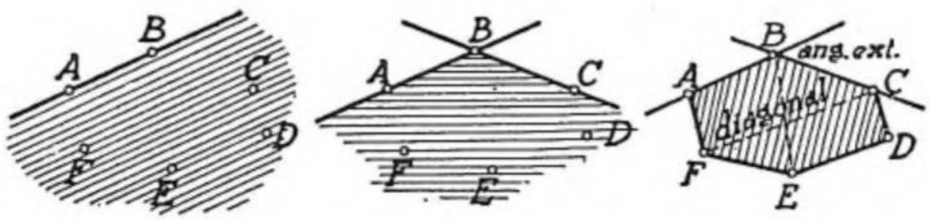


Los segmentos BC, CA, AB se llaman lados del triángulo; se les puede designar por las letras minúsculas a, b y c, y los puntos A, B C se llaman *vértices*, respectivamente *opuestos* a aquellos lados.

Los ángulos determinados por cada dos de estos semiplanos se llaman *ángulo del triángulo*, y sus adyacentes *ángulos exteriores*. En la figura son exteriores, por ejemplo, $\sphericalangle ACM$, $\sphericalangle ABN$, ...

Generalizando la definición anterior, diremos:

Si n *puntos del plano,* A, B, C, ..., F *se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los* n−2 *puntos restantes, se llama «polígono convexo» al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.*

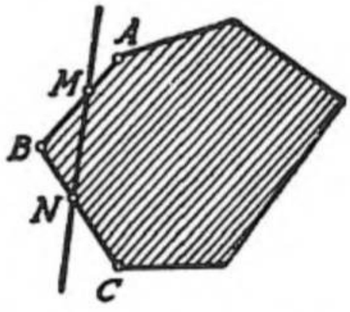


Los puntos A, B, C, ..., F se llaman *vértices* del polígono. Los segmentos AB, BC, ... EF, determinados por cada dos vértices consecutivos se llaman *lados* del polígono. Su conjunto se llama *contorno del polígono*. Los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos se llaman *diagonales*.

En virtud de la definición: *Todos los puntos del polígono convexo pertenecen a los ángulos definidos por cada dos semiplanos consecutivos*, ángulos que se llaman *ángulos del polígono*. Los ángulos adyacentes a los del polígono se llaman *ángulos exteriores*.

Según el número de lados, los polígonos se llaman *triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos*, etcétera.

La existencia de polígonos convexos de cualquier número de lados se prueba por inducción a partir de la de los triángulos. Uniendo dos puntos M y N de dos lados consecutivos AB y BC de un polígono convexo de n lados se obtiene una recta MN que no puede cortar al contorno del polígono en ningún otro punto, pues, de existir tres puntos de intersección, dos de ellos estarían separados por el lado que pasa por el tercero en contra de la definición de polígono convexo. Esto prueba que, a excepción de B todos los vértices están en un mismo semiplano respecto de la recta MN, y por tanto, ésta limita, con los lados del polígono un nuevo polígono convexo con un lado más.



12. Propiedad general de las figuras convexas.—Llamaremos en general *figura* a todo conjunto de puntos. Las rectas, los semiplanos, los segmentos, los ángulos, los polígonos, etc., son, pues, figuras.

Todas las figuras definidas por interferencia de semiplanos, como los ángulos convexos, triángulos y polígonos convexos, tienen la siguiente propiedad (que se adopta como definición general de *figura convexa*):

Todos los puntos del segmento que une dos puntos cualesquiera de una figura convexa, pertenecen también a ella. Puesto que pertenecen a todos los semiplanos que la definen.

13. Propiedades de los polígonos convexos.—Los puntos de un polígono, no pertenecientes al contorno, se llaman *interiores*. Los puntos no pertenecientes al polígono se llaman *exteriores*. Demostremos:

Toda semirrecta, con origen en un punto O *interior de un polígono convexo, corta al contorno del polígono en un punto.*

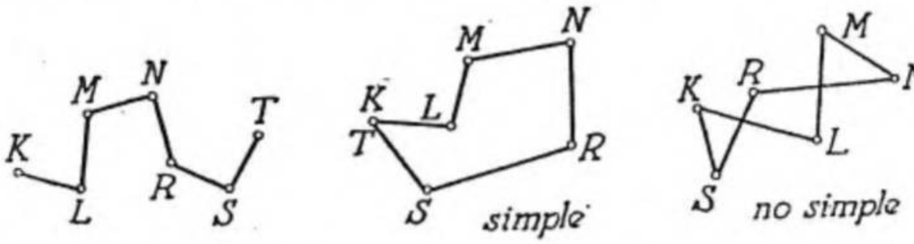
El punto O es, por definición, interior a todos los ángulos del polígono. Por lo tanto, BO separa A y C, de donde los ángulos AOB y BOC están a distinto lado de OB. Análogamente, OC separa BOC y COD, etc. De donde resulta que los ángulos AOB, BOC, COD, .., FOA, cada uno de los cuales tiene un lado común (y sólo los puntos de él) con el anterior y el siguiente y el último con el primero, llenan el plano. Trazada, pues, una semirrecta de origen O, o coincide con uno de los lados OA, OB, ..., en cuyo caso pasa por un vértice del polígono, o es interior a alguno de dichos ángulos AOB, por ejemplo, y, por lo tanto, corta al lado correspondiente AB del polígono en un punto R; y no puede cortar al contorno en otro punto R', pues uno de los dos puntos R (o R') y el lado que lo contiene, separaría al otro de O en contra de la definición de polígono convexo.

Consecuencias: *Todo segmento* OP *que une un punto interior con otro exterior corta al contorno en un punto.* Por lo tanto, *si un segmento no corta al contorno, sus extremos son ambos interiores o ambos exteriores.*

Toda recta trazada por un punto interior corta al contorno en dos puntos.

En cambio: *En el exterior del polígono existen rectas que no cortan al contorno.* Basta unir los puntos M y N de las prolongaciones de dos lados consecutivos por el vértice común, por ejemplo $BC\rightarrow$ y $DC\rightarrow$. En efecto, el polígono está en el interior del ángulo BCD y la recta MN, que corta a las prolongaciones de sus lados, no puede cortar a éstos, y, por lo tanto, tiene todos los puntos exteriores a dicho ángulo.

14. Teorema de Jordan.—Dados varios segmentos KL, LM, MN, ..., ST, de tal modo ordenados que cada uno de los intermedios tiene un extremo común con el anterior y otro con el siguiente (sin estar alineado con ellos), el conjunto de todos ellos se llama *línea quebrada* o *poligonal*, y dichos segmentos y puntos, *lados* y *vértices* de la quebrada.

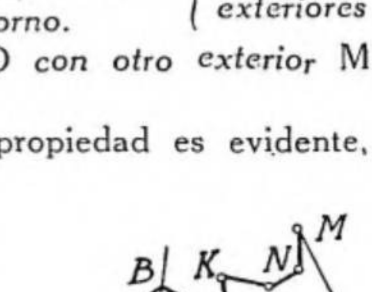


Si el extremo K del primer segmento coincide con el extremo T del último se dirá que la poligonal es *cerrada*. Si los lados no tienen más puntos comunes entre sí que los mencionados, la poligonal se llama *simple*. Demostremos:

I. *En todo polígono convexo, dos puntos* M *y* N, *ambos* $\left\{\begin{matrix}\textit{interiores}\\ \textit{exteriores}\end{matrix}\right.$ *pueden unirse por una quebrada que no corta al contorno.*

II. *Toda quebrada que une un punto interior* O *con otro exterior* M *corta al contorno.*

Si los puntos M y N son interiores, la primera propiedad es evidente, pues basta trazar el segmento MN. Si M y N son exteriores, basta unirlos por puntos de las prolongaciones $OA\rightarrow$, $OB\rightarrow$, $OC\rightarrow$, ... de los segmentos determinados por los vértices y un punto interior, lo que es siempre posible, puesto que los ángulos AOB BOC, COD, ..., según hemos probado, llenan el plano.



Para demostrar la segunda propiedad, sea $OPQRKLNM$ la quebrada, que supondremos no tiene ningún vértice en el contorno (en cuyo caso no haría falta demostrar la propiedad). Si $\left\{\begin{matrix}OP\\ MN\end{matrix}\right.$ no corta al contorno, $\left\{\begin{matrix}P \text{ es interior}\\ N \text{ es exterior}\end{matrix}\right\}$ en virtud de lo demostrado en el párrafo anterior. Repitiendo el razonamiento a partir de P y N, y así sucesivamente, llegaremos a la existencia de dos vértices consecutivos de la quebrada, uno interior y otro exterior, los cuales son extremos de un segmento de la misma que corta al contorno.

El conjunto de estos dos enunciados, generalizables a otros polígonos y recintos, se llama *teorema de Jordan*.

Lección 3.ª—El sentido en el plano

1. Los dos sentidos en la recta.—Hemos dicho en la lección anterior que los conceptos «precede» y «sigue» tienen propiedades idénticas. Ordenados, pues, los puntos de una recta de acuerdo con el criterio según el cual «A precede a B», siendo A y B dos puntos de la misma, podemos cambiar entre sí las palabras «precede» y «sigue», obteniendo una nueva ordenación que cumple las mismas condiciones que la anterior.

Al criterio de ordenación de los puntos de la recta, que fué establecido por el Axioma II, 1, corresponde, por tanto, otro criterio opuesto, que se obtiene considerando los puntos «precedentes» como «siguientes» y recíprocamente.

Diremos que cada criterio de ordenación define un *sentido* en la recta; existen, por tanto, en ella *dos sentidos* que llamaremos *opuestos*.

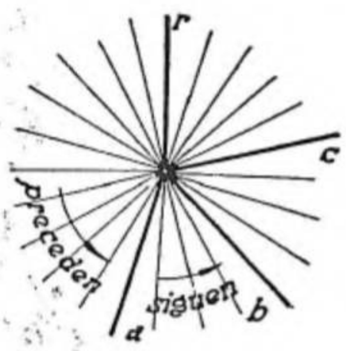
2. Concepto de recta ordenada y vector.—Para definir un sentido en la recta basta dar dos de sus puntos A y B en un orden, o una semirrecta, conviniendo en considerar su origen como primer elemento. Sentido AB equivale, pues, a decir: «Sentido en el cual A precede a B». Definido este sentido, es decir, establecido el criterio de ordenación que le corresponde, quedan ordenados linealmente todos los puntos de la recta, y en particular los del segmento AB.

Una recta (segmento) en la cual se ha fijado un sentido se llama *recta orientada (segmento orientado)*. Un segmento orientado AB se llama también *vector* y se representa así: $\overrightarrow{AB}$. El punto A se llama *origen* y el B *extremo* del vector.

3. Los dos sentidos en el haz.—Mientras todo punto de una recta clasifica los restantes en dos clases, llamándose «precedentes» los de cualquiera de ellas y «siguientes» los de la otra, un solo rayo de un haz no permite establecer una clasificación análoga de los restantes. Pero si imaginamos *suprimido un rayo r*, que llamaremos *origen*, cualquier otro rayo a divide a los restantes de este haz, que llamaremos *abierto*, en dos clases pertenecientes, respectivamente, a los dos ángulos determinados por a y r.

Convengamos en llamar «precedentes» al a los de uno de estos ángulos y «siguientes» los del otro. Un nuevo rayo b pertenecerá, pues, a una u otra clase.

Con objeto de que los conceptos «precede» y «sigue» sean *recíprocos* adoptaremos el siguiente convenio:



Si $b \left\{ \begin{matrix} \text{sigue} \\ \text{precede} \end{matrix} \right\}$ a a, consideraremos como $\left\{ \begin{matrix} \text{precedentes} \\ \text{siguientes} \end{matrix} \right\}$ a b todos los rayos del ángulo br que contiene a. Según estos convenios, se verificará:

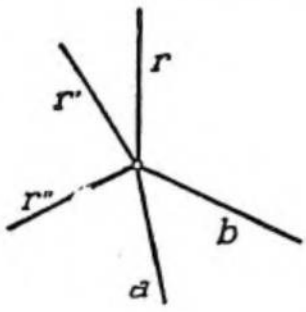
1. *Dados dos rayos de un haz abierto* a *y* b, *o* a *«precede a* b*» o «*b *precede a* a*».*

2. *Si* a *precede a* b *y* b *precede a* c, a *precede a* c.

Pues, por ser a y c respectivamente precedente y siguiente a b, están separados por b y r; de donde, a y b no están separados por c y r; es decir, a y b pertenecen a la misma clase respecto de c. En resumen, a precede también a c, como queríamos demostrar.

Por otra parte, *dado un rayo cualquiera del haz abierto, existen siempre rayos precedentes y siguientes de él,* y además, *dados dos rayos, existen siempre rayos intermedios,* los pertenecientes al ángulo que no contiene el origen.

Resumiendo, podemos afirmar: *Al suprimir un rayo de un haz, los restantes constituyen un conjunto linealmente ordenado, abierto y denso,* como el conjunto de los puntos de una recta.



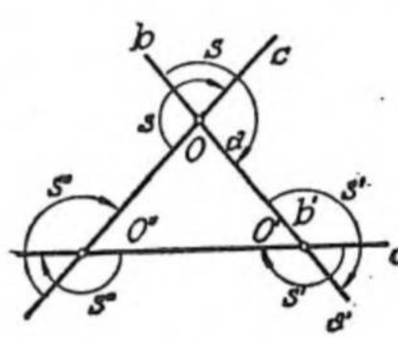
En todo haz abierto podemos, pues, considerar dos sentidos lo mismo que en la recta. Precisemos uno de ellos, y variemos el rayo origen r, sustituyéndolo por otro r'. En virtud de los convenios anteriores, *la ordenación de los pares de rayos no separados por* r *y* r′ *no quedará alterada por esta sustitución;* y lo mismo podemos decir al cambiar r' por r'', eligiendo pares no separados por estos orígenes (propiedad transitiva).

Por consiguiente: *elegido un sentido en un haz abierto, queda determinado un sentido en cualquier otro del mismo vértice, de tal modo que se conserva la ordenación de los rayos no separados por los orígenes.* Conviniendo en llamar *iguales* ambos sentidos, resulta: *La igualdad de sentido tiene la propiedad transitiva;* de otro modo: *sentidos iguales a un tercero son iguales entre sí.* Por ser más cómodo, hablaremos de *un solo sentido* común a todas estas ordenaciones. Si consideramos ahora la ordenación opuesta, resulta, en resumen, de todo lo dicho:

En cada haz de rayos existen dos sentidos opuestos, como en la recta. Para fijar un sentido en el haz (cerrado) hace falta dar en un orden *tres rayos* del mismo (uno considerado como origen y los otros dos para dar el séntido del haz abierto resultante).

Un haz en el cual se ha fijado un sentido se llama *orientado*. En particular un ángulo se llamará *orientado* cuando se ha fijado un sentido en la ordenación de sus rayos.

4. Los dos sentidos del plano. Plano orientado.— Vamos a relacionar ahora los sentidos de todos los haces del plano por un criterio de igualdad. según el siguiente convenio:



Sean O y O' los vértices de dos haces. Sea a el rayo OO' de O, y b su opuesto. Sea b' el rayo $O'O$ de O' y a' su opuesto; es decir las semirrectas a y a', tienen el mismo sentido en la recta OO'. Sean finalmente c y c' dos rayos respectivamente pertenecientes a uno y otro haz situados en un mismo semiplano respecto de OO'. Diremos que los sentidos definidos por las ternas bca y $b'c'a'$, en ambos haces son *iguales*.

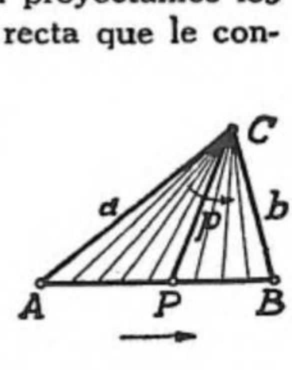
Sea ahora un tercer haz de vértice O''. Si O'' está en la recta OO', y el haz tiene el mismo sentido que O', por definición, tendrá igual sentido que O (propiedad transitiva).

Si O'' no está alineado con OO', las prolongaciones de los lados del triángulo $OO'O''$ permiten establecer fácilmente el carácter transitivo de la igualdad de sentido en los tres haces, como indican las igualdades siguientes que se refieren a los sentidos s, s' y s'' definidos por las ternas de rayos enlazados por las flechas curvas de la figura (con objeto de abreviar las notaciones)

$$s=s' \qquad s'=s'' \qquad s''=s$$

En lugar de hablar de sentidos *iguales*, se prefiere hablar de *un mismo sentido*, común a todos los haces del plano, y decir, abreviadamente: *En todo plano* (en lugar de «en todos los haces de un plano») *existen sólo dos sentidos opuestos*. Cuando en un plano se ha fijado un sentido se dice que está *orientado*.

5. Correspondencia de sentidos en la proyección.—Si proyectamos los puntos de un segmento AB desde un punto C exterior a la recta que le contiene, obtendremos los rayos de un ángulo ACB.

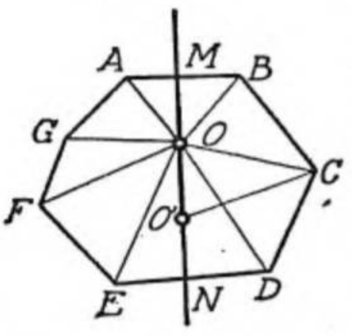


En virtud de la propiedad demostrada en la lección anterior, a todo punto P, interior al segmento, corresponde un rayo p interior al ángulo, y recíprocamente; y lo mismo puede decirse de los segmentos y ángulos parciales en que el segmento y el ángulo proyectante quedan divididos por aquel punto P y rayo p. En resumen la relación «entre» se conserva en la proyección, así como su carácter transitivo. A un sentido en el segmento corresponde, pues, un sentido en el haz; y recíprocamente: a un sentido en el haz proyectante de un segmento corresponde un sentido en éste.

Es fácil deducir de la figura y razonamiento del párrafo anterior que los sentidos de los tres haces proyectantes de los lados de un triángulo desde los vértices opuestos son iguales si se ordenan los tres vértices de modo cíclico en los tres lados así: AB, BC y CA, y como consecuencia: Si se proyectan los puntos de un mismo segmento AB desde dos puntos C y C' distintos, los sentidos de los haces obtenidos son iguales si dichos puntos están a un mismo lado de la recta AB; distintos en caso contrario. (Basta comparar los sentidos de los rayos de vértice A proyectantes de BC y BC'.)

6. Los dos sentidos en una línea poligonal.— La ordenación de los segmentos AB, BC, CD, ... de una línea poligonal abierta o cerrada, determina un sentido en cada uno de ellos, si convenimos en considerar como origen de cada segmento el extremo del anterior. Diremos, pues, que esta ordenación determina un *sentido en la poligonal*. Considerando la ordenación *opuesta*, resulta: *En toda poligonal existen dos sentidos opuestos.*

Si la poligonal es cerrada y convexa, es decir, si limita un polígono convexo, podemos relacionar cada uno de estos sentidos con el de un haz proyectante de sus puntos desde un punto O interior al polígono. Según lo demostrado en la lección anterior, los ángulos AOB, BOC, COD, ... GOA que proyectan los lados consecutivos del polígono, llenan el plano y sus rayos conservan un mismo sentido de ordenación por estar cada uno de los rayos comunes OA, OB, OC ... entre sus inmediatos anterior y posterior.

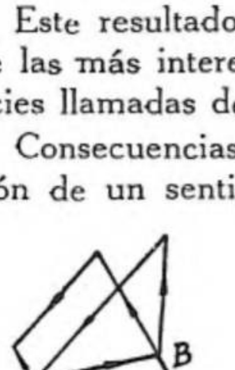


El sentido determinado en el haz proyectante es independiente del punto interior elegido. En efecto, elegido el vértice O', la recta OO' corta al contorno en dos puntos MN (v. lección anterior) y los sentidos $O(MCN)$ y $O'(MCN)$ son iguales, por el convenio antes establecido.

De todo ello se desprende que *una vez fijado el sentido de un solo haz del plano, queda determinado un sentido concordante en todos los demás haces y contornos poligonales convexos del plano* (*).

Este resultado, aparentemente nimio, constituye para las aplicaciones una de las más interesantes propiedades del plano (que se generaliza a las superficies llamadas de dos caras).

Consecuencias: Dados dos polígonos convexos con un lado común la elección de un sentido en este lado determina sentidos concordantes en ambos polígonos, si ambos están a un mismo lado, y discordes si están a distinto lado (v. párrafo anterior).

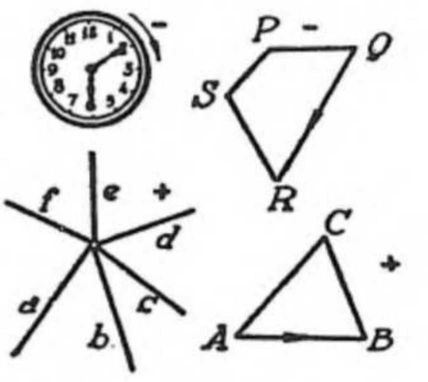


7. Individualización del sentido.—Hasta aquí hemos hablado de *igualdad* u *oposición de sentidos*; pero, por la misma identidad de las propiedades de los sentidos opuestos, *no es posible establecer, por vía geométrica pura, caracteres distintivos que los individualicen.*

(*) Lo mismo se llega a establecer para polígonos simples no convexos y para contornos curvos de Jordan.

Para conseguir este objeto es necesario referirlos a elementos ajenos a la Geometría. Se suele acudir para tal objeto a la persona humana y al reloj. No es, pues, de extrañar que, en la individualización del sentido, nuestro lenguaje pierda el rigor que ha tenido hasta ahora.

Imaginando colocado sobre el plano un reloj y situados nosotros invariablemente del lado del plano desde el que es visible su esfera, el sentido en que se mueven las saetas del reloj se llamará *negativo*, y, por consiguiente, llamamos también negativo el sentido de todos los haces y contornos poligonales concordantes con él, y *positivo* el sentido opuesto.

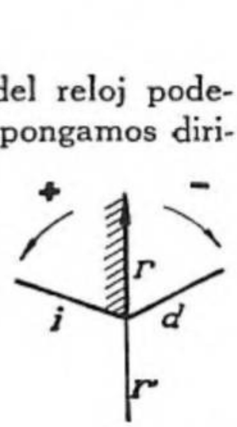


Así, el sentido del contorno cuadrilátero *PQRS* de la figura es negativo, y positivos los del haz orientado *abcdef*, y del triángulo *ABC*.

Obsérvese que la definición de sentido positivo depende del lado o cara del plano en que se supone situado el observador y la esfera (*). Basta pensar en un haz dibujado en un cristal para comprender que dos observadores situados a distinto lado del mismo designarán el sentido de distinto modo.

Quede, pues, convenido, de una vez para todas, que al designar el sentido de un haz o de un contorno en el plano, nos consideraremos siempre situados a un mismo lado del plano. (El lado en que se coloca el lector al leer el libro, el profesor y sus alumnos al mirar el encerado, ...)

8. Conceptos «derecha» e «izquierda» de.—En lugar del reloj podemos individualizar el sentido de un haz del siguiente modo: Supongamos dirigida nuestra vista en la dirección y sentido que marca uno de sus rayos *r*; sea *r'* su opuesto. Llamaremos sentido *positivo* del haz al que marca la terna *rir'*, siendo *i* un rayo situado a nuestra izquierda.



Se dice asimismo que el semiplano *rir'*, que contiene *i*, está situado a la *izquierda* del rayo *r*.

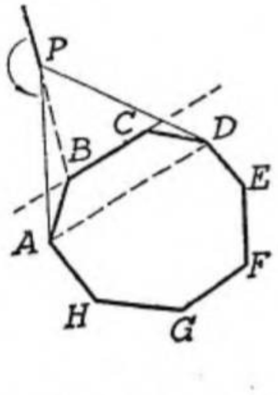
En virtud de la uniformidad y transitividad del sentido de los haces, fijado el semiplano que queda «a la izquierda» de una semirrecta cualquiera del plano, queda determinado sin ambigüedad el semiplano que queda «a la izquierda» de otra semirrecta cualquiera.

9. Otras propiedades de los polígonos convexos.—Hemos visto que los rayos que proyectan los puntos de un contorno poligonal convexo desde un punto interior llenan el plano. Veamos que por el contrario:

Los rayos que proyectan los puntos del contorno de un polígono convexo desde un punto exterior pertenecen a un ángulo convexo.

(*) En Geometría del espacio daremos una definición rigurosa de lo que debe entenderse por «lado» de un plano (semiespacio).

En efecto, por definición P pertenecerá a un semiplano α' (limitado, por ejemplo, por la recta BC) que no contiene al polígono. Abriendo el haz de vértice P por $BP\rightarrow$ podemos ordenar los rayos proyectantes de los vértices del polígono; y el ángulo APD limitado por el primero y el último rayo en cuyo interior están los demás, es convexo, pues si fuese cóncavo existirían puntos del contorno en la semirrecta $AP\rightarrow$, y por consiguiente en el semiplano α' en contra de la definición de polígono convexo. Por otra parte, al ser H interior al ángulo APD, H está en el semiplano limitado por PA que contiene al polígono, y por tanto $\sphericalangle PAH$ es también convexo. (Si P estuviese alineado con AH sustituiríamos A por H y H por G.) Análogamente para PDE. En consecuencia:



Dado un polígono convexo ABCDEFGH y un punto exterior P, con ese punto y algunos vértices del polígono podemos definir otro también convexo que comprende en su interior al dado. Basta sustituir por P los vértices B y C que están del mismo lado respecto de AD.

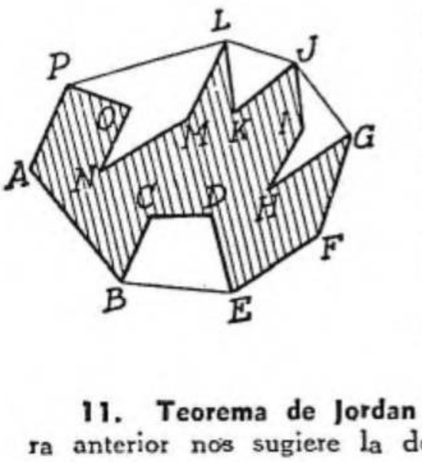
Dado un conjunto finito de puntos del plano, existe un polígono convexo y sólo uno, que llamaremos polígono circundante, cuyos vértices son puntos del conjunto y en cuyo interior o contorno están todos los demás puntos.

Partamos, en efecto, del triángulo formado por tres de los puntos; si en su interior o contorno están todos los demás, la existencia está demostrada. Si no es así, consideremos uno de los puntos del conjunto exteriores y formemos el polígono convexo circundante a que se refiere el teorema anterior. Si en su interior o contorno caen los demás puntos, el teorema está demostrado; si no, repetiremos el proceso hasta agotar todos los puntos.

Obtenemos así un polígono circundante, y no puede haber otro, pues entonces uno de ellos tendría puntos de su contorno exteriores al otro, lo que supondría la existencia por lo menos de un vértice (es decir, de un punto del conjunto) exterior a él.

10. Sentido de un contorno poligonal simple no convexo.—En los párrafos anteriores hemos visto cómo puede reducirse el sentido de un contorno poligonal convexo al de un haz de vértice interior. Veamos ahora cómo podemos reducir el sentido de un contorno poligonal simple cualquiera al del convexo circundante, y por lo tanto también al sentido de un haz.

Circundemos el polígono simple dado mediante otro convexo y ordenemos los vértices de éste, $ABEFGJLP$. Ordenemos asimismo las quebradas del polígono dado $BCDE$, $GHIJ$, JKL, $LMNOP$, que unen los extremos de lados no comunes, en el orden que indican dichos extremos en la ordenación anterior. Como los lados y vértices intermedios no tienen entre sí ningún punto común ni con el resto del contorno convexo (por ser simple el polígono dado), la intercalación de estos lados y vértices no altera la ordenación relativa de los demás. Por consiguiente al pasar de un polígono a otro por supresión o inclusión de lados intermedios se conserva la ordenación de los restantes.



En resumen *al fijar un sentido en el contorno convexo queda fijado un sentido en el simple y recíprocamente.*

11. Teorema de Jordan para polígonos simples cualesquiera.—La propiedad y la figura anterior nos sugiere la demostración del teorema de Jordan para polígonos simples no convexos.

Supongamos que el teorema es cierto para contornos poligonales *simples* de 3, 4, ... $n-1$ lados. Es decir: dado un tal contorno, supongamos que existe un criterio que ha permitido clasificar los restantes puntos del plano en dos regiones, de tal modo que:

1.º *Cada región es conexa*, o sea que se puede unir sus pares de puntos por quebradas que no cortan al contorno

2.º *Las regiones están separadas por el contorno* es decir, toda quebrada que une puntos de distinta región corta al contorno.

3.° Es posible distinguir los puntos de una región, llamada *interior* de los de la otra, llamada *exterior*, por el hecho de que *toda recta que pasa por un punto interior corta al contorno* mientras *existen rectas en el exterior que no cortan al contorno*.

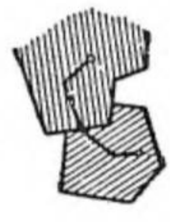
El triángulo, que es convexo, cumple estas condiciones. Si probamos pues, que al ser cierto el teorema hasta $n-1$ lados, podemos establecer una clasificación análoga para todo polígono de n lados, habremos demostrado el teorema.

Observemos ante todo, que todo polígono que cumple las condiciones anteriores cumple estas otras

Se puede unir todo punto P del contorno con todo punto $\left\{\begin{matrix}\textit{exterior}\\ \textit{interior}\end{matrix}\right\}$ *mediante quebradas cuyos puntos son todos* $\left\{\begin{matrix}\textit{exteriores}\\ \textit{interiores}\end{matrix}\right\}$ *excepto* P

De esta observación resulta

Si dos regiones convexas limitadas por contornos poligonales simples son tales que tienen parte del contorno común sin tener común ningún otro punto, el nuevo conjunto formado por ambas regiones, suprimiendo en el nuevo contorno la parte común es también conexo. Es decir que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse por una quebrada que no corta al contorno nuevo. En efecto, si los puntos pertenecen a una misma de las dos regiones componentes, el teorema es evidente; si no, basta unir ambos puntos con un tercero del contorno común mediante quebradas formadas por puntos de una y otra región. Añadiendo nuevas regiones, resulta el teorema para varias componentes.



Dado ahora un polígono simple de n lados *ABCDEFGHIJLMNOP*, circundemos sus puntos mediante el polígono convexo *ABEFGJLP*.

Llamemos polígonos *entrantes* a los *BCDE*, *GHIJ*, etc. limitados por las quebradas no comunes del polígono dado y los lados no comunes del circundante.

Convengamos en llamar *exterior* del polígono dado, al conjunto de puntos constituído por el exterior del polígono convexo y al interior de los polígonos entrantes más los puntos del contorno común. Llamemos *interior* del polígono dado al interior del convexo, exceptuados los puntos interiores a los polígonos entrantes y su contorno.

Todo punto del plano pertenece evidentemente a una de las dos regiones o al contorno; y de la propiedad anterior resulta

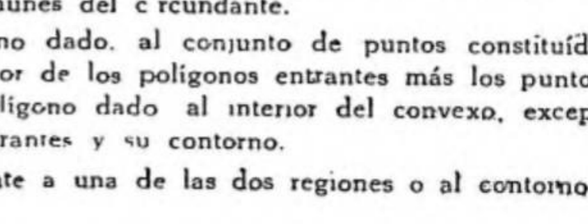
1.° *El exterior del polígono dado es conexo*, puesto que está compuesto de regiones conexas con parte de contorno común.

2.° *El exterior y el interior están separados por el contorno*, pues toda poligonal que parte de un punto interior, que es exterior de los polígonos entrantes, debe cortar al contorno de alguno de éstos para penetrar en ellos o debe cortar al contorno del polígono convexo para pasar al exterior de éste (puede también cortar a ambos).

3.° *En el exterior del polígono dado hay rectas*. Basta considerar las existentes en el exterior del polígono convexo.

Toda recta por un punto interior corta al contorno pues debiendo cortar al polígono convexo tiene puntos exteriores a él y, por lo tanto al polígono dado.

Sólo resta ahora probar la *conexión interior*. Esta quedará demostrada en cuanto logremos descomponer el recinto interior en dos polígonos simples de menos lados con un lado común. Para ello consideremos un vértice *E* común al polígono dado y al convexo circundante. El ángulo *DEF* será también ángulo del polígono convexo o interior a él, es decir en ambos casos este ángulo es convexo. La diagonal *DF* que une los vértices inmediatos es pues interior a dicho ángulo. Si el contorno del polígono dado no la corta, descompondremos éste en el triángulo *DEF* y el resto que tendrá un lado menos y será simple cumpliendo por lo tanto el teorema de Jordan.



Si el contorno corta a la diagonal DF, proyectando desde E los vértices del contorno interiores al triángulo DEF, podemos ordenar los rayos obtenidos a partir del lado ED por ejemplo, en el sentido que determina el interior del ángulo DEF. Sea EN el primer rayo y N el vértice que contiene (o el primero de ellos en el sentido EN, si hubiese varios en esta semirrecta). Esto significa que la diagonal EN, que es interior al triángulo DEF ya no es cortada por ningún lado; por lo tanto divide el interior del polígono en dos polígonos *simples* de menor número de lados.

Queda, de paso, *probado que todo polígono simple tiene una diagonal interior* (DF o EN del razonamiento).

12. COROLARIOS:

I. *Si* p_1 *es un polígono simple cuyos lados son del contorno o interiores a otro polígono simple* p. *el interior de* p_1 *pertenece al interior de* p. El interior de p_1 es, en efecto, la región conexa de puntos tales que toda recta r que pasa por uno de ellos corta al contorno de p_1, es decir, r corta al contorno de p común a p_1, o tiene puntos del contorno de p_1 interiores a p, y por tanto corta también al contorno de p.

II. *Toda quebrada simple* q, *formada por puntos interiores a un polígono simple* p *excepto los extremos que pertenecen al contorno de* p, *divide el interior de* p *en dos regiones conexas de borde común* q. En efecto, llamemos para abreviar a y b las quebradas en que queda dividido el contorno de p por los extremos de q. El interior del polígono p_1 limitado por a y q pertenece al interior de p, y lo mismo ocurre con el interior de p_2 limitado por b y q (Corolario I). Recíprocamente, los interiores de p_1 y p_2, unidos por q, forman una región conexa (v. pág. anterior) limitada por a y b, que no es otra que el interior de p

NOTAS SOBRE EL CAPITULO PRIMERO

ELECCIÓN DE CONCEPTOS PRIMITIVOS.—No se crea que en todos los sistemas de axiomas se eligen como conceptos primitivos la recta y el plano. *Pasch* y *Schur* adoptando una postura *psicológica* creyeron más intuitivas las propiedades de las regiones *limitadas* de espacio y adoptaron como concepto primitivo el *segmento* en lugar de la recta.

Este sistema, perfeccionado por *Peano*, fué el primero que se introdujo en nuestra Patria por los profesores *Alvarez Ude* (*) y *Rey Pastor;* este último lo adoptó y mejoró todavía en sus *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior.*

El desarrollo axiomático de la Geometría elemental se hace, sin embargo, sumamente prolijo con tal sistema [v., por ejemplo: *Thieme,* «Elemente der Geometrie»], razón por la cual muchos geómetras (Hilbert, Veronese, Enriques...) han preferido la adopción de la *recta* y del *plano indefinido* como conceptos primarios. Así hemos procedido nosotros también.

LOS AXIOMAS DE ORDENACIÓN DE HILBERT.—Los axiomas 1 y 2 de ordenación que hemos admitido en la lección 2.ª (siguiendo en parte a Enriques) abarcan un conjunto de proposiciones que no son independientes, pero que permiten establecer rápidamente las propiedades lineales de la recta y las superficiales del plano.

Hilbert llegó en sus *Grundlagen der Geometrie* (y después de sucesivos retoques (**)) a un sistema mínimo de axiomas de ordenación (Anordnung) que es interesante consignar. Son los siguientes:

Los puntos de una recta se relacionan por un cierto concepto «estar entre» que tiene las siguientes propiedades:

Ax. II. 1. *Si un punto* B *«está entre» dos* A *y* C *los tres puntos* A, B *y* C *son distintos y alineados, y* B *también «está entre»* C *y* A.

Ax. II. 2. *Dados dos puntos* A *y* C, *existe al menos un punto* B *de la recta* AC, *tal que* C *está entre* A *y* B.

(*) Pasch (M.): *Vorlesungen über neuere Geometrie.* (Traduc. de J. A. Ude y J. Rey Pastor.)

(**) Compárense, por ejemplo, las ediciones 1.ª y 7.ª

Ax II. 3 *Dados tres puntos de una recta no más de uno de ellos puede estar situado entre los otros dos*

Ax II. 4 *Sean* A, B *y* C *tres puntos no alineados y* a *una recta de su plano que no pasa por ninguno de ellos Si la recta* a *pasa por un punto situado entre* A *y* B *pasa también por otro punto situado entre* A *y* C *o entre* B *y* C

Para dar una idea de la sutileza de estos axiomas adviértase que en el II. 3 ni siquiera se admite el hecho de que uno de los puntos A, B o C esté entre los otros dos, sino tan sólo que no puede haber más de uno de los tres que tenga esta propiedad. La existencia efectiva de uno de ellos se demuestra mediante II. 4 Ya se comprende cuán laborioso ha de ser llegar a establecer mediante tan simples elementos el carácter linealmente ordenado y denso de la recta

En general resulta más penoso deducir las propiedades del «precede» o «sigue» a partir de las propiedades de «entre» que proceder al revés Al convencernos de ello, abandonamos el tentador sistema de Hilbert, optando por el menos científico, pero más didáctico, de la lección 2.ª

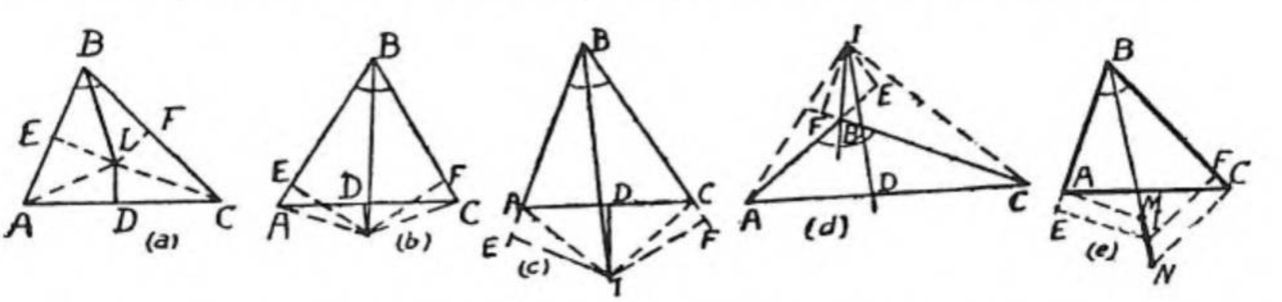
IMPORTANCIA Y NECESIDAD DE LOS AXIOMAS DE ORDENACIÓN —Es posible que algunos lectores califiquen de superfluos los axiomas establecidos (tácitamente utilizados en los tratados anteriores al moderno movimiento revisionista). Medítese no obstante en que los axiomas de ordenación son la base de la noción de *sentido* y *signo*, que tanta trascendencia tiene en la Geometría moderna Ya *Gauss* echaba de menos a comienzos del pasado siglo «nociones claramente definidas» acerca del concepto «entre» *Klein* considera como el punto más vulnerable de la obra de *Euclides* la ausencia en ella de axiomas de ordenación.

Algunos paralogismos geométricos clásicos no tienen otro fundamento que una *deficiente ordenación* de puntos en la figura Aun cuando sea adelantando conceptos, recordemos el siguiente

EJEMPLO —Sea ABC un triángulo *cualquiera* Si la bisectriz del ángulo B fuera perpendicular al lado AC el triángulo sería simétrico respecto de dicha perpendicular y por tanto isósceles.

Si la bisectriz del ángulo B no es perpendicular al lado AC cortará a la mediatriz DI de este lado, ya que estas dos rectas no serán paralelas Tracemos desde el punto I de intersección las perpendiculares IE e IF a los lados AB y BC, así como las rectas IA e IC que unen dicho punto con los vértices A y C Tanto si el punto I es interior al triángulo (figura *a*) como si es exterior (figuras *b*, *c* y *d*) tenemos $IE=IF$, $BE=BF$, por la simetría de los triángulos IBE e IBF respecto de la bisectriz BI Además, $IA=IC$, por pertenecer I a la mediatriz de AC Los triángulos rectángulos AIE y CIF son pues, iguales, y por tanto $AE=FC$, igualdad que combinada por suma en las figuras *a* y *b* y por resta en las figuras *c* y *d*, con la ya establecida $BE=BF$, da la igualdad de los lados $AB=BC$ Por último, si I coincidiera con B o con D, la mediatriz sería altura o la bisectriz mediana, y en ambos casos el triángulo es también isósceles.

En resumen, se llega a la consecuencia absurda *Todo triángulo es isósceles*.



Aun cuando parecen haberse agotado todas las hipótesis posibles acerca de la posición del punto I, se ha omitido en las figuras la única posición posible, a saber: I está necesariamente situado en el segmento MN de bisectriz, limitado por las intersecciones de la misma con las perpendiculares AM y CN a los lados BA y BC (fig. *e*), con lo cual la perpendicular IF corta al lado BC en un punto F interior a dicho lado y la otra IE corta al lado AB en un punto E de su prolongación (o al revés), de manera que subsistiendo las igualdades anteriores $BE=BF$ y $AE=CF$ la diferencia $BE-AE=AB$ no es igual a la suma $BF+CF=BC$,

Capítulo II.—CONGRUENCIA Y PARALELISMO EN EL PLANO

LECCIÓN 4.ª—MOVIMIENTO Y CONGRUENCIA

1. Concepto de movimiento.—En las lecciones anteriores hemos estudiado las relaciones de orden, separación y sentido entre los elementos geométricos que componen las figuras. Vamos ahora a introducir una relación nueva que es la clave de la teoría de la medida: la relación de *igualdad geométrica* o *congruencia*.

La realidad nos sugiere conceptos puros que en la propia realidad no existen. Así los conceptos de recta y plano, sugeridos por un rayo de luz, un estanque helado. Así también el concepto de *figura rígida* sugerido por la observación de los cuerpos «sólidos». Los únicos cambios que nuestra intuición reconoce en las figuras rígidas son cambios de posición, es decir, *movimientos*.

Vamos a estudiar los movimientos de un plano, concebido como tal figura rígida. Claro es que un movimiento, en el sentido físico, y aun vulgar, de la palabra, necesita tiempo y supone una sucesión de posiciones. Ni el tiempo ni las posiciones intermedias van a ser tenidas en cuenta en la teoría geométrica del movimiento que vamos a iniciar. *Al hablar, pues, de movimiento geométrico de un plano pensamos exclusivamente en la transformación o correspondencia que resulta entre los puntos del plano en sus dos posiciones inicial y final.*

Nuestra intuición nos dicta muchas propiedades de esta transformación que los tratadistas de todos los tiempos, empezando por Euclides, han considerado como evidentes, introduciéndolas implícitamente en sus razonamientos. Siguiendo la norma axiomática de dar forma explícita a tales intuiciones, enunciaremos los siguientes axiomas fundamentales del movimiento:

2. Axiomas de movimiento en el plano.

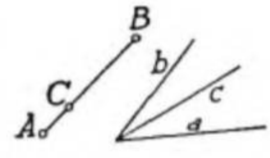
Ax. III, 1.—*Los movimientos del plano son transformaciones puntuales biunívocas del mismo.* Es decir, tales que a cada punto considerado como de la primera posición corresponde un solo punto de la segunda, punto que llamaremos *transformado* u *homólogo* del primero, y viceversa.

Ax. III, 2.—*Todo movimiento conserva las relaciones de incidencia y ordenación de puntos.*

Así, por ejemplo: Si varios puntos están en una recta y ordenados, sus transformados también están en una recta (homóloga) y ordenados.

Ax. III, 3.—*Ningún movimiento puede transformar un segmento o ángulo en una parte del mismo.*

De un modo más preciso: Si C (c) es un punto (rayo) interior al segmento AB (ángulo ab), ningún movimiento puede transformar AB en BC (ab en bc) (*).



Como las nociones de semirrecta, semiplano, ángulo convexo, etc., son consecuencia de las relaciones de incidencia y ordenación, y éstas se conservan, podemos afirmar que toda «semirrecta», «semiplano», «ángulo convexo», etc., tienen por transformados u homólogos en un movimiento, otra «semirrecta», «semiplano», «áugulo convexo», etc.

Además de los anteriores axiomas, que condensan en términos geométricos nuestra noción intuitiva de indeformabilidad y rigidez son esenciales los siguientes:

Ax III 4.—*La transformación resultante de aplicar dos movimientos sucesivos es otro movimiento.* Se llama *producto* de aquellos dos.

Ax III. 5.—*La transformación inversa de todo movimiento, es otro movimiento.* De otro modo, si existe un movimiento que transforma el plano α en α', existe otro *movimiento recíproco* que transforma α' en α.

Como el producto de dos movimientos recíprocos es la *identidad*, para que se cumpla III, 4 sin excepción *consideraremos la identidad como un caso particular del movimiento*.

3. Concepto de grupo.—*Cuando un conjunto de transformaciones es tal que contiene todas las transformaciones inversas y todas las transformaciones producto de dos cualesquiera de las del conjunto se dice que estas transformaciones «forman grupo».* Podemos, pues, resumir en uno sólo los dos axiomas anteriores, diciendo:

Ax III, 4-5.—*Los movimientos del plano forman grupo.*

4. Axioma de la determinación del movimiento. Movimientos directos e inversos.

Obtenemos un ejemplo físico de movimiento plano en el transporte de un diseño (que supondremos dibujado en una plantilla o papel transparente) sobre un papel, tela, etc., fijado a la superficie plana de la mesa.

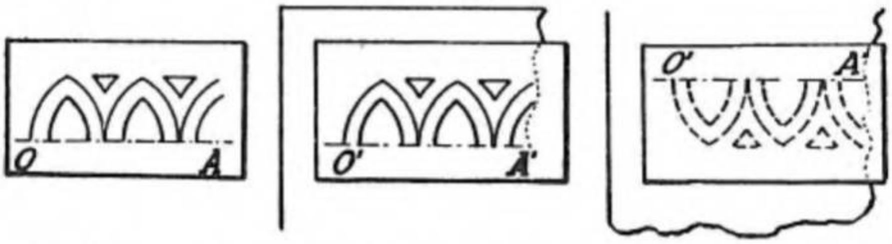
Para realizarlo se puede proceder fijando un punto O del diseño (plano móvil) sobre un punto O' del papel (plano fijo), orientando luego el diseño, es decir, llevando una semirrecta del plano móvil sobre una semirrecta del plano fijo, pero todavía cabe ambigüedad de solución en este transporte, según cual sea el semiplano en que queramos colocar el diseño en cuestión, es decir, según la cara del papel transparente que pongamos en contacto con el papel o tela. Una vez elegida esta cara el movimiento queda determinado sin ambigüedad.

Esta experiencia nos sugiere, pues, el siguiente axioma:

Ax III 6.—*Existe un movimiento y sólo uno que transforma una semirrecta en otra, y un determinado semiplano limitado por la recta primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.*

(*) No decimos «AB en AC» pues esto será consecuencia del axioma III 6 y de la existencia del movimiento idéntico.

Si los dos semiplanos que definen el movimiento caen a un mismo lado de las semirrectas respectivas, el movimiento se llamará *directo*, y en caso contrario, *inverso*.



En general: llamaremos *movimiento directo* del plano todo movimiento *que conserva el sentido del plano orientado*, y por consiguiente el sentido de todo haz, de todo contorno poligonal, así como el concepto «a la derecha de» (izquierda) de una semirrecta. (V. lección anterior.)

Llamaremos *movimiento inverso aquel que transforma el sentido del plano orientado en su opuesto.*

Para concebir físicamente un movimiento plano inverso, hay que imaginar levantado el plano y vuelto a abatir sobre su primitiva posición por la cara opuesta, como hemos indicado para el papel transparente.

Como el producto de dos movimientos *directos* es otro movimiento *directo*, resulta:

Todos los movimientos directos forman, separadamente, grupo.

Como todas las transformaciones de este grupo pertenecen a las del grupo total de movimientos, se dice que constituyen un *subgrupo* de éste. En cambio no constituyen subgrupo los movimientos inversos, ya que el producto de dos movimientos inversos es uno directo.

5. Noción de congruencia.— *Diremos que dos figuras* F *y* F′ *son* congruentes o igùales *cuando una de ellas* F′ *puede obtenerse transformando la otra* F *mediante un movimiento.*

Claro está que el movimiento recíproco transforma entonces *F′* en *F*. Abreviadamente:

Si F *es congruente con* F′, F′ *lo es con* F (propiedad recíproca).

Como el producto de dos movimientos es otro movimiento, resulta:

Si F *es congruente con* F′, *y* F′ *con* F″, F *es congruente con* F″ (propiedad transitiva).

Finalmente: *Toda figura es congruente consigo misma, en la transformación* (movimiento) *idéntica.*

La relación de congruencia tiene, pues, las mismas propiedades, idéntica, transitiva y recíproca, que tiene la igualdad, lo que justifica el uso de la palabra y del signo *igual* (=) para designarla: $F=F'$ (*).

(*) De todos modos, en los comienzos es aconsejable todavía el uso de la palabra *congruente* en evitación de confusiones. Por ejemplo, en el momento actual hay que cuidar que el principiante no confunda la *congruencia* $AB=BA$, que demostraremos en la lección siguiente (inversión del segmento), con la expresión de una *identidad*, sólo cierta entre segmentos absolutos, pero no entre segmentos ordenados o vectores. En el doble juego entre identidad y congruencia estriba el valor ilusorio de algunas demostraciones en uso, en las que interviene precisamente la inversión del segmento o del ángulo.

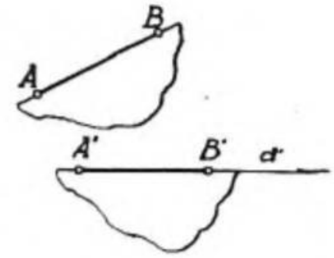
Cuando nos convenga distinguir entre la congruencia derivada de un movimiento directo, y la derivada de uno inverso, las designaremos con los mismos calificativos, diciendo, respectivamente: *Congruencia directa, congruencia inversa*

6. Conservación de la congruencia en el movimiento.—*Si dos figuras* A *y* B, *congruentes, se transforman por un mismo movimiento en otras dos* A′ *y* B′, *éstas también son congruentes entre sí*

Significa Existe un movimiento que transforma A en B' En efecto, basta aplicar sucesivamente los movimientos que transforman A' en A, A en B y B en B'

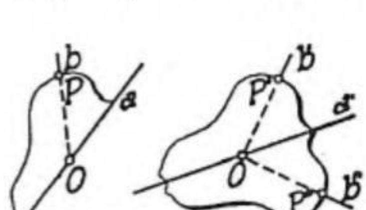
Todo movimiento es, pues, una transformación del plano que conserva, además de las relaciones de enlace y ordenación, las de congruencia Esta observación tiene la mayor importancia en la caracterización de las propiedades de la Geometría métrica

7 Transporte de un segmento, de un angulo y de una figura en general.— Dado un segmento AB y una semirrecta cualquiera a', el axioma III, 6 conduce a la posibilidad de hallar otro segmento, congruente con él, $A'B'$, situado sobre la referida semirrecta a partir de su origen A' pues basta transformar el primero mediante un movimiento que transforme la semirrecta AB en la semirrecta a'



Existen dos movimientos posibles para efectuar esta transformación (uno directo y otro inverso), pero el punto B' obtenido será el mismo en ambos, de lo contrario existirían dos segmentos $A'B'$ y $A'B''$ congruentes entre sí (propiedad transitiva) y uno parte del otro, en contradicción con el axioma III, 3.

Análogamente: Dado un ángulo ab y una semirrecta Oa', es posible hallar en cada uno de los semiplanos que ésta determina un ángulo y uno sólo $a'b'$ ($a'b''$) congruente con el dado ab, bastando para ello definir el movimiento que transforma a en a' y el semiplano ab en el semiplano $a'b'$ o $a'b''$



La determinación del segmento $A'B'$ o del ángulo $a'b'$ a que se refieren las consideraciones anteriores se llama *transporte* del segmento AB, o del ángulo ab *sobre la semirrecta* a' (y *semiplano* $a'b'$ o $a'b''$)

En general, cuando digamos *se transporta* o *se lleva* la figura F se entenderá que «*se transforma* F *mediante un movimiento*»

Para realizar prácticamente el transporte de un segmento o de un ángulo basta disponer de un *trozo de cartulina con un borde rectilíneo* en el que señalaremos los extremos del segmento o el vértice O del ángulo que se quiere transportar

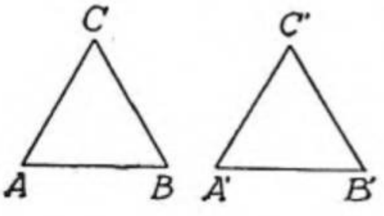
El transporte se verifica como indican las figuras Para el segmento señalaremos en el borde rectilíneo de la cartulina los extremos del segmento; y para el ángulo señalaremos en el borde rectilíneo (puesto en coincidencia con uno de los lados) el vértice O del ángulo y en el borde restante el punto P por donde asoma el otro lado.

8. Los dos primeros criterios de igualdad de triángulos.—Si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes, es decir, si existe un movimiento que transforma ABC en $A'B'C'$, en este movimiento serán congruentes los lados y los ángulos homólogos, y podremos escribir:

$$AB = A'B' \qquad AC = A'C' \qquad BC = B'C'$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A' \qquad \sphericalangle B = \sphericalangle B' \qquad \sphericalangle C = \sphericalangle C'$$

No siempre es posible, en la práctica, transportar un triángulo sobre otro para comprobar su congruencia, en cuyo caso se procura deducirla de la igualdad de sus lados y ángulos. Ahora bien, no hace falta comprobar *todas* las congruencias anteriores para asegurar la de los triángulos, como prueban los siguientes teoremas, que establecen *criterios de igualdad:*

1.^er CRITERIO.—*Si dos triángulos tienen, respectivamente, iguales dos lados y el ángulo que forman, son congruentes.*



Suponemos, por ejemplo, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

El movimiento que lleva AB sobre $A'B'$ y el semiplano que contine C sobre el que contiene C' transformará también el ángulo $\sphericalangle A$ en su congruente $\sphericalangle A'$, la semirrecta AC en la $A'C'$ y el segmento AC en su congruente $A'C'$, con lo que los tres vértices ABC se habrán transformado en $A'B'C'$.

2.º CRITERIO.—*Si dos triángulos tienen, respectivamente, iguales un lado y los dos ángulos contiguos* (AB = A'B', A = A', B = B'), *son congruentes.*

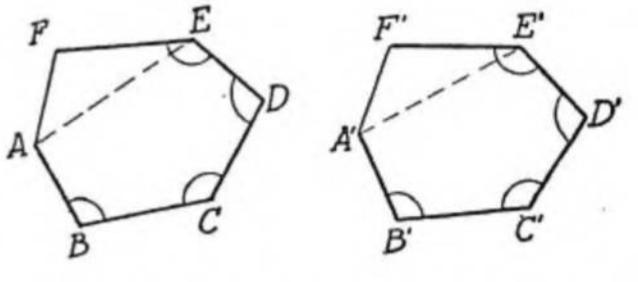
Basta transportar análogamente AB sobre $A'B'$, de modo que coincidan los semiplanos que contienen C y C'.

9. Igualdad de polígonos.—Análogamente a lo que ocurre en los triángulos, para comprobar la congruencia de dos polígonos basta comprobar la de los lados y ángulos correspondientes, excepto un lado y dos ángulos consecutivos o un ángulo y los dos lados que lo forman. Demostraremos, por ejemplo:

Si $n-1$ *lados consecutivos de un polígono y los* $n-2$ *ángulos que forman son ordenadamente iguales a los de otro, ambos polígonos son congruentes.*

Como el teorema es cierto para el triángulo, bastará probar que si es cierto para todo polígono de $n-1$ lados, lo es también para todo polígono de n lados.

Supongamos iguales los pares de lados y ángulos designados en la figura por letras iguales, excepto los lados AF y $A'F'$ y los ángulos $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle F$ y $\sphericalangle F'$. Trazando la diagonal AE y su homóloga $A'E'$, los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son congruentes por tener un lado menos y verificar la hipótesis del enunciado. Ahora bien, el movimiento que transforma el primer polígono en el segundo lleva DE sobre $D'E'$ y el semiplano $DE(A)$ sobre el $D'E'(A')$, y como $\sphericalangle E = \sphericalangle E'$ y $EF = E'F'$ llevará también F sobre F', quedando demostrado el teorema



La demostración es general, tanto si el polígono es convexo como si no lo es De ello resulta *Dos líneas quebradas son congruentes si tienen ordenadamente congruentes sus lados y los ángulos que forman cada dos lados consecutivos*

NOTAS

DIVERSOS SISTEMAS PARA LA AXIOMATIZACIÓN DE LA CONGRUENCIA —Varios son los conjuntos de axiomas ideados por los geómetras para fundamentar las propiedades de la congruencia Pero en esencia se distinguen los dos sistemas siguientes

1.er *sistema* —Partir de la noción de congruencia para las figuras más sencillas, «segmentos» «ángulos» y dar axiomáticamente sus propiedades Definir luego la congruencia de figuras como una correspondencia entre sus puntos de tal modo que sean congruentes los segmentos definidos por los pares de puntos homólogos

Tal es en esencia el camino seguido por Hilbert, Veronese, Enriques

En particular Hilbert postula con sus axiomas (*) La posibilidad del transporte del segmento y del ángulo El carácter idéntico y transitivo de la igualdad de segmentos y ángulos La aditividad de pares de segmentos iguales (si $AB = A'B'$ $BC = B'C'$ y $A'B'C'$ ordenados como A B C, es $AC = A'C'$). Finalmente admite axiomáticamente que Dos triángulos que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido tienen también iguales respectivamente los otros dos ángulos

2.º *sistema* —Adoptar como primitiva la noción general de *movimiento* y sus propiedades, como *transformación geométrica*, y definir la *congruencia* de figuras como una correspondencia en el movimiento

Tal es la vía preconizada por Klein seguida por Peano, y la que menos seguidores ha tenido hasta ahora en el terreno didáctico acaso por la renovación que imprime a la forma clásica de exposición

Este es sin embargo el camino que hemos preferido en primer lugar por parecernos más educativo para estudiantes de ingeniería y también más acordado con el panorama sintético que de la Geometría hizo el propio Klein en su famoso programa de Erlangen

Los axiomas III. 1 2 4, 5 y 6 coinciden en esencia con los de Klein y Peano Diferimos, sin embargo, fundamentalmente de Klein en el modo de tratar la traslación que éste utiliza para probar la existencia del punto medio (**) de un segmento, y diferimos del sistema de Peano en que éste antepone el axioma de continuidad a nuestro juicio prematuramente

Por ello nos vemos obligados a introducir el axioma III 3 que podría llamarse *Axioma de rigidez*

Es de advertir que aun cuando Peano consigue establecer la inversión del segmento y del ángulo mediante el axioma de continuidad no puede eludir introducir axiomáticamente la noción de rigidez al admitir entre sus axiomas que «Los movimientos que transforman un rayo en sí mismo dejan fijos todos sus puntos » (***).

(*) *Hilbert*: «Grundlagen der Geometrie»

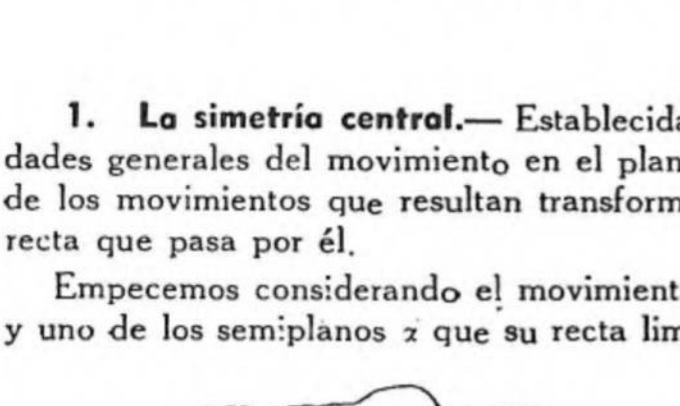
(**) *V Klein*. «Matemática elemental desde un punto de vista superior»

(***) *Berzolari* «Enciclopedia delle Matematiche elementari» Vol II Parte I Art XXI

LECCIÓN 5.ª—SIMETRÍAS Y PERPENDICULARIDAD EN EL PLANO

1. La simetría central.— Establecidas en la lección anterior las propiedades generales del movimiento en el plano, estudiemos ahora las particulares de los movimientos que resultan transformando en sí mismos un punto y una recta que pasa por él.

Empecemos considerando el movimiento que transforma una semirrecta Or y uno de los semiplanos α que su recta limita, en la semirrecta y el semiplano opuestos: Or' y α'. Este movimiento es *directo*, pues los semiplanos quedan ambos a la izquierda (o ambos a la derecha) de las semirrectas correspondientes.



Llamaremos al movimiento así definido, *simetría central* con *centro* O. Dos figuras transformadas una de otra en esta simetría se llamarán *simétricas entre sí* respecto de O.

Aplicando esta transformación dos veces consecutivas, el movimiento resultante es la identidad (*único* movimiento que transforma Or y α en sí mismos, Ax. III, 6); por lo tanto, si el punto A (la recta a) se transfoma en A' (a'), el punto A' (la recta a') debe transformarse en A (a); pues sólo así puede producirse la identidad al repetir la transformación. Se expresa este hecho diciendo *Los elementos* (puntos, rectas, ...) *homólogos en la simetría se corresponden doblemente.*

En general, toda transformación cuyos elementos homólogos se coresponden doblemente, o lo que es lo mismo, cuyo producto por sí misma (cuadrado) sea la identidad, se llama transformación *involutiva*. Así, pues:

La simetría central es un movimiento directo involutivo del plano.

Del mismo modo que r y r', *toda semirrecta* a *de origen* O *tiene también por simétrica* a' *su opuesta;* de lo contrario, se corresponderían en el movimiento dos ángulos $ar'a'$ y $a'ra$, uno cóncavo y otro convexo. Por consiguiente:

Todas las rectas que pasan por el centro se transforman en sí mismas. Por lo cual se llaman *dobles.*

Dos puntos simétricos A *y* A' *están alineados con el centro* O, *y a distinto lado de él, verificándose* OA=OA'.

Un ángulo con vértice en el centro de simetría se transforma en su opuesto por el vértice. De donde:

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales

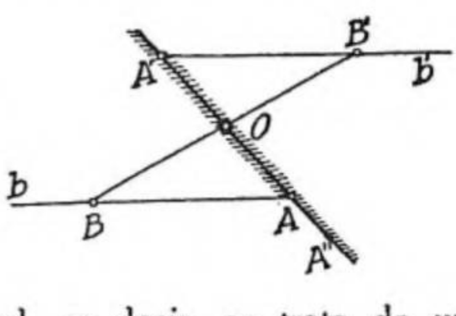
2. Propiedad de las rectas simétricas respecto de un centro.—Consideremos trazadas por los puntos simétricos A y A', dos rectas simétricas b y b' distintas de AA'. Ambas forman con ésta ángulos congruentes señalados en la figura. Es fácil ver que estas rectas no pueden cortarse; pues si se cortaran, al punto M de intersección de b y b' correspondería otro punto simétrico M', distinto de M, intersección de las rectas simétricas b' y b, que son las mismas. Las dos rectas tendrían, pues dos puntos comunes y habrían de coincidir, contra lo supuesto.

Se nos presenta, pues, por vez primera, la existencia en nuestro plano de rectas que no tienen punto alguno común. *Las rectas de un plano que no tienen ningún punto común se llaman paralelas*

Podemos, pues, enunciar: *Dos rectas simétricas que no pasan por el centro de simetría son paralelas.*

De aquí: *Las únicas rectas dobles son las que pasan por el centro*

3. Primera inversión del segmento.—Dados dos puntos A y A', estudiemos el movimiento *directo* que transforma la semirrecta AA' en la $A'A$, y, por tanto, A en A'. Es fácil ver que A' se transformará en A, pues si fuese otro punto A'' el transformado, serían congruentes los segmentos AA' y $A'A''$, uno de ellos parte del otro, en contradicción con el axioma III, 3.



Este movimiento invierte, pues, los extremos del segmento. Aplicado dos veces, se obtiene como movimiento resultante la identidad, es decir, se trata de un movimiento *involutivo*.

Fácil es ver que es una *simetría central*. Llevemos, en efecto, a partir de A y A', y en dos semiplanos correspondientes (es decir, a un mismo lado de las semirrectas homólogas), dos rayos b y b', que formen con AA' ángulos congruentes, y sobre estos rayos llevemos dos segmentos congruentes $AB = A'B'$. Los puntos B y B' obtenidos se corresponden (doblemente) en este movimiento, y la recta BB' es doble, como AA'. El punto de intersección O (que existe por estar B y B' a distintos lados de AA') es un punto también *doble*, y por tanto, $OA = OA'$, $OB = OB'$. En resumen, obtenemos todas estas consecuencias:

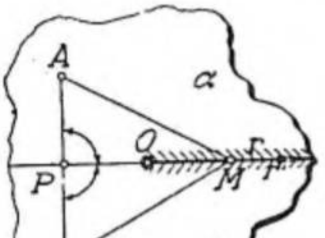
Dado un segmento AA' *existe un punto* O *que le divide en dos partes iguales.* Se llama *punto medio* de AA'.

Existe un solo movimiento directo que invierte los extremos de un segmento dado. Es la *simetría central* respecto al punto medio.

Todo movimiento directo del plano que transforma una recta en sí misma, invirtiendo su sentido, es una simetría central con centro en ella.

4. Unicidad y construcción del punto medio.—La unicidad del movimiento definido en el párrafo anterior (ax. III, 6) indica la *unicidad del punto medio* Su construcción puede efectuarse con la cartulina de un borde rectilíneo que nos sirvió para *transportar segmentos y ángulos*, pues en el razonamiento anterior solamente han sido utilizadas estas dos operaciones, combinadas con el trazado de una recta por dos puntos

5. La simetría axial. Perpendicularidad. Mediatriz y bisectriz.—Consideremos ahora el movimiento que deja invariable una semirrecta Or cambiando los semiplanos que determina α y α'. Llamaremos a esta transformación *simetría axial* que tiene por *eje* la recta r. Dos elementos o figuras correspondientes se llamarán *simétricos entre sí*



En este movimiento *todo punto* M *del eje se transforma en sí mismo*, pues si se transformara en otro M' serían congruentes dos segmentos OM y OM'. uno parte del otro. en contra del axioma III, 3 Aplicando dos veces la transformación resulta la identidad por lo tanto se trata también de un movimiento *involutivo* en el que los elementos se corresponden doblemente

En consecuencia, si los puntos A y A' son simétricos, la recta AA' tiene por simétrica la $A'A$, es decir, ella misma. El ángulo OPA, que forma con r, se transforma en su adyacente OPA', siendo $\sphericalangle OPA = \sphericalangle OPA'$. Son asimismo congruentes $PA = PA'$, $\sphericalangle OMA = \sphericalangle OMA'$; es decir, el punto P es punto medio de AA', y la recta OM divide al ángulo AMA', cuyos lados son simétricos, en dos ángulos iguales

Llamaremos *ángulo recto* a todo *ángulo igual a uno de sus adyacentes* Las rectas que lo forman se llaman *perpendiculares* Toda perpendicular en el punto medio de un segmento se llama *mediatriz del mismo*. Un rayo que divida un ángulo en dos iguales se llama *bisectriz del ángulo*

Con estas definiciones podemos condensar las propiedades de la simetría axial en estos términos:

Todos los puntos del eje, y sólo ellos, son dobles

El eje y todas las rectas perpendiculares a él son las únicas rectas dobles

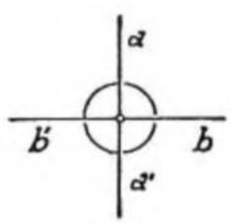
El eje es mediatriz del segmento que determinan dos puntos simétricos cualesquiera, no situados en él

Si una recta corta al eje, su simétrica le corta en el mismo punto y este eje es bisectriz de los ángulos que forman las semirrectas simétricas

Una figura simétrica de sí misma (doble) respecto de un eje o centro se dice que tiene este eje o centro de simetría Obsérvese que una figura puede ser doble sin serlo todos sus puntos

6. Propiedades de la perpendicularidad.—Los cuatro ángulos que forman dos rectas perpendiculares son iguales, dos adyacentes por definición, los otros dos por serles opuestos por el vértice. Si una recta es eje de simetría de otra, ésta lo es, pues, también de la primera. *La perpendicularidad es*, en resumen, *una relación recíproca.*

La unicidad del movimiento (simetría) que cada uno de estos ejes define, prueba que: *Por un punto de una recta no pasa más que una perpendicular a ella.* De aquí: *La mediatriz de un segmento es única.*



En virtud de las propiedades de la simetría, toda perpendicular a una recta por un punto exterior A pasa también por su simétrico A' que es único, luego (Ax. I. 3).

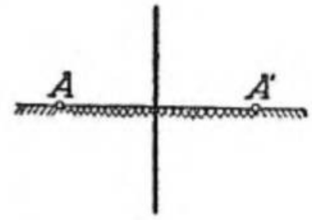
Por un punto exterior P *a una recta no pasa más que una perpendicular a ella*

Como la igualdad y la ordenación se conservan en el movimiento, resulta:

La perpendicularidad (igualdad de ángulos adyacentes) *se conserva en todo movimiento.*

Todos los ángulos congruentes con uno recto son rectos; y recíprocamente: *Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.* Esto justifica teóricamente el uso de la escuadra.

7. Segunda inversión del segmento.—Dado el segmento AA', estudiemos el movimiento *inverso* que transforma la semirrecta AA' en la $A'A$. Como la derecha de AA' coincide con la izquierda de $A'A$, se transforman en sí mismos los semiplanos limitados por la recta.

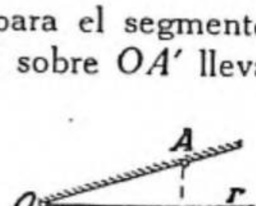


Sabemos por el ax III, 6 que existe un solo movimiento que efectúa esta transformación. Ahora bien, la simetría que tiene por eje la mediatriz de AA' cumple este requisito; luego es el movimiento pedido. En resumen:

Dado un segmento, existe un movimiento inverso del plano, y uno sólo, que invierte sus extremos Es la *simetría axial cuyo eje es la mediatriz del segmento.*

Todo movimiento inverso del plano que transforma una recta en sí misma, invirtiendo su sentido, es una simetría axial respecto de un eje perpendicular a ella.

8. Inversión del ángulo.—Análogamente a lo dicho para el segmento, dado un ángulo AOA', el movimiento *inverso* que lleva OA sobre OA' llevará OA' sobre OA (de lo contrario se corresponderían dos ángulos, uno parte del otro, en contradicción con el ax. III, 3). Al corresponderse doblemente estas semirrectas, se corresponderán doblemente dos segmentos congruentes OA y OA' tomados sobre ellas, y, por lo tanto, los puntos A y A', con lo que estamos en el caso anterior



Es decir, el movimiento es la simetría axial que invierte el segmento AA' y cuyo eje, mediatriz de AA', contendrá el punto doble O, y será bisectriz del ángulo dado AOA'. En resumen:

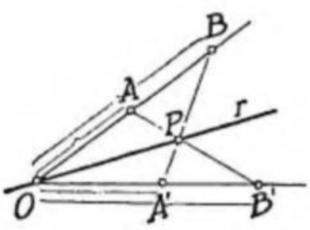
Dado un ángulo, exste un movimiento, y sólo uno, que invierte sus lados. Es la *simetría axial* respecto de la *bisectriz.*

La existencia y unicidad de este movimiento prueban la *existencia y unicidad de la bisectriz.*

9. Movimiento inverso del plano con un punto fijo.—Llegamos así a la interesante consecuencia siguiente:

Todo movimiento inverso del plano con punto fijo O *es una simetría axial cuyo eje pasa por* O. Basta suponer, en efecto, que OA y OA' son dos semirrectas correspondientes en el movimiento, y aplicar el razonamiento anterior.

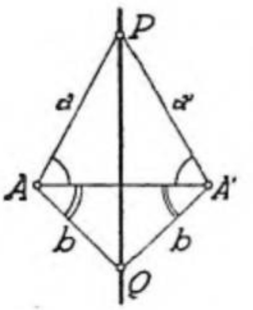
10. Construcción de la bisectriz de un ángulo.— Para construir la bisectriz de un ángulo dado bastará hallar el eje de la simetría que lo invierte, del cual se conoce un punto O. Con otro punto doble P tendremos pues suficiente. Este se hallará por intersección de dos rectas homólogas AB' y $A'B$ obtenidas uniendo dos pares de puntos homólogos fáciles de construir tomando en ambos lados $OA' = OA$, $OB' = OB$. Para realizar materialmente esta operación basta, como antes, hacer uso de la cartulina de un borde rectilíneo.



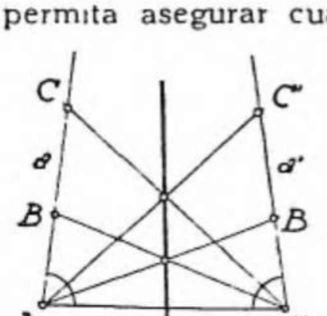
Es fácil demostrar que AB' y $A'B$ se cortan. Si, por ejemplo, A' es interior a OB' será análogamente A interior a OB (ax. III, 2) y por tanto B exterior a OA. La recta $A'B$ separa así los puntos O, B' y no separa A, O, luego separa forzosamente AB' (v. lección 2, § 6).

11. Construcción de la mediatriz de un segmento.—Con la misma cartulina, utilizada como regla y como transportador de ángulos podemos construir la mediatriz de un segmento dado AA'.

En efecto, trazaremos por A y A' dos semirrectas simétricas a y a' tomando a un mismo lado de AA', y a partir de dicha recta, dos ángulos iguales. Si estas rectas se cortan, su intersección da un punto P del eje. Repitiendo la construcción podemos hallar otro punto Q de éste y construir así la mediatriz.

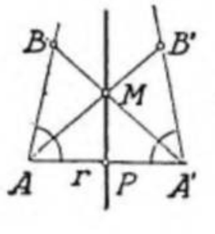


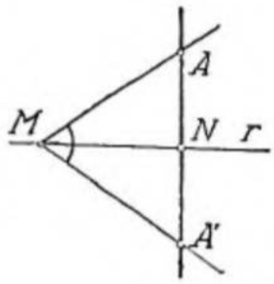
Prácticamente esto es suficiente, pues la intuición nos permite elegir ángulos que aseguran la intersección de las semirrectas homólogas, aun dentro de los límites del dibujo. Pero como carecemos todavía de un criterio teórico que permita asegurar cuando estas dos semirrectas se cortan, es *preferible teóricamente* esta otra solución.



Construídas dos semirrectas simétricas, a y a' del modo anterior, llevemos sobre ellas a partir de A y A' dos pares de segmentos congruentes $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Si a y a' no se cortan a no separa A' y B', de donde las semirrectas AA', AB' y a, están en este orden en el ángulo $A'AB$, es decir, AB' es interior al ángulo y, por tanto corta a $A'B$. La intersección de estas dos rectas simétricas AB' y $A'B$ es un punto de la mediatriz y análogamente la intersección de CA' y AC'.

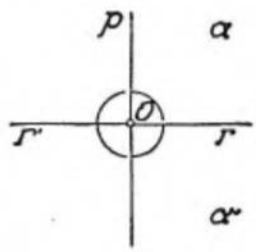
12. Construcción de perpendiculares.—La construcción de la perpendicular a una recta r por uno de sus puntos P puede reducirse a la construcción anterior llevando a uno y otro lado de P dos segmentos congruentes PA y PA'. Como P pertenece a la mediatriz, basta hallar otro punto M de ella.





El trazado de la perpendicular por un punto exterior A se reduce a la construcción del simétrico A' respecto a la recta dada r como eje de simetría. Para ello podemos trazar una recta cualquiera AM que corte al eje r y su simétrica MA' (mediante $\sphericalangle NMA' = \sphericalangle NMA$), llevando sobre ella $MA' = MA$.

13. Simetrías conjugadas.— Dado un punto O y una recta rOr' que pasa por él, dividiendo el plano en dos semiplanos α y α', podemos como resumen de lo dicho, considerar los siguientes movimientos únicos que transforman en sí mismos el punto y la recta:



1.° El movimiento *directo* que transforma la semirrecta Or y el semiplano α en sí mismos. Es la *identidad*.

2.° El movimiento *directo* que transforma Or y α en sus opuestos. Es la *simetría central* con centro O.

3.° El movimiento *inverso* que conserva Or y transforma α en su opuesto α' Es la *simetría axial* con eje en dicha recta.

4.° El movimiento *inverso* que transforma Or en Or' conservando los semiplanos. Es la *simetría axial* respecto de la perpendicular p a r por O.

Evidentemente, el producto de dos o más movimientos de éstos da como resultado un movimiento que deja invariables la recta y el punto, es decir, otro de los cuatro. Por lo tanto: *Estos cuatro movimientos forman un subgrupo.* El lector obtendrá fácilmente las transformaciones que resultan de multiplicar cada dos de las mencionadas. En particular:

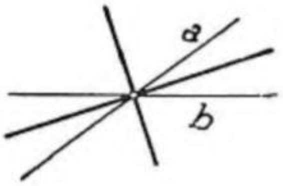
El producto de dos simetrías respecto de dos ejes perpendiculares es la simetría central respecto del punto de intersección.

El producto de una simetría central por otra axial respecto de un eje que pasa por el centro, es otra simetría axial respecto del eje perpendicular, por dicho centro.

LECCIÓN 6.ª—SOBRE LAS PROPOSICIONES GEOMÉTRICAS
CONCEPTO DE LUGAR GEOMÉTRICO

Veamos algunas propiedades de figuras simetricas

1. Bisectrices de ángulos adyacentes y de opuestos por el vértice.— En la simetría central que tiene por centro el punto de intersección de dos rectas secantes *ab*, se corresponden los ángulos opuestos por el vértice, y, por tanto sus bisectrices (v lecc 4) De donde

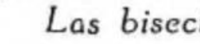


Las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice son semirrectas opuestas

Los cuatro ángulos tienen, pues, sus bisectrices en dos rectas Como cada una de ellas es eje de simetría del par de rectas dado, es también eje de las otras bisectrices, y por lo tanto

Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares

2. Propiedades del triángulo isósceles.— Llámase triángulo *isósceles* al que tiene dos lados iguales (del griego σκέλος – pierna, ἴσος = igual) El tercero se llama *base* En la figura, por ejemplo, el triángulo isósceles *ACB* tiene los lados *CA* y *CB* iguales, y desigual la base *AB*

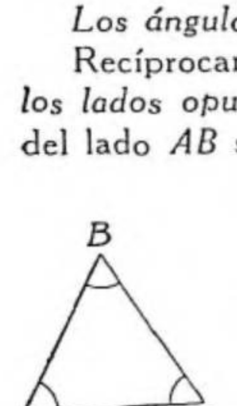


La simetría respecto de la bisectriz del ángulo *ACB* transforma *CA* en *CB* y el triángulo en sí mismo, es decir, esta bisectriz es eje de simetría del triángulo. De donde

La bisectriz del ángulo opuesto a la base de un triángulo isósceles es también mediatriz de dicha base

Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales

Recíprocamente: *Si dos ángulos A y B de un triángulo ABC son iguales los lados opuestos a aquellos ángulos son también iguales* Pues la mediatriz del lado *AB* será eje de simetría de la figura



3. Triángulo equilátero.— Llámase triángulo *equilátero* a todo aquel que tiene los tres lados iguales De las propiedades del triángulo isósceles resulta

Los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales Recíprocamente

Si los tres ángulos de un triángulo son iguales es equilátero.

4. La mediatriz como lugar geométrico.—Si un punto C determina con otros dos A y B dos segmentos iguales AC y BC, diremos que C «*equidista*» de A y B (*). La simetría del triángulo isósceles ABC nos dice:

Todo punto C *equidistante de otros dos* A *y* B *está en la mediatriz del segmento* AB *que éstos determinan.* Y recíprocamente: *Todo punto* C *de la mediatriz de un segmento* AB *equidista de sus extremos.*

Cuando una figura contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad, y, recíprocamente, *sólo contiene puntos que la cumplen, se dice que es el «lugar geométrico» de dichos puntos.*

Así, pues, *la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de sus extremos.*

5. Teoremas recíprocos y contrarios.—Venimos repitiendo con frecuencia, en ésta y en anteriores lecciones el término: «*Recíprocamente*», cuyo significado, aun supuesto conocido de los lectores, no estará de más precisar.

El enunciado de todo teorema consta de una premisa llamada *hipótesis*, que expresa lo que se *supone* se verifica, y de una conclusión, llamada *tesis*, que expresa lo que se *demuestra* que se verifica. Ejemplo: Si C equidista de A y B (hipótesis), C está en la mediatriz de AB (tesis).

Dos teoremas se llaman *recíprocos*, cuando la tesis del uno es la hipótesis del otro y viceversa. *La certeza de un teorema no implica la certeza del recíproco.*

Acabamos de ver varios ejemplos de teoremas recíprocos conjuntamente ciertos. En cambio, el teorema cierto: «Si dos triángulos son congruentes sus ángulos son respectivamente iguales» tendría un recíproco falso: «Si dos triángulos tienen respectivamente iguales sus ángulos, son congruentes».

Dos teoremas se llaman *contrarios* cuando la hipótesis y la tesis del uno son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro. *La certeza de un teorema no implica la del contrario.*

Ejemplo: Teorema contrario del anterior: «Si dos triángulos no son congruentes, sus ángulos no son respectivamente iguales» (falso).

6. Teoremas contrarrecíprocos. Demostraciones por reducción al absurdo.—Dos teoremas se llaman *contrarrecíprocos* cuando cada uno de ellos es el contrario del recíproco (o recíproco del contrario) del otro.

Para formar un enunciado contrarrecíproco de uno dado, habrá, pues, que negar la hipótesis y la tesis e invertirlas. Ejemplo contrarrecíproco del teorema anterior: «Dos triángulos que no tienen sus ángulos respectivamente iguales no son congruentes.» En efecto, si lo fueran, tendrían sus ángulos respectivamente iguales, contra lo supuesto. El razonamiento es completamente general: *Dos teoremas contrarrecíprocos son equivalentes.*

Supuesto demostrado que: *Si se verifica* H *se verifica* T queda probado el contrarrecíproco: *Si no se verifica* T *no se verifica* H.

(*) Más adelante quedará justificada la etimología de esta palabra.

Pues si se verificara H se verificaría T, contra lo supuesto.

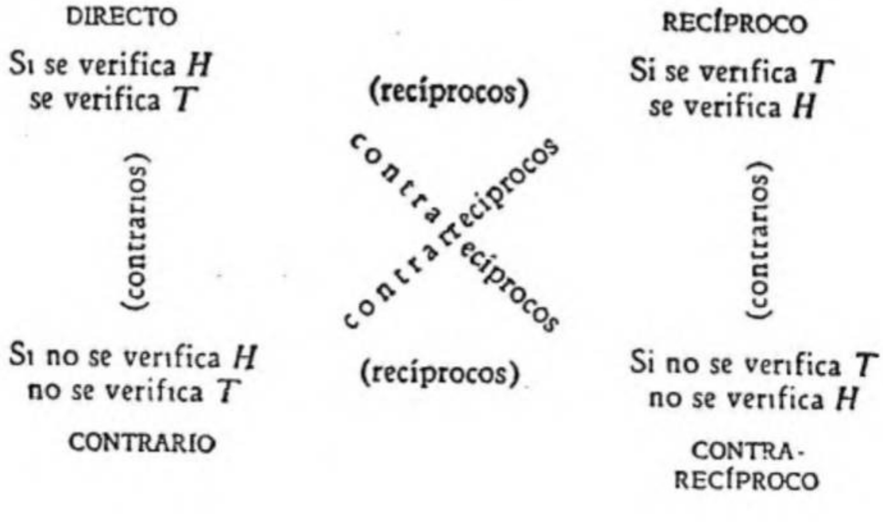
De la misma manera razonará el lector para probar la certeza del primer teorema, supuesto cierto el segundo.

Es muy frecuente en Matemáticas demostrar un teorema probando su contrarrecíproco. Este modo de demostración se llama *demostración por reducción al absurdo.*

Ejemplo: Hemos demostrado en la lección anterior que: «Si dos rectas simétricas respecto de un centro no coinciden, son paralelas», probando que si tuvieran algún punto común (negación de la tesis) habrían de coincidir (negación de la hipótesis).

7. Esquema lógico de las relaciones entre teoremas recíprocos, contrarios y contrarrecíprocos.—En el cuadro siguiente están condensadas esquemáticamente las relaciones lógicas entre un teorema, su recíproco, su contrario y su contrarrecíproco.

Si son ciertos dos teoremas de una misma horizontal (recíprocos) o vertical (contrarios) serán también ciertos los otros dos (contrarrecíprocos de ellos)



Por lo tanto Para asegurar la certeza de las cuatro proposiciones basta demostrar la directa y la recíproca, o la directa y la contraria

8. Condiciones necesarias y suficientes.—Muchas veces se enuncian en Matemáticas los teoremas hablando de *condiciones necesarias y suficientes* Volvamos a la propiedad de la mediatriz:

Si un punto está en la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos

Esta proposición puede expresarse diciendo:

1.° *Es suficiente* que el punto esté en la mediatriz del segmento para poder afirmar que equidista de sus extremos

2.° Siempe que ocurra lo primero, tiene *necesariamente* que ocurrir lo segundo Por tanto, la equidistancia de los extremos es una *condición necesaria* para que el punto esté en la mediatriz

De un modo general, todo teorema: «Si se verifica *H* se verifica *T*» puede enunciarse de estas dos maneras: 1.ª *La hipótesis* H *es una condición suficiente para que se verifique la tesis* T. 2.ª *La tesis* T *es una condición necesaria para que se verifique la hipótesis* H.

Si, pues, se demuestran un teorema directo y su recíproco (o su contrario) podemos resumirlos en un solo enunciado diciendo: H *es condición necesaria y suficiente para que se verifique* T, o *bien* T *es condición necesaria y suficiente para que se verifique* H. O bien por último: T *y* H *son equivalentes.*

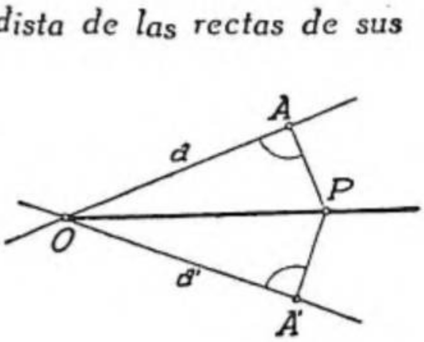
En resumen: *Para demostrar que una condición es necesaria y suficiente hay que demostrar dos teoremas recíprocos entre sí o dos contrarios entre sí.*

Tal ocurre, en particular, para demostrar que una línea es lugar geométrico de los puntos que cumplen una cierta propiedad, como hemos tenido ocasión de observar anteriormente.

9. La bisectriz como lugar geométrico.— Después de este breve paréntesis metodológico, volvamos a nuestro estudio de propiedades derivadas de la simetría.

Si al trazar las perpendiculares *PA* y *PA'* desde un punto *P* a dos rectas *a* y *a'*, este punto equidista de los de intersección obtenidos, *A* y *A'*, es decir, si *PA* = *PA'*, *diremos que* P *equidista de las rectas* a *y* a' (*).

Todo punto P *de la bisectriz de un ángulo equidista de las rectas de sus lados.* Pues en la simetría respecto de esta bisectriz las perpendiculares son simétricas, y por tanto, también las intersecciones *A* y *A'*; de donde *PA* = *PA'*. Para que sea cierto el recíproco es preciso añadir una condición:



Todo punto INTERIOR A UN ÁNGULO *que equidista de las rectas de sus lados está en la bisectriz del mismo* Pues si *PA* = *PA'*, en la simetría que invierte el ángulo *APA'* serán simétricos los puntos *A* y *A'* y las perpendiculares respectivas *OA* y *OA'* que forman los lados del ángulo; y como el eje *PO* es *interior* a dicho ángulo le divide en dos iguales, siendo su bisectriz.

De estos dos teoemas resulta: *El lugar geométrico de los puntos, interiores a un ángulo, equidistantes de las rectas de sus lados, es la bisectriz del mismo.*

Al no agregar la condición de ser *P* interior, resultan también equidistantes los puntos de las bisectrices de los ángulos adyacentes y del opuesto por el vértice, obteniéndose:

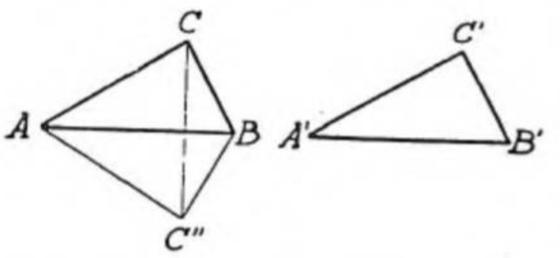
El lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de dos rectas secantes es el conjunto de las dos rectas perpendiculares formado por las bisectrices de los cuatro ángulos que aquellas determinan.

(*) Más adelante quedará también justificada la etimología de este término.

10. Tercer criterio de igualdad de triángulos.—*Si dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres lados, son congruentes.*

Sean ABC y $A'B'C'$. Suponemos $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$

Quedará el teorema demostrado si probamos que uno de ellos es congruente con un simétrico del otro. Para ello basta aplicar al triángulo $A'B'C'$, por ejemplo, un movimiento que lleve $A'B'$ sobre AB y tal que el semiplano que contiene C' quede a distinto lado de C. Sea ABC'' el triángulo transformado. En virtud de la hipótesis, es $AC = A'C' = AC''$, luego A equidista de C y C'', y análogamente B. AB es, pues, la mediatriz de CC'' y en la simetría respecto de dicha mediatriz son simétricos los triángulos ABC y ABC'', con lo que queda demostrado el teorema.



NOTAS

Condición suficiente mínima.—Con alguna frecuencia se habla en Matemáticas de la condición necesaria y suficiente A para que se verifique T, entendiendo por tal una condición necesaria y *suficiente mínima*. Precisemos este término

Una condición B suficiente para que se verifique T es superabundante cuando existe otra condición A, también suficiente, contenida en B. Una condición A se llamará suficiente *mínima* cuando no sea superabundante es decir, cuando toda otra condición A' contenida en A ya no implique T.

Ejemplo· Desde un punto de vista estrictamente lógico no cabe duda que *Es condición necesaria y suficiente para que una recta esté en un plano que tenga tres puntos en él*, puesto que toda recta con tres puntos en un plano está contenida en él y recíprocamente si la recta está en el plano tiene tres puntos en él. Sin embargo, esta condición es superabundante pues basta con que la recta tenga *dos* puntos en el plano para que esté contenida en él. En el lenguaje vulgar repugnaría llamar necesaria a una condición superabundante. En el lenguaje matemático se suele expresar (aunque imperfectamente) la suficiencia mínima indicada diciendo La condición necesaria y suficiente para que una recta esté en un plano es que tenga *dos* puntos en él

Recíprocos parciales de un teorema.—Ocurre muchas veces que la hipótesis de un teorema es múltiple, es decir, encierra varias condiciones como por ejemplo un teorema de la forma

«Si se verifican H_1 H_2, H_3 se verifica T»

de tal suerte que el recíproco estricto «si se verifica T se verifican H_1 H_2 H_3» no es cierto. En cambio puede ser cierto que al verificarse la tesis conjuntamente con alguna o algunas de las hipótesis parciales se verifiquen las demás. Por ejemplo

«Si se verifican T y H_1 se verifican H_2 y H_3»

o bien

«Si se verifican T y H_2, H_3 se verifica H_1»

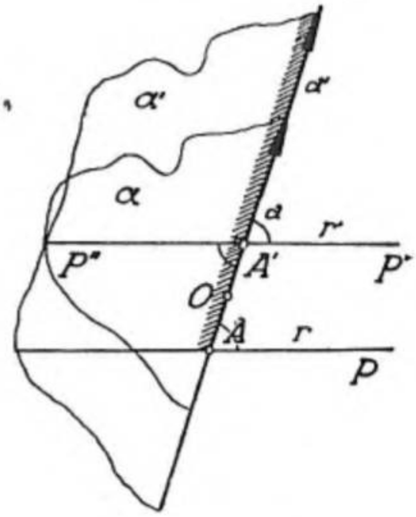
A estos teoremas se les suele llamar también *recíprocos* (parciales) del antes enunciado, de modo que un mismo teorema puede tener varios *recíprocos parciales*, según las combinaciones que se efectúen con las hipótesis. Ejemplos de tales recíprocos hallará el lector más adelante por ejemplo, en las propiedades del paralelogramo

LECCIÓN 7.ª—LAS TRASLACIONES Y EL PARALELISMO

1.—Definición de traslación.—Dados dos puntos A y A' del plano, consideremos, en la recta que definen, la semirrecta AA' que llamaremos a y la semirrecta a' del mismo sentido y origen A'.

El movimiento que transforma una semirrecta en otra conservando los semiplanos del mismo lado, se llama *traslación*.

Una traslación viene, pues, definida por dos puntos homólogos A y A' dados en un orden, o lo que es lo mismo, por un vector $\overrightarrow{AA'}$.



La traslación recíproca restituye el plano a su primitiva posición.

Los dos vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{A'A}$ se llaman *opuestos*. La recta AA' se transforma en sí misma en una y otra traslación, y se llama *guía*.

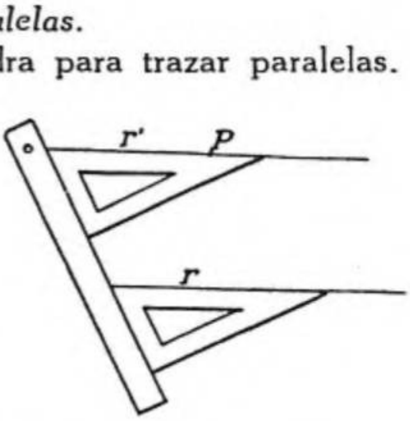
2. Rectas homólogas en la traslación.—Consideremos trazadas por dos puntos homólogos cualesquiera de la guía A y A' dos semirrectas r y r' correspondientes en la traslación. El ángulo ar se transforma en $a'r'$, de donde:

Dos rectas homólogas forman ángulos iguales con la guía.

Si $P''A'A$ es el ángulo opuesto por el vértice a $a'r'$ se tendrá $\sphericalangle P''A'A = \sphericalangle A'AP$, y podemos hacer coincidir estos ángulos mediante la simetría con centro en el punto medio O de AA'. Las rectas r y r' homólogas en la traslación son, pues, también simétricas respecto de O, y recordando la propiedad de las rectas simétricas:

Dos rectas homólogas en una traslación son paralelas.

Esto justifica el uso del juego de regla y escuadra para trazar paralelas. La regla materializa la guía de la traslación, y la escuadra, a ella adosada, materializa un triángulo del plano móvil.



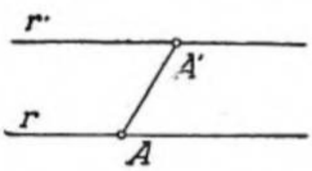
Para trazar por un punto P una paralela a la recta r no hacemos más que realizar una traslación que tansforme r en otra recta r' que pase por P. La experiencia prueba que esta paralela r' es la misma cualquiera que sea la traslación utilizada. Pero éste es un hecho que no puede demostrarse mediante los axiomas establecidos, y que admitiremos como un axioma nuevo, enunciándolo así:

3. Axioma del paralelismo.

Ax. IV.—*Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella* (*).

De este axioma se desgranan las siguientes consecuencias:

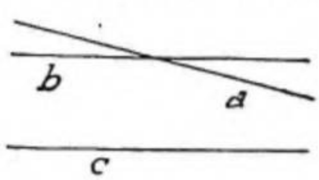
Dos rectas paralelas r *y* r′ *son homólogas en toda traslación definida por un par de puntos cualesquiera* A *y* A′, *respectivamente situados en una y otra.*



En efecto, la recta homóloga de r en esta traslación es también paralela a r, luego coincide con r'.

En consecuencia: *Estas rectas son también homólogas en la simetría central respecto al punto medio de* AA′.

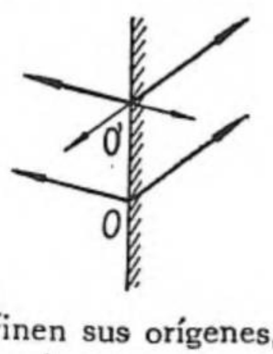
Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí (propiedad transsitiva del paralelismo). Pues si se cortaran, por el punto de intersección pasarían dos paralelas a la tercera recta.



Si una recta a *corta a otra* b *corta también a todas sus paralelas.* De lo contrario tendríamos por un punto dos paralelas a y b a una tercera recta c (paralela a b).

Un conjunto de rectas paralelas se dice que *tienen la misma dirección*

4. Angulos de lados paralelos.—Dos semirrectas no alineadas, pertenecientes a rectas paralelas se dice además que tienen *el mismo sentido* (sentidos opuestos), cuando están ambas a un mismo (distinto) lado de la recta OO' que une los orígenes.



Si tienen, pues, el mismo sentido, la traslación OO' transforma una en otra, y si tienen sentidos opuestos transforma una en la opuesta a la otra. De donde:

Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo (opuesto) *sentido, son iguales.* Puesto que se corresponden en la traslación que definen sus orígenes, o se corresponde uno de ellos con el opuesto por el vértice al otro.

5. Trayectorias en las traslaciones.—El producto de dos traslaciones con una misma guía es, evidentemente, otra traslación con dicha guía. y como dos traslaciones recíprocas tienen la misma guía, si admitimos la identidad como traslación nula resulta: *Todas las traslaciones con una misma guía forman grupo.*

Consideremos ahora los homólogos A', A'', A''', ... de un mismo punto A en todas las traslaciones de este grupo; el lugar geométrico de estos puntos se llama *trayectoria* del grupo.

Las trayectorias de un grupo se transforman en sí mismas en toda transformación del grupo. En efecto, al aplicar una transformación del grupo a un punto A', cualquiera de una trayectoria, se obtiene, por definición de

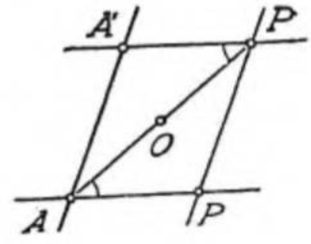
(*) La necesidad de un axioma para fundamentar la teoría del paralelismo fué advertida por *Euclides*, cuyo postulado fué enunciado en otra forma que expondremos más adelante.

grupo, otro punto A'' transformado del A, es decir, un punto de la misma trayectoria.

Para estudiar la naturaleza de las trayectorias de las traslaciones con una misma guía, demostremos el siguiente teorema:

Dos puntos homólogos P *y* P' *en una traslación* AA' *determinan un segmento* PP' *igual y paralelo al segmento* AA'.

En efecto, por ser la recta AP homóloga y, por tanto, paralela a la $A'P'$ pueden hacerse coincidir en la simetría respecto del punto medio O de AP' En esta simetría son simétricos los *ángulos* $AP'A'$ y $P'AP$, los segmentos $P'A' = AP$ y, por tanto, también los puntos A' y P' así como los segmentos $A'A$ y $P'P$, por unir pares de puntos homólogos, lo que prueba su igualdad y paralelismo. En consecuencia:



Todos los homólogos de un punto P *en las distintas traslaciones que tienen por guía una recta* a, *están en la paralela a dicha guía por* P. Recíprocamente: Si P' está en dicha paralela, trazando por él la secante $P'A'$ a la guía y su paralela PA por P, la traslación AA' transforma P en P'. En resumen:

Las trayectorias del grupo de traslaciones con una misma guía son rectas paralelas a ella. Como estas rectas se transforman en sí mismas, *cualquiera de ellas puede,* pues, *servir de guía* de dichas traslaciones y, por lo tanto *la traslación* $\overrightarrow{AA'}$ *coincide con la traslación* $\overrightarrow{PP'}$.

6. Grupo de las traslaciones del plano.—El resultado anterior es de la mayor importancia, pues permite establecer y estudiar el grupo que constituyen todas las traslaciones del plano.

Apliquemos a una figura plana la traslación $\overrightarrow{AA'}$ seguida de la traslación $\overrightarrow{AA'_1}$, equivalente, según acabamos de ver, a la definida por el vector $\overrightarrow{A'A''}$, igual, paralelo y del mismo sentido que el $\overrightarrow{AA'_1}$. Como resultado de la primera traslación la semirrecta $r(AA'')$ se transforma en otra paralela y del mismo sentido r' por A'; y, como resultado de la segunda traslación, r' se transformará en la semirrecta r'' paralela a r' (y del mismo sentido) por A'', es decir, coincidirá (Ax. IV) con la prolongación $AA''\rightarrow$. El movimiento resultante coincide, pues, con la traslación $\overrightarrow{AA''}$, y podemos enunciar:

El producto de dos traslaciones es una nueva traslación.

Todas las traslaciones del plano forman grupo

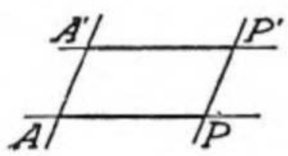
Este grupo tiene, además, un especial carácter. El punto A'' (homólogo de A' en la traslación $\overrightarrow{AA'_1}$) es también homólogo, en virtud de lo demostrado en el párrafo anterior, de A'_1 en la traslación $\overrightarrow{AA'}$ (por ser equivalentes las traslaciones $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{A'_1A''}$). *Al variar,* pues, *el orden de las traslaciones no altera la traslación resultante.* De otro modo:

El producto de dos traslaciones es permutable.

Cuando el producto de dos transformaciones cualesquiera de un grupo es permutable, el grupo se llama *abeliano*. Diremos, pues:

El grupo que forman todas las traslaciones del plano es abeliano.

Es preciso darse cuenta de que ello se debe precisamente al hecho de haber admitido como axioma la unicidad de la paralela a una recta por un punto. De otro modo no hubiésemos podido probar siquiera que las traslaciones forman grupo, como no lo forman los giros todos del plano, que en las Geometrías no euclídeas tienen propiedades similares a las traslaciones.

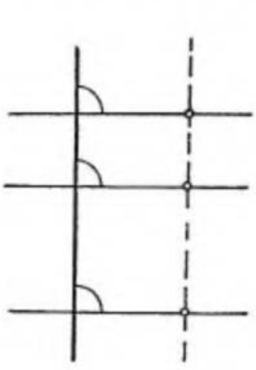


7. Segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.— De las propiedades establecidas se desprende:

Los segmentos AP *y* A'P' *de rectas paralelas, comprendidos entre paralelas, son iguales.*

Basta observar que se corresponden en la traslación $\overrightarrow{AA'}$, en la que P se transforma en P'. Análogamente $AA' = PP'$.

8. Perpendicularidad y paralelismo.— Del hecho de existir *una sola perpendicular* por un punto a una recta se desprende: *Dos rectas distintas perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.* Pues si se cortaran, por su punto de intersección habría dos perpendiculares.



Recíprocamente: *Si una recta es perpendicular a otra lo es a todas sus pralelas.* Basta ver que los ángulos que forman con ellas son congruentes en las traslaciones que tienen por guía dicha perpendicular y transforman la recta primera en sus paralelas.

Consecuencias:

Dos rectas respectivamente perpendiculares a dos rectas paralelas son también paralelas entre sí.

Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas también se cortan.

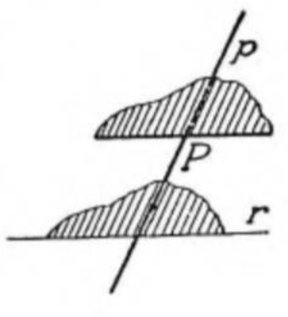
9. La paralela como lugar de puntos equidistantes.—Diremos que varios puntos *equidistan* de una recta cuando los segmentos de perpendicular de cada punto a la recta, comprendidos entre ellos y ésta, son iguales. Combinando las proposiciones anteriores resulta:

El lugar geométrico de los puntos de un semiplano equidistantes de su borde es una recta paralela a él. (Demuéstrese) (*).

El lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de una recta es el conjunto de dos rectas paralelas a ella situadas una en cada uno de los semiplanos que aquélla determina.

(*) Esta propiedad, específica de la Geometría euclídea, es adoptada por algunos geómetras como *postulado del paralelismo* (Severi). En la Geometría hiperbólica de Lobatchewsky este lugar (trayectoria) es una curva llamada *hiperciclo*.

10. Trazado de paralelas.—La construcción de la paralela por un punto P a una recta r puede realizarse sin necesidad del juego de regla y escuadra a que antes nos hemos referido. Basta la simple cartulina de un borde rectilíneo.

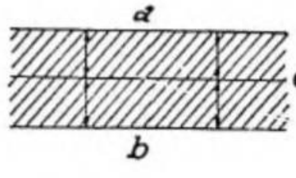


Las propiedades de las perpendiculares y de la equidistancia proporcionan varios métodos que el lector mismo improvisará. Lo más sencillo es, sin embargo, trazar por P una secante cualquiera p a r y transportar uno de los ángulos pr sobre el haz de vértice P, conservando la dirección y sentido del lado p, sobre el que se transporta el ángulo, en el mismo semiplano en que se halla. El juego de escuadras simplifica este transporte, pero no es indispensable.

11. Conservación del paralelismo en el movimiento.—*La relación de paralelismo se conserva en todo movimiento.* Las transformadas de dos rectas paralelas son también paralelas. Pues si se cortaran, aplicando el movimiento recíproco habrían de cortarse también (Ax. III, 2) las rectas dadas.

En particular: *Si una recta es paralela a otra, su simétrica respecto a ésta también lo es;* es fácil probar además que: *Dos semirrectas homólogas y paralelas en una simetría axial tienen el mismo sentido.*

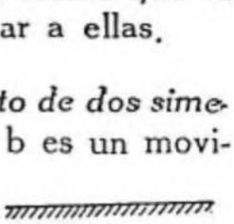
12. Faja de plano. Paralela media.—Dadas dos rectas paralelas a y b, el conjunto de los puntos comunes al semiplano de borde a que contiene b, y al semiplano de borde b que contiene a se llama *faja* o *banda* de plano.



La recta c paralela a ambas rectas trazada por el punto medio de un segmento perpendicular común a ellas pasa también por el punto medio de otro segmento perpendicular cualquiera; puesto que los segmentos que determina en éste son respectivamente iguales a los que determina en el primero. Esta recta c se llama *paralela media* de la faja.

La paralela media de la faja es eje de simetría del par de rectas que la limitan, por ser eje de simetría de cada segmento perpendicular a ellas.

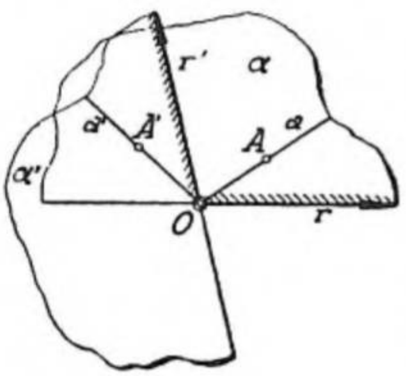
13. Producto de simetrías de ejes paralelos.— *El producto de dos simetrías axiales* (mov. inversos) *respecto de dos ejes paralelos* a *y* b es un movimiento directo que tendrá, por lo dicho antes, dos rectas homólogas paralelas (a y su simétrica respecto de b). Como las semirrectas homólogas tienen el mismo sentido, dicho movimiento *es una traslación.*



Recíprocamente: *Toda traslación puede obtenerse de infinidad de maneras como producto de dos simetrías axiales.* Basta dividir la faja de plano limitada por dos rectas homólogas en dos fajas parciales y multiplicar las simetrías respecto de las paralelas medias. Una solución límite es multiplicar simplemente la simetría axial respecto de una de las rectas por la que tiene por eje la paralela media de la faja considerada.

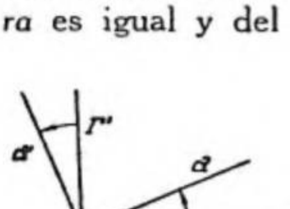
LECCIÓN 8.ª—LOS GIROS EN EL PLANO

1. Angulo de giro.— En la lección 5.ª hemos visto que todo movimiento *inverso* del plano con un punto fijo es una simetría respecto de un eje que pasa por él. Estudiemos ahora los *movimientos directos del plano que dejan fijo un punto* O *del mismo*. Llamaremos a estos movimientos *giros de centro* O. Entre ellos figuran la identidad y la simetría central, ya estudiada.



Consideremos, por ejemplo, el giro que transforma la semirrecta Or en la Or', no opuesta a Or. Llamaremos *ángulo de giro* al ángulo convexo orientado rOr' que forma una semirrecta por O y su homóloga. Esta definición queda justificada por la siguiente propiedad:

Los ángulos convexos orientados que forman dos pares rr', aa', *de semirrectas homólogas en un giro con origen en el centro, son iguales y del mismo sentido*. En efecto, el ángulo ra es igual y del mismo sentido (mov. directo) que su homólogo $r'a'$, y por tanto ar de sentido opuesto. El eje de simetría del par $r'a$ lo será, pues, también del par $a'r$; de donde, los ángulos rr' y $a'a$ son simétricos entre sí respecto de dicho eje, y por consiguiente, rr' y aa' son iguales y del mismo sentido.



Para definir un giro basta, pues, dar el centro y el ángulo de giro con su sentido.

Como caso particular resulta: *Dos ángulos de un haz, uno de ellos de lados perpendiculares a los del otro y situados ambos a la derecha (izquierda) de ellos, son iguales.*

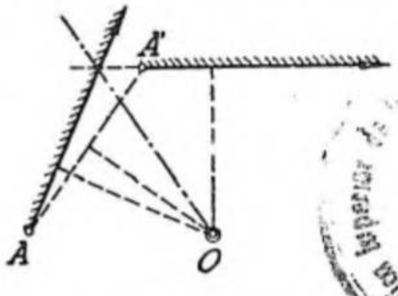
2. Propiedad de los puntos y rectas homólogas.— Todo punto A distinto del centro O determina con éste un segmento OA congruente con su homólogo OA'. De donde:

Dos puntos homólogos A *y* A' *en un giro equidistan del centro. El centro de un giro está en la mediatriz del segmento definido por todo par de puntos homólogos.*

Como el paralelismo y la perpendicularidad se conservan en todo movimiento, *si convenimos en llamar «ángulo de dos semirrectas homólogas» al ángulo que forman dos paralelas a ellas, y del mismo sentido, trazadas por el centro de giro*, resulta de lo anterior:

El ángulo de dos semirrectas homólogas cualesquiera en un giro y, por *tanto, también, el que forman las semirrectas homólogas perpendiculares a ellas, trazadas desde el centro, son iguales al ángulo de giro.*

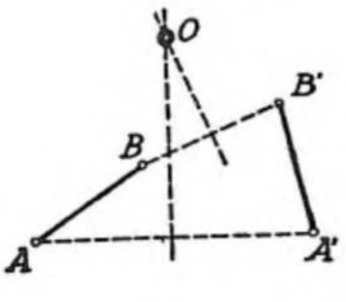
Dos rectas homólogas en un giro, que no sea simetría, son secantes, por serlo las perpendiculares a ellas por el centro. Además, los segmentos de perpendicular a rectas homólogas trazados desde el centro serán iguales, y podemos enunciar:

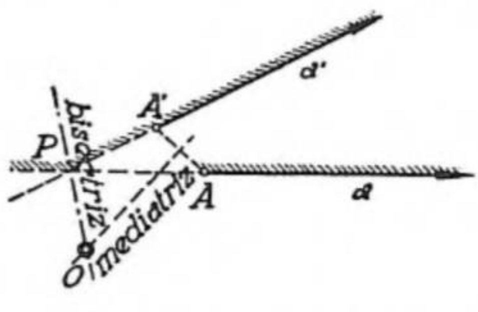


Dos rectas homólogas en un giro equidistan del centro, el cual está por consiguiente en una de las bisectrices de los ángulos, formados por dos rectas homólogas. Para precisar el ángulo y la bisectriz observemos que el centro es doble y el movimiento es directo; por tanto, dicho centro está en semiplanos homólogos, es decir, a un mismo lado (derecha o izquierda) de dos semirrectas homólogas, a menos de que tales semirrectas pasen por el centro.

3. Construcción del centro.— Los teoremas anteriores permiten construir fácilmente el centro de un giro, conocidos ciertos elementos correspondientes. Supondremos que no se trata de una simetría central, en cuyo caso el problema es trivial.

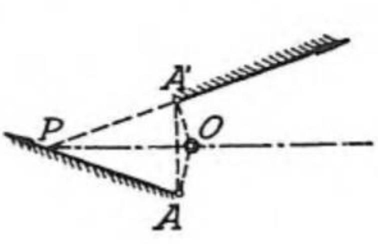
Si se nos dan dos segmentos homólogos $AB = A'B'$ (no paralelos), basta trazar las mediatrices de AA' y BB' y hallar su intersección. La construcción





falla si ambas mediatrices coinciden, caso trivial (no dibujado) en el que el centro es la intersección de las rectas AB y $A'B'$. (Demuéstrese.)

Si se nos dan dos semirrectas homólogas Aa y Aa' (no paralelas), buscaremos la intersección de la mediatriz de AA' con la recta PO que contiene las bisectrices de los ángulos definidos por interferencia de semiplanos correspondientes. Si las semirrectas aa' o sus opuestas se cortan en un punto P equidistante de A y A', éste es el centro de giro por cortarse en él las rectas de la construcción. La construcción falla cuando estas rectas coinciden, en cuyo caso el centro es la intersección de las perpendiculares AO y AO' a las semirrectas por sus orígenes. En efecto, por ser en este caso A y A' simétricos respecto de la bisectriz PO del ángulo APA', ambas perpendiculares se cortan en esta bisectriz; por tanto, los segmentos iguales AO y $A'O$ de estas perpendiculares son homólogos en el giro, y el punto doble O es su centro.



4. Reducción de un movimiento plano cualquiera.—Con lo que acabamos de decir estamos en disposición de reducir un movimiento plano cualquiera a uno de los movimientos particulares estudiados o a combinación de ellos.

Hemos dicho (Ax. III, 6) que un movimiento queda *definido* dando dos semirrectas homólogas r y r' y dos semiplanos homólogos α y α' por ellas determinados; es decir, este movimiento es *único*.

Distinguiremos los siguientes casos:

I. *El movimiento es directo*. Por tanto α y α' quedan ambos a la derecha (izquierda) de r y r'.

a) Si r y r' son de la misma dirección y sentido, estén o no en una misma recta, el movimiento coincide con la *traslación* AA', definida por sus orígenes respectivos A y A'. Si éstos también coinciden se trata de la *identidad*.

b) Si r y r' son de la misma dirección y sentidos opuestos, el movimiento que transforma una en otra es la *simetría central* con centro en el punto medio de AA' (que coincide con A y A' si éstos coinciden entre sí).

c) Si r y r' no son paralelas, el movimiento coincide con el *giro*, cuyo centro se determina como hemos indicado en el párrafo anterior.

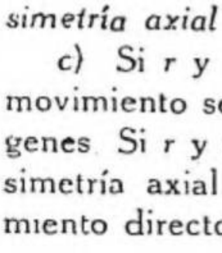
II. *El movimiento es inverso*. Por tanto α y α' quedan, respectivamente, a distintos lados de r y r'.

a) Si r y r' *coinciden*, el movimiento es la *simetría axial* con eje en la recta común.

b) Si r y r' *tienen el origen común* O, sin coincidir, el movimiento es una *simetría axial* cuyo eje es la bisectriz del ángulo rr' (v. lección 5.ª).

c) Si r y r' *no tienen origen común* y ambas están en la misma recta, el movimiento se reduce a una *simetría axial* cuyo eje es la mediatriz de los orígenes. Si r y r' no pertenecen a la misma recta se reduce al producto de una simetría axial (de eje r o r') que invierta el sentido del plano, por el movimiento directo que lleva r sobre r' (giro o traslación), según lo antes dicho.

5. Reducción de un movimiento a simetrías.—*El producto de dos simetrías axiales* (movimientos inversos) *respecto de dos ejes secantes* es un movimiento directo que tiene como punto doble el de intersección de los ejes, es decir, es *un giro*.



Recíprocamente: *Todo giro puede obtenerse de infinidad de maneras como producto de dos simetrías axiales cuyos ejes pasan por su centro*. Basta dividir, por ejemplo, el ángulo formado por dos semirrectas homólogas aa' en dos ángulos parciales aa'' y $a''a'$ y efectuar el producto de las simetrías que invierten dichos ángulos. Una solución límite es el producto de la simetría respecto de la recta de a por la inversión del ángulo aa'. Si el giro es de un ángulo llano (simetría central), la inversión de dicho ángulo se sustituirá por la simetría respecto de la perpendicular común a sus lados, trazada por el vértice.

Puesto que también toda traslación puede, según vimos, reducirse al producto de dos simetrías axiales, resulta por lo anterior:

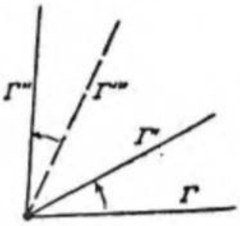
Todo movimiento directo del plano puede reducirse al producto de dos simetrías axiales.

Todo movimiento inverso del plano es una simetría axial o puede reducirse al producto de tres simetrías axiales.

6. Grupo de los giros concéntricos.—Es evidente que a todo giro corresponde su recíproco y que el producto de dos giros concéntricos es otro giro con el mismo centro de los componentes. Por consiguiente:

Los giros con un mismo centro forman grupo.

Este grupo es abeliano. De otro modo: Si se altera el orden en que se efectúan dos giros consecutivos rr', $r'r''$, el resultado será el mismo giro rr''. En efecto, el segundo giro $r'r''$ transforma r en r''', y el ángulo rr' en $r'''r''$, congruente con rr'; por consiguiente el giro $r'''r''$ que lleva r''' sobre r'' es igual al primero rr'



7. Grupo del punto.—Si a todos los *giros* con centro O (movimientos directos) agregamos los movimientos inversos con este mismo punto doble *(simetrías)*, obtendremos un *grupo* más amplio de movimientos. En efecto, el producto de dos de ellos será un movimiento directo o uno inverso con el mismo punto doble O, es decir, un giro de centro O o una simetría respecto de un eje que pasa por O. Este grupo se llama *grupo del punto* O. Es fácil comprobar que *no tiene carácter abeliano;* basta multiplicar, por ejemplo, una simetría axial por un giro de un ángulo recto.

8. Divergencia de propiedades entre giros y traslaciones.—A diferencia de las traslaciones, *el conjunto de todos los giros del plano no forman grupo.* Basta observar, por ejemplo, que el producto de dos simetrías centrales respecto de dos centros distintos es una traslación.

Esta desemejanza entre las propiedades de giros y traslaciones *es consecuencia del axioma del paralelismo,* pues dada una recta r y un punto exterior P, de dicho axioma resulta la existencia por P de *una sola recta* r' transformada de r por traslación, mientras existen por P *infinitas rectas* que pueden ser homólogas de r por un giro. No podemos, pues, aplicar a los giros los razonamientos del § 6 de la lección 7.ª

En las geometrías no euclídeas esta desemejanza desaparece y los giros y las traslaciones tienen propiedade idénticas.

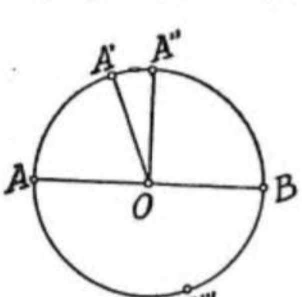
EJERCICIOS

1. Lugar geométrico de los centros de los giros que transforman una recta dada en otra dada Caso en que sean paralelas.

2. Dados dos giros de centros A y B y amplitudes α y β, coloquemos dos ángulos $ab = \alpha$. $mn = \beta$, de modo que tengan por bisectrices respectivas las semirrectas AB y BA si son ab y mn del mismo sentido; o AB y $AB \rightarrow$ si son de sentido opuesto. Demostrar que el punto de intersección an, cuando existe, es el centro de giro del producto de los giros dados en el orden indicado ¿Cuál es el centro al variar el orden de los giros componentes?

LECCIÓN 9.ª—LA CIRCUNFERENCIA

1. Circunferencia. Compás.—Consideremos ahora las trayectorias del grupo de un punto O del plano, definido en la lección anterior. En lugar de los puntos A', A'', A''', ... homólogos de un punto cualquiera A del plano, distinto de O, en todos los giros y simetrías que dejan fijo O es, por las propiedades del movimiento, *lugar geométrico de puntos equidistantes de* O, y se llama *circunferencia* de centro O.



Los segmentos congruentes $OA = OA' = OA'' = ..$ se llaman *radios*. Dos radios simétricos OA y OB respecto de O constituyen un *diámetro* AB.

Aplicando a un punto cualquiera A' de la circunferencia una transformación cualquiera del grupo resulta, por definición de grupo, otro punto de la misma trayectoria. Por tanto:

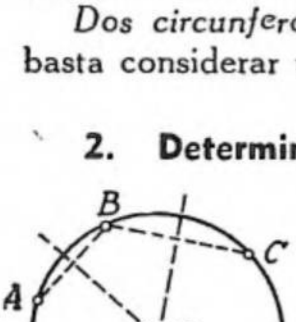
Toda circunferencia de centro O *se transforma en sí misma en todo movimiento que deja fijo* O. En particular:

Toda circunferencia es simétrica respecto del centro y respecto de toda recta que pasa por él (recta diametral).

El instrumento más sencillo y el más antiguo que realiza materialmente la equidistancia y, por consiguiente, el trazado de circunferencias es el cordel tirante, todavía usado hoy en el encerado, en jardinería, etc. Sobre la mesa de dibujo se utiliza el compás, instrumento derivado de la noción de giro, y del que nos valdremos más adelante, una vez que fundamentemos su uso.

Dos circunferencias de radios congruentes son congruentes. Para probarlo basta considerar un movimiento que transforme uno de los centros en el otro.

2. Determinación de la circunferencia.—*Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y sólo una.*

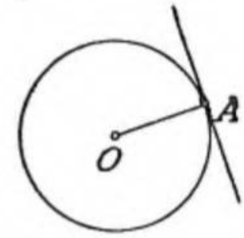


Sean A, B y C los puntos dados Las mediatrices de los segmentos AB y BC se cortan por cortarse dichas rectas. El punto O de intersección equidista de los tres puntos por pertenecer a ambas mediatrices y, por tanto, pertenece también a la mediatriz de AC y es centro de una circunferencia de radio $OA = OB = OC$ que pasa por los tres puntos.

Este centro O es único, pues por equidistar de los tres puntos debe estar en las tres mediatrices coincidiendo con su única intersección.

Si los puntos A, B y C estuvieran alineados, las mediatrices serían paralelas y no habría centro posible. De otro modo: *Una circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta.*

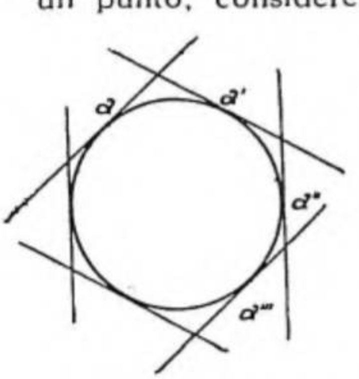
3. Recta y circunferencia tangentes.—Tracemos en un punto A de la circunferencia la perpendicular al radio OA que pasa por él. Esta recta no puede tener otro punto B común con la circunferencia, pues en tal caso el triángulo isósceles AOB tendría iguales los ángulos A y B y tendríamos por O dos perpendiculares a la recta AB.



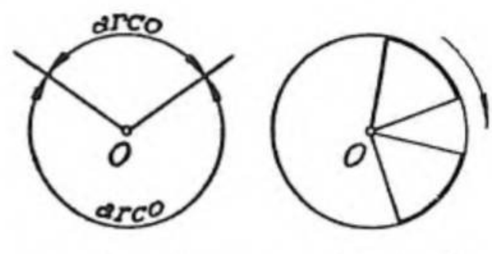
Una recta que tiene un punto y sólo uno común con una circunferencia se llama *tangente* a ella.

Por definición de equidistancia (lec. 6.ª) *si dos rectas equidistan de un mismo punto O son tangentes a una misma circunferencia de centro O.*

4. La circunferencia como envolvente.—Análogamente a lo dicho para un punto, consideremos las rectas a', a'', a''', ... homólogas de una misma recta en todos los movimientos que dejan fijo un punto O del plano fuera de ella. Toda recta de este conjunto se transforma en otra del mismo mediante un movimiento cualquiera del grupo. Todas estas rectas equidistan, pues, del centro O y son, por lo tanto, tangentes a una misma circunferencia, que se llama por esta razón *envolvente* de las rectas en cuestión



5. Angulos centrales y arcos.—Un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia se llama *ángulo central* de la misma. El conjunto de los puntos de una circunferencia interiores a un ángulo central se llama *arco correspondiente* al ángulo. Si se trata de un ángulo llano el arco se llama *semicircunferencia* Si el ángulo es recto el arco correspondiente se llama *cuadrante*



Dos ángulos centrales congruentes en una misma circunferencia o en circunferencias iguales, se corresponden en un movimiento que hará coincidir los arcos correspondientes, y recíprocamente; de donde:

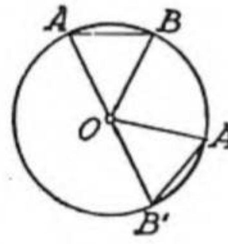
En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales, y a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales.

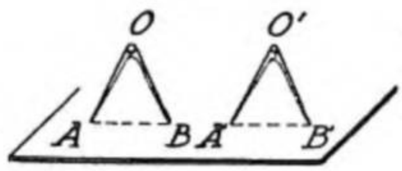
6. Cuerdas.—Se llama *cuerda* de una circunferencia al segmento rectilíneo que une dos de sus puntos. En particular el diámetro es una cuerda. Al ángulo central convexo (llano si la cuerda es diámetro) cuyos lados pasan por los extremos de la cuerda, y al arco correspondiente a este ángulo, les llamaremos también *correspondientes* a la cuerda.

Al coincidir dos arcos, coincidirán los extremos y, por tanto, las cuerdas, es decir:

A arcos o ángulos congruentes corresponden cuerdas congruentes.

Recíprocamente: *A cuerdas congruentes corresponden ángulos convexos y arcos correspondientes iguales.*

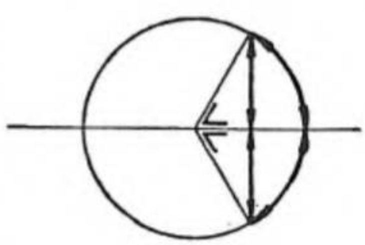




Pues si $AB = A'B'$, serán iguales los triángulos AOB y $A'OB'$, por tener los tres lados, respectivamente, iguales y, por lo tanto, lo serán también los ángulos centrales y los arcos correspondientes.

Por ejemplo: El compás de puntas no es más que un par de radios materializados. Una vez fijado el ángulo que forman, la cuerda correspondiente es también fija, es decir, señala siempre el mismo segmento. De aquí que se utilice el *compás de puntas como portasegmentos.*

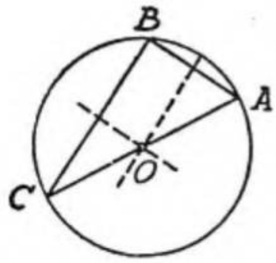
7. Cuerda y diámetro perpendicular.—El diámetro perpendicular a una cuerda es eje de simetría de la circunferencia y de la recta que contiene dicha cuerda; por lo tanto será eje de simetría de la misma, así como del ángulo central y del arco correspondientes.



En resumen: *La recta diametral perpendicular a una cuerda es mediatriz de la misma, bisectriz del ángulo central correspondiente, y divide al arco en dos iguales.*

8. Lugar geométrico de Thales.—Llámase triángulo *rectángulo* al que tiene un ángulo recto. El lado opuesto a él se llama *hipotenusa* y los lados que lo forman *catetos.*

Dada un triángulo rectángulo ABC, apliquemos a uno de los extremos A de la hipotenusa dos simetrías consecutivas respecto de las mediatrices de los. catetos. Obtendremos evidentemente el otro extremo C. Pero el producto de dos simetrías respecto de dos ejes perpendiculares es una simetría central respecto de su punto de intersección (lec. 5.ª, § 13). En consecuencia:



Las dos mediatrices de los catetos de un triángulo rectángulo se cortan en el punto medio de la hipotenusa. Este punto equidista, por lo tanto, de los tres vértices. De otro modo:

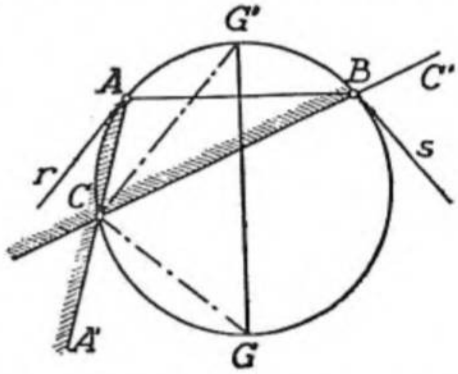
La circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa de un triángulo rectángulo pasa por el vértice del ángulo recto.

Recíprocamente: *Todo punto* B *de una circunferencia de diámetro* AC *es vértice de un ángulo recto* ABC *cuyos lados pasan por los extremos de dicho diámetro.*

En efecto, el producto de la simetría respecto de la mediatriz de AB por la simetría central respecto O es la simetría respecto del eje *perpendicular* al anterior, que será mediatriz de BC. De donde resulta (lec. 7.ª, § 8) que AB y BC son también perpendiculares entre sí. Por tanto:

El lugar geométrico de los vértices de un ángulo recto cuyos lados pasan por dos puntos fijos A *y* C *es la circunferencia de diámetro* AC.

9. Intersección de los pares de rectas homólogas de dos haces iguales en un movimiento directo.—Sean A y B los vértices de dos haces homólogos en un *movimiento directo* Si este movimiento es una traslación o una simetría central, ya sabemos que los pares de rectas homólogas son paralelas. Supondremos, pues, que se trata de un giro y sea C el punto de intersección de las rectas AC y BC de dos rayos homólogos cualesquiera



El centro G del giro que transforma una en otra será el punto de intersección de la mediatriz de AB con la bisectriz del ángulo BCA' (determinado por semiplanos correspondientes). En cambio el centro G' del giro que transforma la semirrecta AC en la BC' opuesta a BC será la intersección de la referida mediatriz de AB con la bisectriz CG' del ángulo ACB Como las bisectrices CG y CG' son perpendiculares, resulta que el punto C de intersección de dos rectas homólogas cualesquiera es vértice de un ángulo recto cuyos lados pasan por los puntos fijos G (centro del giro que transforma el haz A en B) y G' (centro del giro que transforma el haz A en el opuesto por el vértice a B); y recordando la propiedad anterior:

Los puntos de intersección de las rectas de un haz y sus homólogas en un giro (no simetría) están en una circunferencia.

Esta circunferencia pasa por los centros de giro mencionados y también por los puntos A y B, como intersecciones que son de los rayos BA y AB y de sus homólogos respectivos r y s en uno y otro haz. Concretando mejor:

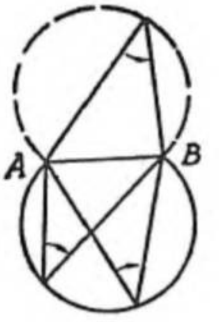
Los rayos (semirrectas) homólogos de dos haces directamente iguales de vértices A *y* B, *comprendidos en los ángulos homólogos* rAB *y* ABs *situados en un mismo semiplano respecto de la recta* AB *se cortan en puntos de un arco de circunferencia* AGB *situado en dicho semiplano.*

Recíprocamente: *Uniendo un punto cualquiera* C *de dicho arco con* A *y* B *se obtienen dos rectas homólogas* AC *y* BC. De lo contrario la recta homóloga de AC la cortaría en otro punto C'' perteneciente a dicho arco y la circunferencia en cuestión tendría tres puntos, A, C y C'' en línea recta.

Recordando las propiedades del giro resulta:

El ángulo ACB *es constante e igual al ángulo de giro* AGB.

10. Arco capaz.—Recíprocamente: Si los ángulos ACB y AGB son directamente iguales, los puntos A y B pueden considerarse como intersecciones de rayos homólogos en dos haces congruentes de vértices C y G y por consiguiente están en una misma circunferencia con C y G. Como por A, B y G no pasa más que una circunferecia, resulta en definitiva:



El lugar geométrico de los vértices de todos los ángulos directamente congruentes entre sí cuyos lados pasan por dos puntos fijos A y B, es un arco de circunferencia de extremos A y B, llamado *arco capaz* del ángulo sobre el segmento AB.

En cada semiplano limitado por la recta AB existe un arco capaz, los ángulos de uno son inversamente iguales (simétricos) a los del otro.

EJERCICIOS

(referentes a cuestiones diversas de este capítulo)

Demostrar:

1. Dos triángulos de lados respectivamente paralelos tienen ángulos respectivamente iguales. (Hay que probar la igualdad u oposición de sentido en los tres lados.)

2 Todo movimiento inverso del plano puede reducirse de infinitos modos al producto de una traslación por una simetría axial.

3. Todo movimiento inverso del plano puede reducirse de infinitos modos al producto de una simetría central por una simetría axial.

4. El producto de tres simetrías axiales respecto de tres ejes concurrentes (paralelos) es una simetría axial respecto de un eje concurrente (paralelo) con ellos.

5. Dadas tres simetrías s, s', s'' respecto de tres ejes concurrentes o paralelos, la transformación $(s\,s'\,s'')^2$ es la identidad. Se expresa $(s\,s'\,s'')^2=1$.

6. Si g es un giro de centro O y s una simetría respecto de un eje que pasa por O, se verifica $sgs=g^{-1}$ (g^{-1} significa el giro recíproco de g).

7. El producto de dos simetrías centrales respecto de dos centros O_1 y O_2 es una traslación equivalente al producto de dos traslaciones iguales a $\overrightarrow{O_1O_2}$.

8. El producto de una simetría de centro O por una traslación $\overrightarrow{BB'}$ es otra simetría de centro O' punto medio de OO_1, siendo O_1 el homólogo de O en la traslación $\overrightarrow{BB'}$

9. El producto de una traslación $\overrightarrow{BB'}$ por una simetría de centro O es una simetría de centro O'', punto medio de OO_2, siendo O_2 el homólogo de O en la traslación inversa $\overrightarrow{B'B}$.

10. Todas las simetrías del plano, juntamente con todas las traslaciones del mismo, forman un grupo. Este grupo no es abeliano.

11. El producto de tres simetrías respecto de tres centros $O_1O_2O_3$ es otra simetría central de centro O_4, tal que $\overrightarrow{O_3O_4}$ es igual y paralelo al $\overrightarrow{O_2O_1}$ y de igual sentido.

12. Dadas tres simetrías centrales cualesquiera, s_1, s_2, s_3, la transformación $(s_1s_2s_3)^2$ es la identidad.

13. Dado un segmento AB, si se traslada B a B' dejando fijo A, el punto medio O de AB se traslada a O', tal que OO' es la mitad de BB'. (V. ej. 8.)

14. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales de una circunferencia. Idem de las cuerdas paralelas.

15. Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia situadas en rectas concurrentes en un punto P distinto del centro.

16. El producto de $2n$ simetrías centrales es una traslación (ocasionalmente identidad).

17. El producto de $2n+1$ simetrías centrales es una simetría.

18. Llévense arcos iguales $AB=A'B'=a$ sobre dos circunferencias iguales, a partir de sendos puntos A y A' fijos en ellas. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos BB' que unen los extremos, al variar a, 1.º, cuando los arcos se llevan en igual sentido; 2.º, cuando se llevan en sentidos opuestos. (Trasládese una circunferencia sobre la otra y después de aplicar el ej. 14, deshágase la traslación aplicando el ej. 13.)

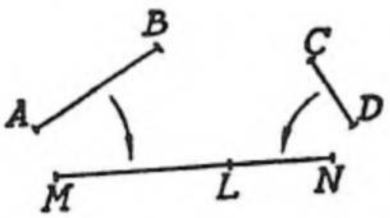
9. Sean c y c' dos circunferencias secantes en P y Q. Tracemos por P una recta variable y sean A y A' sus puntos de intersección con c y c'. Unamos A y A', respectivamente, con dos puntos fijos B y B' de c y c' distintos de Q. Hallar el lugar geométrico de las intersecciones de BA y $B'A'$. Posición que ocupa Q respecto de este lugar cuando B y B' están alineados con P.

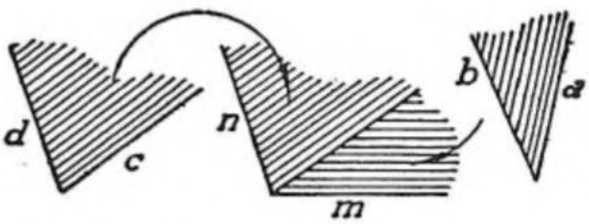
Capítulo III.—PRIMERAS RELACIONES METRICAS EN LAS FIGURAS PLANAS

LECCIÓN 10.—SUMA Y DESIGUALDAD DE SEGMENTOS Y DE ÁNGULOS

1. Concepto de suma.—De la ordenación de los puntos de una recta y de los rayos de un haz, establecida en la lección 2.ª, resulta que todo punto (rayo) interior a un segmento (ángulo) le divide en dos segmentos (ángulos) formados por este punto (rayo) y todos los puntos anteriores o posteriores.

Diremos que un segmento (ángulo) es suma de dos cuando existe un punto (rayo) interior que le divide en dos segmentos (ángulos) congruentes, respectivamente, con aquellos dos.





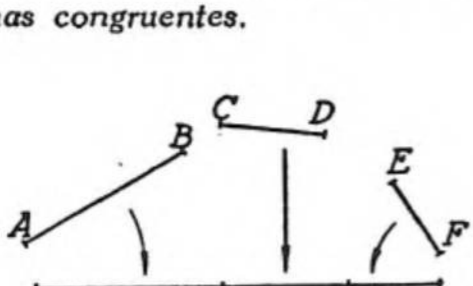
Así, en la figura escribiremos: $MN = AB + CD$ $\sphericalangle mn = \sphericalangle ab + \sphericalangle cd$.

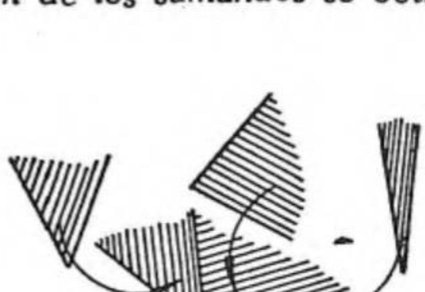
Podemos, pues, obtener un segmento (ángulo) suma de los dos dados transportándolos sobre una recta (un haz), de modo que tengan un extremo (lado) común y queden a distinto lado de él. Llamaremos a esta operación *yuxtaposición* de los segmentos (ángulos).

De la definición y de las propiedades de la congruencia resulta:

PROPIEDAD UNIFORME.—*Todos los segmentos (ángulos) que resultan de sumar dos dados son congruentes entre sí.* Basta relacionarlos en el movimiento que hace corresponder el extremo (lado) común y las semirrectas (semiplanos) que contienen los segmentos (ángulos) congruentes. Análogamente:

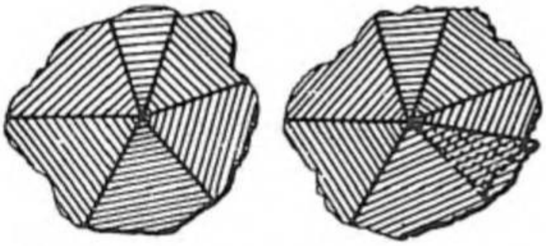
PROPIEDAD CONMUTATIVA.—*Al alterar el orden de los sumandos se obtienen sumas congruentes.*





Repitiendo el proceso, podemos obtener y definir la *suma de varios segmentos o ángulos, sumando los dos primeros, agregando a la suma el tercero, luego el cuarto, y así sucesivamente hasta agotarlos todos.*

Sin embargo para poder hablar con toda generalidad de un ángulo suma de dos o más (convexos o cóncavos) es preciso generalizar el concepto que hasta ahora tenemos de ángulo, conviniendo en seguir designando con tal nombre una yuxtaposición de ángulos que llene el plano *(ángulo completo)*, y aun que lo vuelva a cubrir total o parcialmente una o varias veces.



Esto admitido, de la misma definición de suma por yuxtaposición, resulta:

PROPIEDAD ASOCIATIVA.—*Una suma no se altera sustituyendo dos o más sumandos consecutivos por su suma efectuada.*

Combinando esta propiedad con las anteriores se puede demostrar, como en Aritmética para los números, que:

La suma de varios segmentos o ángulos tiene las mismas propiedades uniforme, asociativa y conmutativa que la suma de números.

Conviniendo en llamar segmento (ángulo) *nulo* a un punto (rayo) y en represetarlo por 0, subsiste asimismo la propiedad *modular* de la suma, que se expresa así: $\alpha+0=\alpha$.

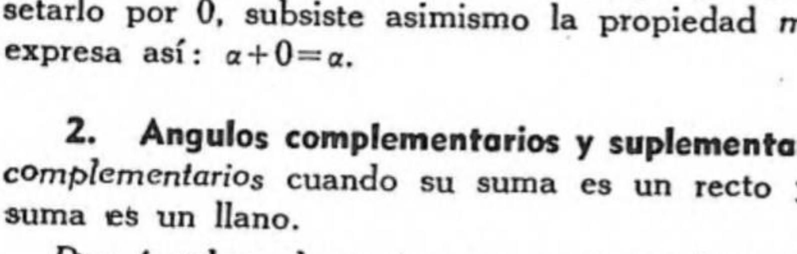
2. Angulos complementarios y suplementarios.—Dos ángulos se llaman *complementarios* cuando su suma es un recto y *suplementarios* cuando su suma es un llano.

Dos ángulos adyacentes son, pues, suplementarios.

Dos ángulos de lados paralelos son iguales o suplementarios. Demuéstrese. (V. lección 7.ª)

Dos ángulos suplementarios e iguales son rectos.

3. Desigualdad de segmentos o ángulos.—En lugar de yuxtaponer dos segmentos o ángulos dados, *superpongámosles*, es decir, transportémosles sobre una recta (haz) de modo que coincidan dos extremos (lados) y que queden ambos a un mismo lado del punto (lado) de coincidencia. Si los extremos libres coinciden también, ambos segmentos (ángulos) serán iguales; si no coinciden, en virtud de las propiedades de la ordenación, uno de los extremos (lados) libres precederá al otro en el sentido en que se han colocado. Diremos que el primer segmento (ángulo) es *menor* que el segundo y éste *mayor* que aquél. Así, para los segmentos y ángulos de la figura escribiremos:



$$AB<CD \qquad CD>AB \qquad \sphericalangle ab<\sphericalangle cd \qquad cd>ab$$

Las propiedades de la ordenación lineal (lec. 2.ª) se traducen, pues, en las siguientes propiedades de los signos $>$ (mayor) y $<$ (menor).

Dados dós segmentos o ángulos α y β, o es $\alpha>\beta$ o $\alpha<\beta$.

Si es $\alpha>\beta$ *y* $\beta>\gamma$ *es también* $\alpha>\gamma$ (propiedad transitiva).

Finalmente: *Si es* $\alpha>\beta$ *es también* $\alpha+\delta>\beta+\delta$.

Pues basta imaginar trasladados (o girados) los segmentos (ángulos α y β del segmento (ángulo) δ en el sentido en que están colocados, lo cual no altera su ordenación.

Aplicando reiteradamente esta propiedad resulta finalmente, como en Aritmética, para los números:

Sumando miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo signo se obtiene otra del mismo signo. Por ejemplo, de $\alpha>\beta$ y $\alpha'>\beta'$ resulta sucesivamente $\alpha+\alpha'>\beta+\alpha'>\beta+\beta'$; de donde $\alpha+\alpha'>\beta+\beta'$.

De la definición resulta que si $\alpha>\beta$ existe γ tal que $\alpha=\beta+\gamma$.

Los ángulos convexos se llaman *agudos* u *obtusos*, según que sean *menores* o *mayores* que un recto. El suplementario de un ángulo agudo es obtuso y viceversa.

4. Diferencia de segmentos o de ángulos.—Si es $\alpha\geqslant\beta$ llamaremos *diferencia* $\alpha-\beta$ al segmento (ángulo) γ que sumado a β da α. Escribiremos, pues, $\alpha-\beta=\gamma$ si es $\gamma+\beta=\alpha$. (Si $\alpha=\beta$, $\alpha-\beta=0$.)

La diferencia de segmentos (ángulos) tiene las mismas propiedades que la diferencia de números, por ser consecuencias directas de las propiedades de la suma, que son idénticas para segmentos y números.

En particular, de $\alpha>\beta$ se desprende $\alpha-\delta>\beta-\delta$.

5. Múltiplos y submúltiplos.—Si el segmento (ángulo) α es suma de n sumandos iguales a β escribiremos $\alpha=n\beta$ o $\beta=\alpha:n$, diciendo que el segmento (ángulo) α es $n-$*múltiplo de* β, y β la $n-$*sima parte* de α.

De las propiedades anteriores resulta: *Si es* $\beta<\gamma$ será $n\beta<n\gamma$; y recíprocamente

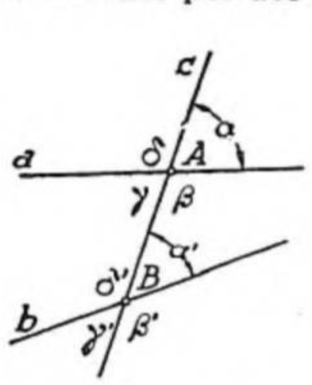
Si es $n\beta<n\gamma$ será $\beta<\gamma$ (por reducción al absurdo).

De otro modo: De $\alpha \lesseqqgtr \delta$ resulta $\alpha:n \lesseqqgtr \delta:n$.

Resulta análogamente, de las propiedades de la suma, $n(\alpha\pm\beta)=n\,\alpha\pm n\,\beta$ y, admitiendo provisionalmente la existencia las n.ªˢ partes $(\alpha\pm\beta):n=\alpha:n\pm\beta:n$ (Propiedad distributiva para n natural.)

Veamos ahora algunas interesantes aplicaciones de los conceptos establecidos de suma, diferencia y desigualdad a algunas figuras geométricas.

6. Forma euclídea del postulado de paralelismo.—En la teoría clásica del paralelismo tenía especial interés relacionar entre sí los ocho ángulos determinados por dos rectas a y b cortadas por otra c en puntos distintos A y B.



Angulos externos e internos. La recta a determina dos semiplanos; los ángulos de vértice A contenidos en el semiplano que contiene B se llaman *internos*, y asimismo los ángulos de vértice B contenidos en el semiplano bA. Los demás se llaman *externos*.

Son pues, internos, en la figura, β, γ, α', δ'; y externos α, δ, β', γ'.

Angulos colaterales y alternos. Llamaremos *colaterales* los ángulos de distinto vértice situados a un mismo lado de la *secante*, y *alternos* los situados a distinto lado. Son, pues, *alternos internos* los de los pares $\beta\delta'$ y $\alpha'\gamma$; y *alternos externos* los de los pares $\delta\beta'$, $\alpha\gamma'$. Los colaterales internos o externos se llaman también *conjugados;* por ejemplo $\beta\alpha'$, $\alpha\beta'$, etc.

Llámanse finalmente *correspondientes* los colaterales uno interno y otro externo, como $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc.

Si las rectas a y b son paralelas, de las propiedades del paralelismo resultan los siguientes teoremas:

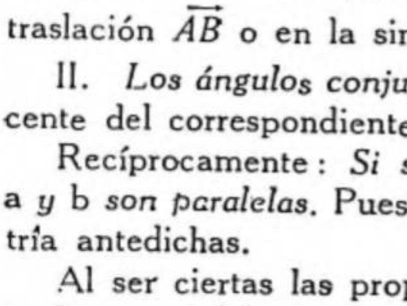
I. *Los ángulos correspondientes y los alternos internos o externos son iguales entre sí.* Puesto que se corresponden estos ángulos respectivamente en la traslación $\overrightarrow{AB}$ o en la simetría alrededor del punto medio de $\overrightarrow{AB}$.

II. *Los ángulos conjugados son suplementarios.* Pues uno de ellos es adyacente del correspondiente al otro.

Recíprocamente: *Si se verifica cualquiera de estas igualdades las rectas* a *y* b *son paralelas.* Pues se corresponden estas rectas en la traslación o simetría antedichas.

Al ser ciertas las propiedades I y II y sus recíprocas, son ciertas las contrarias, que el lector enunciará fácilmente. El postulado V de Euclides, sobre el que se edificó la teoría del paralelismo, viene a constituir uno de estos contrarios y dice así: *Si una línea recta, cortando a otras dos, forma ángulos internos de un mismo lado cuya suma sea menor que dos ángulos rectos, estas dos rectas prolongadas por dicho lado se cortan.*

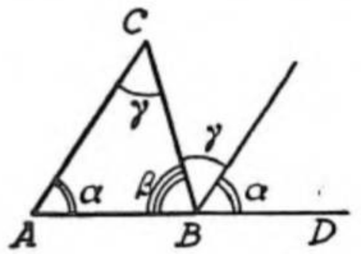
Con este postulado, y admitido el transporte del ángulo y la unicidad de la perpendicular, puede demostrarse la existencia y unicidad de la paralela por un punto P a una recta r, es decir, el axioma IV de paralelismo (v. lec. 7.ª).



En efecto, trazada por P la perpendicular p a r, que es única, y por P la perpendicular única r' a p, la recta r' no puede cortar a r, pues si la cortara, por el punto de intersección habría dos perpendiculares a p Por otra parte, cualquier otra recta r'' formará con p un ángulo menor que un recto y cortará a r del lado en que lo forma, en virtud del postulado de Euclides. Este postulado permite, pues, asegurar la existencia de una paralela y sólo una por un punto a una recta. En nuestra exposición aparece el tal postulado como un teorema más, de escasa importancia. Su relieve histórico nos ha inducido, sin embargo, a dedicarle un párrafo especial. (V. además la nota al final de la lección.)

7. Suma de los ángulos de un triángulo.—*La suma de los ángulos de todo triángulo es un ángulo llano.*

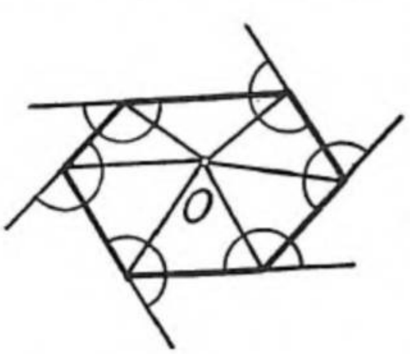
Tracemos por un vértice B la semirrecta paralela y de igual sentido al lado AC. De las propiedades anteriores resulta la igualdad de los ángulos correspondientes α, y la igualdad de los ángulos alternos-internos γ (v. figura). De donde, el ángulo llano ABD es igual a la suma de los tres ángulos α, β y γ del triángulo. La misma figura indica que:



Un ángulo exterior (CBD) *de un triángulo es igual a la suma de los internos no adyacentes a él.*

Corolario.—Los ángulos de un triángulo son: o los tres agudos, o, si existe un ángulo recto u obtuso, los otros dos son agudos. Los triángulos se llaman, respectivamente, *acutángulo, rectángulo* y *obtusángulo. En un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios.*

8. Suma de los ángulos de un polígono convexo.—Los segmentos que unen un punto interno O de un polígono convexo con sus vértices le dividen en tantos triángulos como lados tiene el polígono. Sumando los ángulos de todos estos triángulos se obtendrá la suma de los ángulos del polígono, más los del vértice O que suman un ángulo completo (v. lección 2.ª); de donde:



La suma de los ángulos de un polígono es igual a tantos ángulos llanos como lados tiene menos dos.

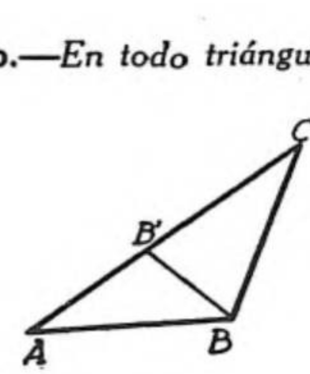
(¿De qué propiedades de la suma de ángulos se ha hecho uso en esta demostración?)

La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo (obtenidos prolongando los lados de un mismo sentido de contorno) *es igual a dos llanos.*

En efecto, cada ángulo exterior es adyacente de uno del polígono, es decir, suma con él un llano. La suma de los ángulos exteriores e interiores vale, pues, tantos llanos como lados, y como los interiores suman dos llanos menos, ésta es precisamente la suma de los exteriores.

9. Desigualdad de lados y ángulos de un triángulo.—*En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.*

Supuesto $AC > CB$ construyamos sobre CA el segmento $CB' = CB$. Por pertenecer $\sphericalangle A$ al triángulo ABB' será menor que el exterior $\sphericalangle CB'B$. Por ser el punto B' interior al segmento CA será el rayo BB' interior a $\sphericalangle CBA$; por tanto $\sphericalangle B > \sphericalangle B'BC = \sphericalangle BB'C > \sphericalangle A$, que es l. q. q. d.

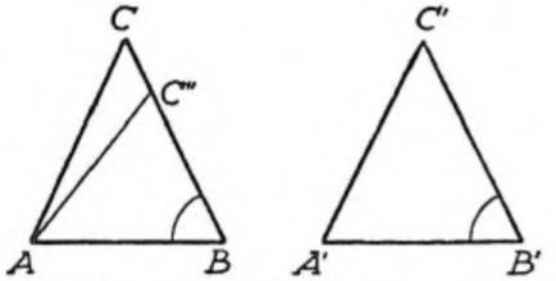


El recíproco no es preciso demostrarlo directamente, pues resulta por reducción al absurdo Si $\sphericalangle B > \sphericalangle A$, no puede ser $AC \leqslant BC$, pues entonces por el teorema directo y las propiedades del triángulo isósceles (lec 6.ª) sería $\sphericalangle B \leqslant \sphericalangle A$, contra lo supuesto.

Corolario: *La hipotenusa de un triángulo rectángulo es mayor que los catetos.*

10. Cuarto criterio de igualdad de triángulos.—El teorema anterior permite demostrar el llamado *cuarto criterio* de igualdad de triángulos, que se enuncia así:

Dos triángulos que tienen, respectivamente, congruentes dos lados desiguales y el ángulo opuesto al mayor de ellos, son congruentes.



Suponemos $AB = A'B'$, $AC = A'C'$
$AC > AB$ $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$

Transportemos $A'B'C'$ sobre ABC, de modo que coincidan $A'B'$ con AB, y los semiplanos de C y C'. Por ser $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ coincidirán las semirrectas BC y $B'C'$. Es fácil probar ahora que C' ha de coincidir con C.

En efecto, si coincidiera con C'' interior a CB, serían congruentes los triángulos ABC'' y $A'B'C'$, y por tanto $AC'' = A'C' = AC$. En el triángulo isósceles ACC'' se tendría $\sphericalangle C = \sphericalangle CC''A > \sphericalangle B$ (por ser exterior del triángulo $AC''B$) y por consiguiente $AB > AC$, contra lo supuesto.

Si C'' fuera exterior a BC, se llegaría análogamente a la consecuencia $\sphericalangle C'' > \sphericalangle B$, y por consiguiente (por ser $A'B'C'$ congruente con ABC'') $C' > B'$, de donde $A'B' > A'C'$, que también contradice la hipótesis.

11. Igualdad de triángulos rectángulos.—Los cuatro criterios de igualdad de triángulos estudiados (v. además lecc. 4.ª y 6.ª), aplicados a los triángulos rectángulos, dan los siguientes enunciados (el III apenas utilizado):

I. *Dos triángulos rectángulos de catetos respectivamente iguales, son iguales.*

II. *Dos triángulos rectángulos que tienen respectivamente iguales un cateto y un ángulo agudo (contiguo u opuesto en ambos), son iguales.*

III. *Si un triángulo es rectángulo, otro que tenga los lados respectivamente iguales también lo es, y es congruente con él.*

IV. *Dos triángulos rectángulos que tengan respectivamente iguales un cateto y la hipotenusa, son iguales.*

NOTA SOBRE EL POSTULADO DE EUCLIDES.—La forma poco intuitiva que tiene el postulado de Euclides, en comparación con los restantes que este geómetra estableció al comienzo de sus famosos *Elementos*, motivó, sin duda, que el propio Euclides hiciera el menor uso posible de él y que los geómetras posteriores se esforzaran en hallar del mismo una demostración.

Tal propósito falló completamente. Todas las pretendidas demostraciones se apoyaban en la admisión tácita de propiedades en el fondo equivalentes a él: Existencia de una sola paralela (Proclo); Equidistancia de dos paralelas (Posidonio); Existencia de triángulos semejantes (Wallis), etc.

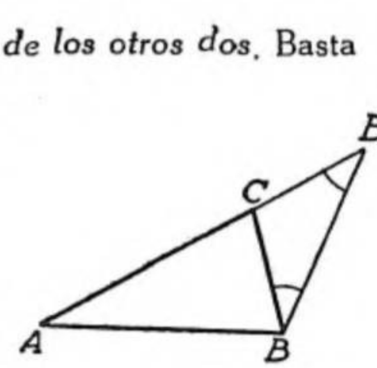
Más de veinte siglos de inútiles esfuerzos han venido a confirmar el carácter de postulado dado por Euclides a su proposición, y a dar consistencia lógica, y aun aplicación práctica, a las geometrías no euclídeas, es decir, geometrías que niegan tal postulado, aceptando los anteriores.

En tales geometrías no euclídeas la suma de los ángulos de un triángulo no es igual dos rectos; pero si en un cierto triánguo es mayor (o menor) que dos rectos lo es también en todos los demás.

LECCIÓN II.—DISTANCIAS EN EL PLANO

1. Distancia entre dos puntos.—La suma y desiguadad de segmentos nos permite establecer ahora un carácter esencial del segmento rectilíneo, que traduce la propiedad intuitiva de ser el camino más corto entre sus extremos Demostremos:

I. *Todo lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.* Basta demostrarlo para el lado mayor AB. Llevemos sobre la prolongación $AC\rightarrow$ de otro lado el segmento $CB'=CB$. En el triángulo isósceles $CB'B$ se tiene



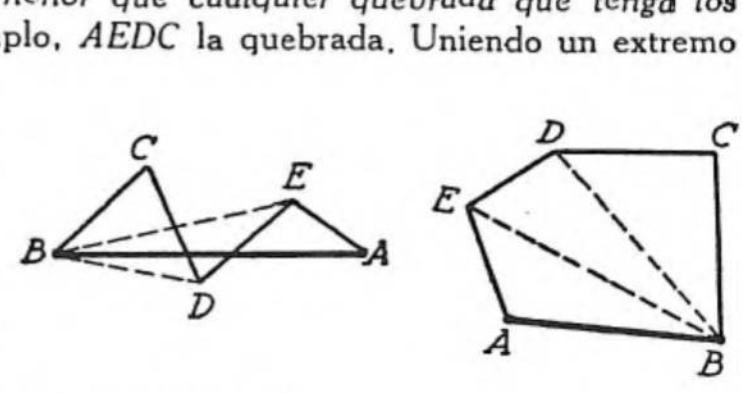
$$\sphericalangle AB'B=\sphericalangle CBB'<ABB'$$

(por ser C interior a AB'). Por consiguiente en el triángulo ABB' a menor ángulo se opondrá menor lado; es decir:

$$AB<AB', \quad \text{o sea,} \quad AB<AC+CB$$

Corolario: *Todo lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos.* $CB>AB-AC$ por ser $CB+AC>AB$

II. *Todo segmento* AB *es menor que cualquier quebrada que tenga los mismos extremos.* Sea, por ejemplo, $AEDC$ la quebrada. Uniendo un extremo B con los vértices intermedios EDC, se tendrá $AB<AE+EB$; a su vez $EB<ED+DB$; $DB<DC+CB$.



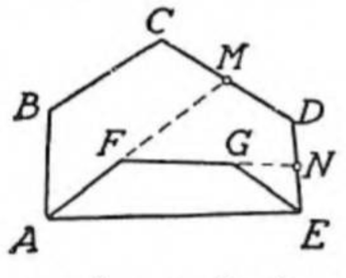
Sustituyendo sucesivamente resulta en definitiva, por las propiedades de la suma y de la desigualdad:

$$AB<AE+ED+DC+CB$$

Alguna de estas desigualdades puede transformarse en igualdad (por ejemplo $EB=ED+DB$) si tiene la quebrada algún lado (ED) intermed'o alineado con el extremo B; pero ello no altera la desigualdad final.

El segmento AB se llama por esta razón *distancia* entre los puntos A y B.

2. Líneas poligonales envolventes y envueltas.—Diremos que una línea poligonal simple abierta $ABCDE$ envuelve a otra $AFGE$ cuando ésta queda en el interior del polígono $ABCDE$ limitado por la primera y el segmento que une sus extremos.



La suma de los lados de la envolvente es mayor que la suma de los lados de la envuelta, si ésta determina un polígono convexo.

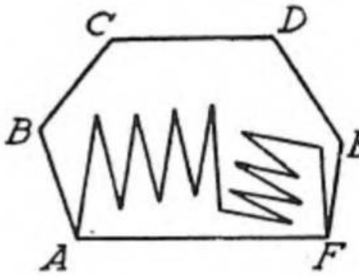
La demostración se funda en la propiedad anterior, prolongando los lados de la envuelta hasta cortar a la envolvente Se tiene, por ejemplo, en la figura:

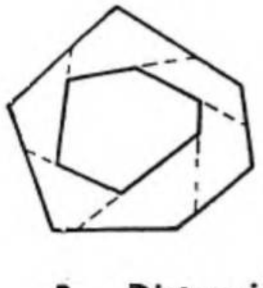
$$AF+FM<AB+BC+CM; \quad FG+GN<FM+MD+DN; \quad GE<GN+NE$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades, y restando de uno y otro miembro los sumandos comunes FM y GN, resulta la desigualdad que expresa el enunciado:

Aunque en la figura anterior se han supuesto convexos los dos polígonos, sólo es preciso que lo sea el envuelto. Intuitivamente se comprende que en el interior de cualquier polígono (convexo o no) pueden trazarse líneas quebradas no convexas cuya suma de lados sea, no sólo mayor que la poligonal envolvente, sino también mayor que culaquier segmento dado (*).

¿En qué punto falla, en tal caso, la demostración anterior?

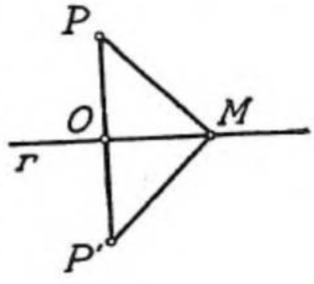




Demuestre el lector, análogamente, que:

Si un polígono convexo es interior a otro, la suma de los lados del primero es menor que la suma de los del segundo.

3. Distancia de un punto a una recta.—*De todos los segmentos que unen un punto* P *con los de una recta* r *que no le contiene, el menor es el segmento de perpendicular* PO



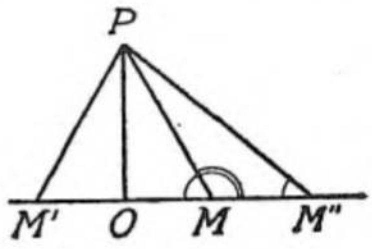
En efecto, si fuese $PO \geqq PM$, construyendo el simétrico P' *se tendría* $PP' \geqq PM+MP'$ en contra de la propiedad establecida en § 1

Este teorema justifica que se llame *distancia* de un punto a una recta al *segmento de perpendicular comprendido entre el punto y la recta.*

Los restantes segmentos llamados *oblicuos* verifican las siguientes propiedades:

(*) La demostración rigurosa de esta afirmación exige el establecimiento del llamado axioma de Arquímedes, que veremos más adelante.

Los segmentos oblicuos que tienen sus extremos (pies) equidistantes del pie de la perpendicular son iguales. También es cierto el recíproco. Demuéstrense.



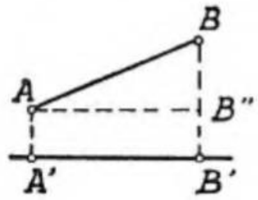
De dos segmentos oblicuos desiguales es mayor el que tiene su pie a mayor distancia del pie de la perpendicular, y recíprocamente. En efecto, en el triángulo PMM'' que forman la recta y las dos oblicuas (trazadas ambas del mismo lado de la perpendicular), la mayor se opone a un ángulo obtuso (suplemento de uno agudo) y la menor se opone a uno agudo.

Con estos conceptos de distancia queda justificada la denominación de *equidistancia* usada en lecciones anteriores.

Dados un punto P, una recta r y un segmento s, mayor que la distancia de P a r, ¿existirá una oblicua igual a s?

La intuición parece contestar afirmativamente. Sin embargo, no es posible dar respuesta rigurosa a esta cuestión con los axiomas hasta ahora establecidos. Hace falta para ello enunciar un nuevo axioma, el de continuidad, que estudiaremos en la lección 13.

4. Proyección de un punto y de un segmento sobre una recta.—El pie A' de la perpendicular de un punto A a una recta r se llama también *proyección ortogonal* o simplemente *proyección* de A sobre r. Se llama proyección de un segmento AB al segmento $A'B'$ determinado por las proyecciones A', B' de sus extremos. (Esta proyección se reduce a punto si A y B están en una perpendicular a r)



Trazando por A la paralela a r se obtiene $AB''=A'B'$ y como $AB''\leqslant AB$ resulta:

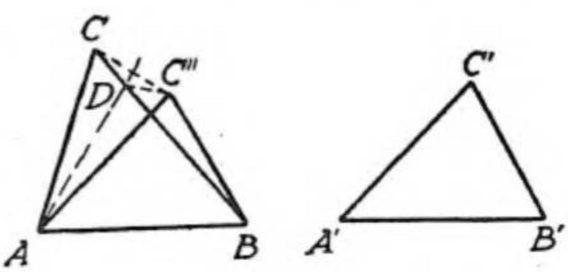
La proyección ortogonal de un segmento es menor o igual que el segmento.

5. Teorema de los triángulos incongruentes.—*Si dos triángulos tienen dos pares de lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido desigual, los lados opuestos a estos ángulos están en la misma relación de desigualdad.*

Es decir, si en los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se verifica

$$AB=A'B', \quad AC=A'C', \quad \sphericalangle A>\sphericalangle A',$$

será también $BC>B'C'$.



En efecto, transportando $A'B'C'$ sobre ABC de modo que coincidan AB y $A'B'$ y los semiplanos de C y C'', obtendremos ABC'' congruente con $A'B'C'$. Por ser $\sphericalangle A>\sphericalangle A'=\sphericalangle C''AB$, la semirrecta AC'' es interior al ángulo A, y la bisectriz del ángulo CAC'' cortará al lado BC en un punto D, tal que $DC=DC''$, por ser dicha bisectriz eje de simetría de $AC=AC''$. Por otra parte, en el triángulo BDC'' es $BC''<BD+DC''=BC$, de donde $B'C'<BC$, como queríamos demostrar.

Recíprocamente: *Si dos triángulos tienen dos pares de lados respectivamente iguales y el tercer lado desigual, los ángulos opuestos a estos lados están en la misma relación de desigualdad.*

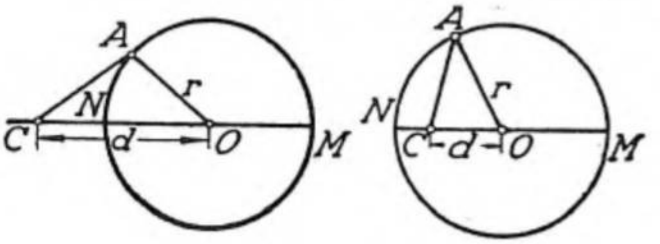
Es decir, si $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ y $BC>B'C'$ es $\sphericalangle A>\sphericalangle A'$

Se demuestra fácilmente por reducción al absurdo, pues si fuese $\sphericalangle A\leqslant\sphericalangle A$ se tendría, por el teorema directo, y por el criterio primero de igualdad de triángulos, $BC\leqslant B'C'$, contra lo supuesto.

Análogamente se puede demostrar, como consecuencia de este teorema, el tercer criterio de igualdad de triángulos, ya demostrado en la lección 6.ª

6. Distancia de un punto a una circunferencia.—Sea d la distancia de un punto C al centro O de una circunferencia de radio r. Si $d>r$ el punto se llama *exterior*. Si $d<r$ el punto se llama *interior*. Demostremos.

El mayor CM *de los segmentos que unen los puntos de una circunferencia con un punto* C *de su plano, distinto del centro* O, *está en la recta* CO *y es igual a* d+r. *El menor* CN *de ellos está en la misma recta y es igual a* d−r *o* r−d, *según que* C *sea exterior o interior*



En efecto, en ambas figuras es $CA<d+r=CM$.
en la figura 1.ª $CA>d-r=CN$.
en la figura 2.ª $CA>r-d=NC$

Al variar A, el segmento CA varía, pues, de $d-r$ a $d+r$ si C es exterior, y de $r-d$ a $r+d$ si es interior, creciendo a medida que crece el ángulo COA, en virtud del teorema que acabamos de demostrar.

Por esta razón al segmento CN $(=d-r$ o $r-d)$ se le llama *distancia* del *punto* C *a la circunferencia* O.

Ahora, bien, dado un segmento r' comprendido entre estas distancias extremas, es decir, $d-r<r'<d+r$, o bien $r-d<r'<r+d$, ¿existirá un punto A de la circunferencia cuya distancia a C valga r'? De otro modo: Una circunferencia de centro C y radio r', que cumpla las anteriores relaciones de desigualdad, ¿tendrá algún punto común con la circunferencia O? Esta es otra cuestión que no puede ser contestada rigurosamente hasta haber establecido el axioma de continuidad (v. lec 13).

EJERCICIOS

1. Demostrar que la distancia de un punto P a otro M interior a un segmento AB, es menor que PA o que PB
2. Demostrar que todo segmento interior a un triángulo es menor que su lado mayor
3. Demostrar que todo segmento interior a un polígono es menor que su lado o diagonal mayor.
4. Demostrar que de dos cuerdas desiguales la mayor es la que dista menos del centro.
5. Demostrar que la altura sobre el lado mayor de un triángulo es interior a él y menor las otras dos.

6. La suma de distancias de un punto interior de un triángulo a los vértices es menor que el perímetro y mayor que el semiperímetro.

7. La suma de las diagonales de un cuadrilátero convexo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del mismo

8. La suma de las distancias de los puntos de la base de un triángulo isósceles a los lados es constante.

9. La suma de distancias de un punto cuaquiera interior de un triángulo equilátero a sus tres lados es constante.

10. ¿Cuántos lados debe tener un polígono convexo para que la suma de sus ángulos interiores: 1.º, exceda en m rectos a la suma de los interiores; 2.º, sea k veces la suma de los exteriores?

11. Sea i el ángulo de incidencia de un rayo luminoso sobre una de las caras de un prisma óptico; sea r el ángulo de refracción correspondiente; sea, a su vez, i' el ángulo de incidencia interior del rayo refractado sobre la otra cara del prisma y, finalmente, r' el ángulo de refracción correspondiente (ángulo del rayo saliente con la normal a la segunda cara). Demostrar las relaciones $\delta=i+r'-\alpha$ y $r+i'=\alpha$, en la que δ es el ángulo de desviación (entre el primer rayo incidente y el segundo refractado) y α es el ángulo diedro de las caras del prisma.
(El rayo incidente se supone en un plano normal a la arista, plano en el que se sitúan asimismo los restantes rayos, razón por la cual el problema es de Geometría plana.)

12. Calcular en función de los ángulos B y C de un triángulo ABC, el ángulo que forman la altura y la bisectriz por A.

13. Calcular en función de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, el ángulo que forman la altura y la mediana que parten del vértice del ángulo recto.

14. Expresar en función de los ángulos de un triángulo; los ángulos del triángulo formado por las bisectrices exteriores; y éstos en función de aquéllos.

15. Expresar los ángulos que forman las bisectrices de dos ángulos de un cuadrilátero convexo en función de los otros dos ángulos de este cuadrilátero.

16. Lugar geométrico de los puntos B' de la figura del § 9 de la lec. 10, si A y B permanecen fijos y C varía conservando el valor del ángulo en C.

17. Trazar por un punto dado una circunferencia equidistante de tres puntos dados no alineados.

18. Sea una poligonal $ABCDEFG$ ... de lados iguales cuyos vértices pares BDF ... están, en este orden, sobre uno de los lados de un ángulo α de vértice A y los impares $ACEG$ ... ordenados sobre el otro lado. Demostrar que $\sphericalangle DBC=2\alpha$; $\sphericalangle DCE=3\alpha$; $\sphericalangle FDE=4\alpha$; ...

19. Fundado en la propiedad anterior, idear un aparato que realice la multiplicación y la división de ángulos por un entero; en particular un aparato para *trisecar* ángulos.

20. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el producto de dos giros no concéntricos sea una traslación es que los ángulos de giro sean iguales y de opuesto sentido. (V. ej. 2.º, lec. 8.ª)

21. Hallar el centro de giro resultante de multiplicar una traslación dada por un giro, dado por su centro y su ángulo. ¿Qué variación experimenta este centro al permutar las operaciones componentes ¿Cuál es el ángulo de giro resultante?

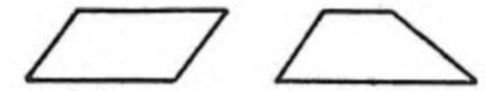
22. Se definen en el plano dos giros por sus centros O_1 y O_2 y sus ángulos de giro α_1 y α_2. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a sus homólogos respectivos en el producto de ambos giros, en el orden dado, sea un segmento dado.

23. Sobre los lados de un triángulo cualquiera ABC se construyen tres triángulos equiláteros ABC', BCA', CAB' hacia el exterior de ABC. Demostrar que: 1.º $AA'=BB'=CC'$. 2.º Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes y cada una de ellas es bisectriz de las otras dos. 3.º Por el punto de concurso de las tres pasan también las circunferencias determinadas por ABC', BCA' y CAB'.

LECCIÓN 12.—LOS CUADRILÁTEROS PLANOS

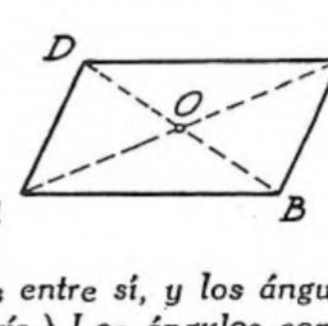
Estudiadas en lecciones anteriores la clasificación y propiedades de los triángulos, veamos ahora la de los cuadriláteros.

1. Clasificación de los cuadriláteros.—Se clasifican los cuadriláteros según el paralelismo de los lados. Sólo pueden ser paralelos los lados *opuestos*, es decir, no consecutivos. Cuando un cuadrilátero tiene sólo un par de lados opuestos paralelos se llama *trapecio*. Si lo son los dos pares se llama *paralelogramo*. Los lados paralelos del trapecio se llaman *bases*.



paralelogramo *trapecio*

2. Simetría del paralelogramo.—Sea $ABCD$ un paralelogramo. En virtud de las propiedades establecidas en lec. 7.ª, la simetría respecto del punto medio O de una diagonal DB transforma cada lado en su opuesto, y el punto A (intersección de DA y BA) en C (intersección de sus opuestos). Por lo tanto, el punto O es también punto medio de la diagonal AC. En resumen:

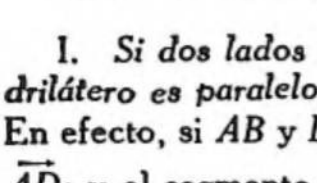


Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Este punto es centro de simetría del paralelogramo. Los lados opuestos son iguales entre sí, y los ángulos opuestos también. (Por ser homólogos en dicha simetría.) *Los ángulos consecutivos son suplementarios* (Por ser conjugados respecto de dos lados opuestos cortados por el lado común.)

También son ciertos los siguientes teoremas:

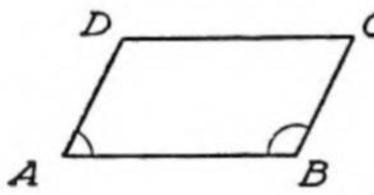
I. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, el cuadrilátero es paralelogramo.* Es decir, son también paralelos los otros dos lados. En efecto, si AB y DC son iguales y paralelos, serán homólogos en la traslación $\overrightarrow{AD}$; y el segmento BC que une dos puntos homólogos será igual y paralelo a AD (lec. 7.ª). De este teorema resulta:

El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un paralelogramo es igual y paralelo a los otros dos lados. Se llama *paralela media*, y como los puntos medios que une son homólogos en la simetría antes establecida, esta recta pasa por su centro. Existen dos paralelas medias.

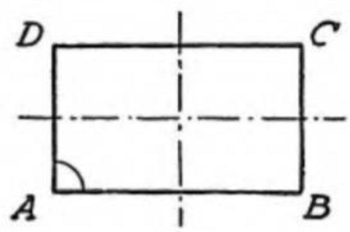


II. *Si los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es paralelogramo.* En efecto, los dos triángulos ADB y CBD son iguales por serlo $AB=CD$, $AD=CB$, $DB=BD$. De aquí resulta $\sphericalangle CDB=\sphericalangle DBA$, y por lo tanto, el paralelismo de los lados (lec. 10).

III. *Si los dos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es paralelogramo.* En efecto, la suma de los cuatro ángulos vale dos llanos, por consiguiente dos de ellos no opuestos (consecutivos), por ejemplo, A y B, sumarán la mitad, o sea un llano. Y como estos ángulos son conjugados respecto de las rectas AD y BC cortadas por AB, resulta el paralelismo de los lados opuestos AD y BC. Y lo mismo el otro par



3. Simetrías del rectángulo.—Si uno de los ángulos de un paralelogramo es recto, lo son los otros tres, como suplementarios o iguales a él, y la figura se llama *rectángulo*. El rectángulo tiene, pues, todas las propiedades del paralelogramo, y además las siguientes específicas:

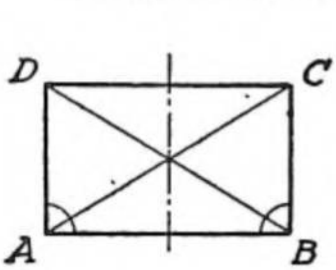


Las paralelas medias son mediatrices de los lados, por ser perpendiculares en los puntos medios. De donde:

Las paralelas medias son ejes de simetría del rectángulo.

Las dos diagonales AC *y* BD *de un rectángulo son iguales.* Por ser homólogas en aquellas simetrías.

Recíprocamente: *Si las dos diagonales de un paralelogramo son iguales, el paralelogramo es rectángulo.* En efecto, los dos triángulos ABD y BAC son iguales por tener respectivamente iguales los tres lados. De aquí: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA$, y como además estos ángulos son suplementarios, cada uno de ellos valdrá un recto.

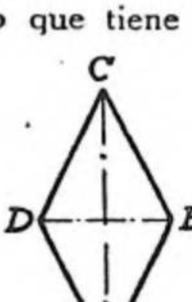


Si un cuadrilátero tiene los cuatro ángulos iguales es rectángulo. (Demuéstrese.)

4. Simetrías del rombo.—Llámase *rombo* a un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales. Son pues, iguales los opuestos, y por tanto, *todo rombo es paralelogramo* (§ 2, II).

El rombo tiene, pues, todas las propiedades del paralelogramo, y además las siguientes propias:

Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí y son ejes de simetría del rombo. En efecto, cada par de vértices opuestos equidista del otro par, y por tanto, cada diagonal es mediatriz de la otra (lec. 6.ª).

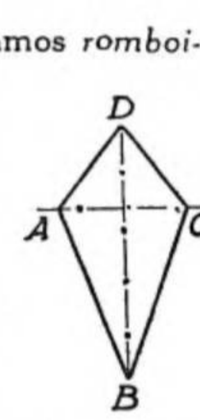


5. Simetrías del cuadrado.—Un rectángulo con lo. cuatro lados iguales se llama *cuadrado*.

Todo cuadrado es, pues, rectángulo y rombo, y tiene las propiedades enunciadas para ambos. En particular:

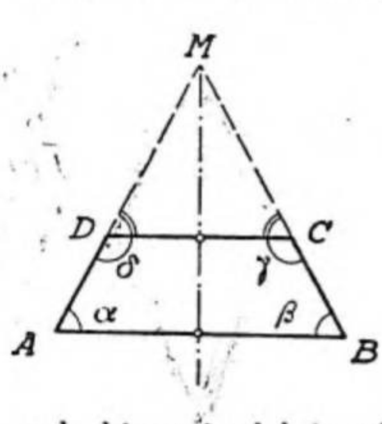
El cuadrado tiene un centro y cuatro ejes de simetría que son las paralelas medias y las diagonales.

6. Simetrías del romboide y del trapecio isósceles.—Llamamos *romboide* a todo cuadrilátero $ABCD$ con dos pares de lados consecutivos iguales (*). Por ejemplo, lo es el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, en el cual son $AB=BC$, $CD=DA$.



Por ser B y D equidistantes de A y C, BD es la mediatriz de AC. De donde:

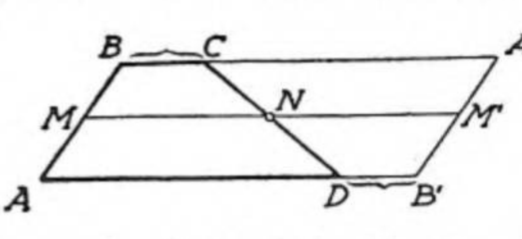
El romboide es simétrico respecto de la diagonal que une los vértices en que concurren los lados iguales. Esta diagonal es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une. Los ángulos de los otros dos vértices son iguales entre sí (simétricos).



Un cuadrilátero con dos pares de ángulos consecutivos iguales (no rectos) es un trapecio, cuyos lados no básicos son iguales entre sí. Se llama por esta razón *trapecio isósceles.*

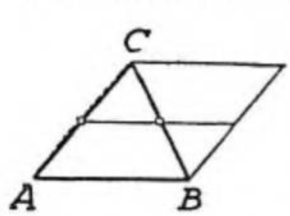
En efecto, si es $\left\{\begin{matrix}\alpha=\beta\\ \delta=\gamma\end{matrix}\right\}$ será $\alpha+\delta=\beta+\gamma=2$ rectos, de donde resulta el paralelismo de AB y CD. Además, prolongando los lados no paralelos AD y CB, se forman dos triángulos isósceles ABM y DCM, y la bisectriz del ángulo común M es eje de simetría de la figura, y por tanto $AD=BC$ (lec. 6.ª, § 2).

7. Paralela media de un trapecio y de un triángulo.—El segmento MN que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, se llama *paralela media*, denominación que justifica el siguiente teorema:



La paralela media de un trapecio es paralela a las bases e igual a la mitad de su suma.

Para demostrarlo construyamos el trapecio simétrico del dado respecto del punto medio N del lado CD. Por el paralelismo de las rectas simétricas, ambos trapecios formarán un paralelogramo del que será paralela media el segmento MM' formado por MN y su simétrico NM'. Pero MM' es igual a la base AB' del paralelogramo, que es precisamente la suma de las bases del trapecio, de donde resulta el teorema.



Análogamente demostrará el lector que:

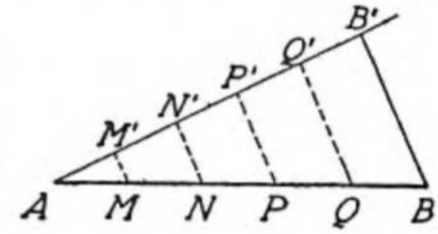
El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad. En un triángulo existen, pues, tres paralelas medias, correspondientes a cada uno de los tres lados, que también se llaman *bases* en muchas ocasiones.

(*) Adoptamos esta denominación de Rey Pastor, por parecernos más útil que la aplicación clásica que de esta palabra se hace para designar un paralelogramo que no sea rombo ni rectángulo, y que carece de interés.

Como por un punto no hay más que una paralela a una recta, ni existe más que un punto medio de un segmento dado, podemos afirmar:

Lo mismo en un triángulo que en un trapecio, la paralela a una base por el punto medio de un lado corta también al otro lado en su punto medio.

8. División de un segmento en partes iguales.—La propiedad anterior sirve para demostrar la clásica división de un segmento en partes iguales. Para dividir, por ejemplo, el segmento AB en cinco partes iguales, llevaremos sobre una semirrecta de origen A y no situada en la recta AB, cinco segmentos consecutivos iguales $AM' = M'N' = N'P' = P'Q' = Q'B'$; y por los puntos de división trazaremos paralelas a la recta $B'B$ que une el último extremo B' con el extremo B del segmento dado. Los puntos M, N, P, Q de intersección de dichas paralelas con el segmento dado le dividen en cinco iguales.



En efecto: En el triángulo ANN' la recta $M'M$ es la paralela media correspondiente al lado NN', luego M es punto medio de AN, es decir, $AM = MN$. Análogamente NN' es paralela media del trapecio $M'MPP'$, de donde $MN = NP$. Y así sucesivamente $NP = PQ$ y $PQ = QB$. Es decir, el segmento AB ha quedado dividido en cinco segmentos iguales entre sí.

Esta construcción exige el transporte de un segmento y el trazado de la paralela, y, según hemos visto en la lección 7.ª, no necesitamos para ello más instrumento que la cartulina de un borde rectilíneo. Claro es que se supone este borde lo suficientemente extenso para poder trazar los segmentos indicados.

EJERCICIOS

1. ¿Qué figuras limitan las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo (no rombo)?
2. Idem de un rectángulo.
3. Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera son vértices de un paralelogramo.
4. Demostrar que el producto de cuatro simetrías respecto de los vértices consecutivos de un paralelogramo es la identidad.
5. Trazar por un punto P interior a un ángulo un segmento limitado por sus lados y bisecado por P.
6. Dadas dos fajas de plano secantes (lecc. 9, § 12), trazar por un punto una recta que intercepte en ellas dos segmentos iguales.
7. Expresar en función de las bases de un trapecio la distancia entre los puntos medios de las diagonales.
8. Demostrar que los tres segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero y los de sus diagonales concurren en el punto medio de los tres.
9. Sea $ABCD$ un paralelogramo; E y F los puntos medios de los lados opuestos AB y CD. Demostrar que DE y FB dividen en tres partes iguales a la diagonal AC.
10. Lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que unen los puntos homólogos de dos rectas homólogas en un movimiento.

Capítulo IV.—CONTINUIDAD Y CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES CON REGLA Y COMPAS

LECCIÓN 13.—AXIOMA DE CONTINUIDAD. FUNDAMENTO TEÓRICO DEL USO DEL COMPÁS

1. Construcciones posibles e imposibles sin el uso del compás.— Todas las construcciones que hemos realizado hasta ahora: trazado de mediatrices, bisectrices, perpendiculares, paralelas, etc., han podido ser resueltas combinando las cuatro operaciones elementales siguientes:

Trazado de una recta por dos puntos
Intersección de dos rectas
Transporte de un segmento
Transporte de un ángulo

y se han podido realizar, por consiguiente, sin más instrumento que una *cartulina con un borde rectilíneo.*

Son muchas otras las construcciones que pueden ser realizadas con tan sencillo instrumento. Por ejemplo: La construcción de un triángulo dados un lado y dos ángulos, o dos lados y el ángulo comprendido.

El lector efectuará fácilmente construcciones, como las que corresponden a los siguientes problemas: Construcción de un paralelogramo dados dos lados consecutivos y un ángulo, o bien, dadas las dos diagonales y el ángulo que forman. Construcción de un rectángulo dados los lados. Idem de un rombo dados el lado y un ángulo, o dadas las dos diagonales. Idem de un cuadrado dado el lado, o dada la diagonal. Idem de un trapecio dadas las bases un lado y un ángulo, etc.

En cambio este instrumento no es suficiente para resolver otros problemas geométricos clásicos. Por ejemplo: La construcción de un triángulo dados los tres lados, o dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Análogamente imposible resultaría la construcción de un paralelogramo dados dos lados y una diagonal; de un rombo o de un rectángulo dados una diagonal y un lado; de un trapecio dados los cuatro lados, etc.

Para resolver estas y otras construcciones es necesario introducir operaciones geométricas fundamentales nuevas, que se realizan con el uso del compás; a saber:

Trazar una circunferencia de centro y radio dados.
Hallar las intersecciones de una recta y una circunferencia
Hallar las intersecciones de dos circunferencias.

Pero para dar el debido fundamento teórico a estas operaciones es necesario demostrar la existencia efectiva de dichas intersecciones. Euclides la admitió axiomáticamente en sus «Elementos». Modernamente se deduce como consecuencia del axioma de continuidad, último de los axiomas sobre los que edificamos la Geometría plana, y que tiene excepcional importancia ulterior en la teoría de la medida.

La cuestión no es tan trivial como pudiera parecer a primera vista a un lector ingenuo. Aun cuando sea adelantando ideas, imagine éste en una recta, elegido un origen y un segmento unidad, y considere sólo los puntos de abscisa racional. Este conjunto de puntos es *ordenado y denso*, con lo que parece responder perfectamente a nuestro concepto intuitivo de recta. Pues bien, si no admitimos de algún modo la existencia de nuevos puntos en la recta, ésta no cortaría, es decir, no tendría punto alguno común con muchas circunferencias que admitimos como secantes, por ejemplo la de radio 2 y de centro a distancia 1 en una perpendicular por el origen. En efecto, su abscisa habría de valer $\pm\sqrt{3}$.

Es fácil imaginar ahora la complicación que este hecho y otros análogos originaría. Así, pues, lo mismo que en Aritmética se crea el número irracional para llenar lagunas similares, es preciso admitir aquí la existencia de nuevos puntos en la recta, y esto es, precisamente, lo que establece el axioma de continuidad.

2. Axioma de continuidad.—Hemos visto en la lección 2.ª que todo punto de una recta establece una clasificación de los restantes en *precedentes* y *siguientes* a él. Podemos preguntarnos si, recíprocamente: a toda clasificación que cumpla idénticas condiciones de ordenación corresponde un punto. La intuición parece admitirlo así: démosle, pues, expresión explícita enunciando el siguiente axioma (*):

Ax. V (AXIOMA DE DEDEKIND).—*Dada una clasificación de los puntos de una recta en dos clases* C_1 *y* C_2 *que cumplan las condiciones:*
1.ª, *existen puntos de la recta en una y otra clase;*
2.ª, *todo punto de la recta está en una u otra clase;*
3.ª, *todo punto de* C_1 *precede a todo punto de* C_2,
existe un punto, y sólo uno, P, *de la recta tal que todos los puntos que le preceden pertenecen a la clase* C_1, *y todos los que le siguen pertenecen a la clase* C_2.

Llamaremos a este punto *frontera* de las dos clases.

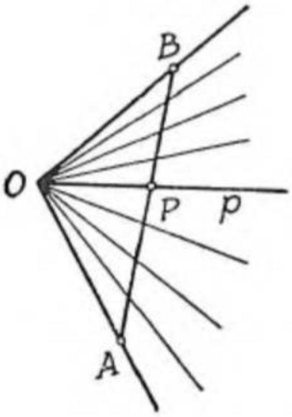
El axioma no precisa a cuál de las dos clases pertenece *P*; pero, debiendo pertenecer a una u otra, por virtud de las premisas del propio axioma, resulta: El punto frontera *P* es el último elemento de la clase C_1 (es decir, sigue a todos los demás de ella) o el primero de la clase C_2 (precediendo a todos los demás).

ESCOLIO.—Admitido este axioma, es inmediata su validez sustituyendo la

(*) Preferimos este axioma *único*, que sólo exige conceptos de *ordenación*, al conjunto equivalente de los axiomas de *Cantor* y *Arquímedes* que exigen, además, conceptos de congruencia y desigualdad.

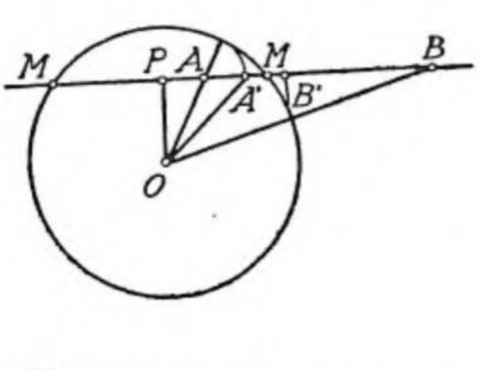
palabra «recta» por «semirrecta» o «segmento»; pues, sin alterar la ordenación de las clases podemos agregar a una u otra los puntos necesarios para completar la recta y cumplir así el enunciado.

También subsiste la validez del axioma para los rayos de un ángulo convexo; es decir, sustituyendo las palabras «punto» y «recta» respectivamente por «rayo» y «ángulo convexo». En efecto, uniendo dos puntos de sus lados se obtiene un segmento cuyos puntos están en correspondencia biunívoca con los rayos del ángulo, y como en esta correspondencia se conserva el orden, si los rayos cumplen las premisas del axioma, también las cumplirán los puntos del segmento, con lo que, proyectando el punto frontera P se obtendrá el rayo p frontera de las dos clases. Añadiendo rayos a una y otra clase, fuera del ángulo convexo, es decir, sin alterar la ordenación de las mismas, se puede pasar de un ángulo convexo a uno cualquiera.



Finalmente, el axioma de Dedekind, al ser válido para un ángulo llano, lo es también para los *puntos de una semicircunferencia*, supuestos ordenados como los radios correspondientes.

3. Intersección de una recta con una circunferencia.—LEMA.—*Si una recta tiene un punto* $\left\{\begin{array}{l} A \textit{ interior} \\ B \textit{ exterior} \end{array}\right\}$ *a una circunferencia, tiene otro punto* $\left\{\begin{array}{l} A' \textit{ interior, a mayor} \\ B' \textit{ exterior, a menor} \end{array}\right\}$ *distancia del centro que el* $\left\{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right\}$



Sea P el pie de la perpendicular. Llevemos en el sentido PA, como indica la figura, un segmento $AA'=r-OA$, y en el sentido BP otro $BB'=OB-r$ Se tendrá, por la propiedad de las oblicuas, $OA'>OA$ y $OB'<OB$, y además por construcción, $OA'<OA+AA'=r$ y $OB'>OB-BB'=r$, de modo que A' sigue siendo interior y B' exterior.

TEOREMA FUNDAMENTAL.—*Toda recta que tiene un punto* A *interior a una circunferencia tiene dos puntos comunes con ella.*

Para demostrarlo, sea A el punto interior y P el pie de la perpendicular desde el centro a la recta. Clasifiquemos los puntos de cada una de las semirrectas determinadas por P, en las dos clases siguientes: Clase C_1 formada po. puntos interiores a la circunferencia; clase C_2 formada por puntos no interiores Se verifica:

1.° Existen en cada semirrecta puntos de la clase C_1 (el A o su simétrico respecto a P) y de la clase C_2 (basta tomar un punto B, tal que $PB>r$, con lo que $OB>PB>r$).

2.° Todo punto de la semirrecta es interior o no interior.

3.° En el sentido definido en cada una de las semirrectas todo punto de C_1 precede a todo punto de C_2 (por la propiedad de las oblicuas).

Verificadas las tres condiciones que exige el axioma, existe en cada semirecta un punto M y sólo uno tal que todo punto precedente a él en la semirecta correspondiente pertenece a la clase C_1, y todo punto siguiente pertenece a la clase C_2. Ahora bien, este punto M pertenece necesariamente a la circunferencia; es decir, $OM=r$, pues si fuera OM mayor o menor que r, existiría, respectivamente, en virtud del lema, otro punto precedente perteneciente a la clase C_2, u otro siguiente de la clase C_1, en contradicción con el axioma.

4. **Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.**—Una recta que tiene dos puntos comunes con una circunferencia se llama *secante* de la misma Si tiene un solo punto, ya dijimos (lec. 9.ª) que se llama *tangente*. Si no tiene ningún punto común, es decir, si todos los puntos son exteriores, la recta se llama *exterior*.

Si la distancia de una recta al centro de una circunferencia es menor, igual o mayor que el radio, la recta es, respectivamente, secante, tangente o exterior.

El primer caso es el que acabamos de demostrar.

El segundo caso se estableció en la lección 9.ª

El tercero es consecuencia de las propiedades de las oblicuas, pues cualquier punto de la recta distará del centro más que el pie de la perpendicular.

5. **Principio de reciprocidad.**—La proposión anterior se compone de tres.

Sus hipótesis se completan, es decir, no cabe formular ninguna otra respecto de la relación que liga la distancia de la recta al centro con el radio r. Es $d<r$, o bien $d=r$, o bien $d>r$.

Sus tesis se excluyen; es decir, no puede ocurrir que sea la recta a un mismo tiempo secante y tangente o secante y exterior o tangente v exterior

Vamos a probar que los recíprocos de estas proposiciones son ciertos Es decir:

Si una recta es secante, tangente o exterior, su distancia al centro es, respectivamente, menor, igual o mayor que el radio.

En efecto, si la recta es secante, debe ser $d<r$, pues si así no fuera tendría que verificarse alguna otra de las relaciones que completan a ésta, es decir, $d=r$ ó $d>r$, en cuyo caso, en virtud de las proposiciones directas, sería la recta tangente o exterior, lo cual contradiría la hipótesis establecida por ser dichos caracteres excluyentes. Análogamene se prueban los demás.

De un modo general, podemos enunciar el siguiente

PRINCIPIO DE RECIPROCIDAD.—*Si son ciertos varios teoremas cuyas hipótesis* H_1, H_2, ... H_n *se completan y cuyas correspondientes tesis* T_1, T_2, ... T_n *se excluyen, todos los recíprocos son también ciertos.*

Por ejemplo: Si se verifica T_2, se verifica H_2. En efecto, al no verificarse H_2, se verificaría cualquiera de las hipótesis H_1, H_3, ... H_n que completan H_2; y, por consiguiente, en virtud de los teoremas directos, se verificarían T_1, ó T_3, ... ó T_n, lo cual excluiría el supuesto de verificarse T_2.

En razonamientos anteriores hemos hecho ya tácitamente uso de este principio. (V., por ejemplo, teorema de los triángulos incongruentes.)

6. Intersección de dos circunferencias.— LEMA.—*Si una circunferencia O tiene un punto* $\left\{\begin{matrix}\text{A } \textit{interior} \\ \text{B } \textit{exterior}\end{matrix}\right\}$ *a otra, tiene otro punto* $\left\{\begin{matrix}\text{A}' \textit{ interior} \\ \text{B}' \textit{ exterior}\end{matrix}\right\}$ *a la misma, y a* $\left\{\begin{matrix}\textit{mayor} \\ \textit{menor}\end{matrix}\right\}$ *distancia de su centro*

Sea O' el centro de la segunda circunferencia y r' su radio.

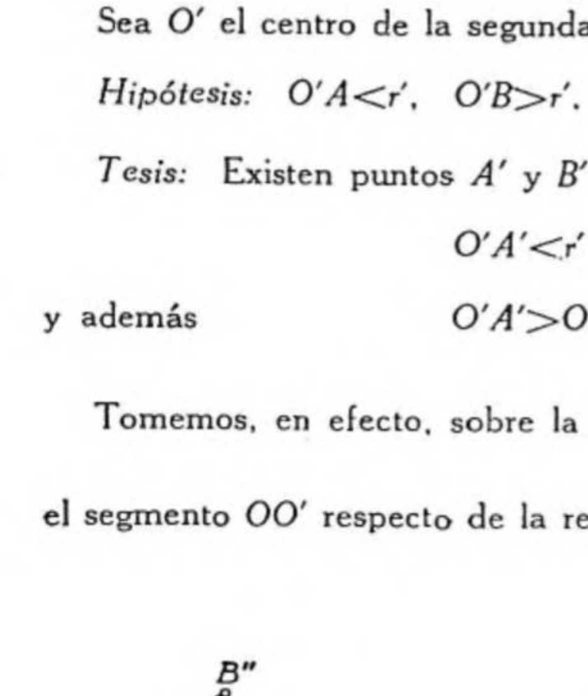
Hipótesis: $O'A<r'$, $O'B>r'$. $OA=OB=r$.

Tesis: Existen puntos A' y B' tales que $OA'=OB'=r$

$$O'A'<r' \qquad O'B'>r'$$

y además
$$O'A'>OA \qquad O'B'<OB$$

Tomemos, en efecto, sobre la tangente en $\left\{\begin{matrix}A \\ B\end{matrix}\right\}$ a y $\left\{\begin{matrix}\text{distinto} \\ \text{un mismo}\end{matrix}\right\}$ lado que el segmento OO' respecto de la recta $\left\{\begin{matrix}OA \\ OB\end{matrix}\right\}$ un segmento $\left\{\begin{matrix}AA''=r'-O'A \\ BB''=O'B-r'\end{matrix}\right\}$



Proyectando el punto $\left\{\begin{matrix}A'' \\ B''\end{matrix}\right\}$ desde el centro O sobre la circunferencia se tiene un nuevo punto $\left\{\begin{matrix}A' \\ B'\end{matrix}\right\}$ que cumple las condiciones del enunciado. Pues en el triángulo $\left\{\begin{matrix}AA''A' \\ BB''B'\end{matrix}\right\}$ el ángulo $\left\{\begin{matrix}A' \\ B'\end{matrix}\right\}$ es obtuso (adyacente a uno agudo de un triángulo isósceles) mientras $\left\{\begin{matrix}A'' \\ B''\end{matrix}\right\}$ es agudo (por pertenecer a un triángulo rectángulo en A ó B).

Por lo tanto $\left\{\begin{matrix}AA'<AA'' \\ BB'<BB''\end{matrix}\right\}$; de donde $\left\{\begin{matrix}O'A'\leqslant O'A+AA'<O'A+AA''=r' \\ O'B'\geqslant O'B-BB'>O'B-BB''=r'\end{matrix}\right\}$ lo que demuestra la primera parte de la tesis.

Pero además, por construcción $\left\{ \begin{array}{c} \sphericalangle O'OA' > \sphericalangle O'OA \\ \sphericalangle O'OB' < \sphericalangle O'OB \end{array} \right\}$; de donde, por la propiedad de los triángulos incongruentes $\left\{ \begin{array}{c} O'A' > O'A \\ O'B' < O'B \end{array} \right\}$; lo que prueba la segunda parte.

La construcción y el razonamiento son aplicables igualmente a los puntos M y N del diámetro OO' en cualquiera de los sentidos

TEOREMA FUNDAMENTAL.—*Si una circunferencia tiene un punto* A *interior y otro* B *exterior a otra circunferencia de su plano, tiene con ella dos puntos comunes.*

Consideremos dividida la primera circunferencia en dos semicircunferencias MN por la recta OO', que une sus centros, y clasifiquemos los puntos de cada una de estas semicircunferencias en dos clases. la de los puntos interiores a la circunferencia O' y la de los no interiores. Evidentemente: 1.° Existen en cada semicircunferencia puntos pertenecientes a una y otra clase (los puntos A y B o sus simétricos respecto de la recta de centros); 2.° Todo punto de cada semicircunferencia pertenece a una u otra clase; 3.° Ordenados los puntos de cada semicircunferencia en el sentido de los ángulos $O'OA$, $O'OB$ crecientes, quedarán también ordenadas las distancias $O'A$, $O'B$ en sentido creciente y viceversa (por el teorema de los triángulos incongruentes) Por consiguiente, todo punto de la primera clase precede en dicha ordenación a todo punto de la segunda.

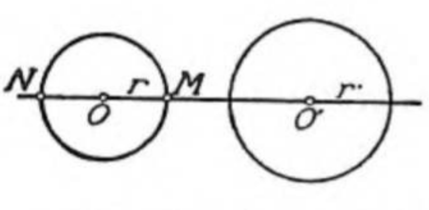
Verificadas así las premisas del axioma de Dedekind para cada una de las semicircunferencias mencionadas, habrá en cada una de ellas un punto $\left\{ \begin{array}{c} P \\ Q \end{array} \right\}$ frontera de las dos clases, tal que todo punto precedente o siguiente pertenece respectivamente a la primera o segunda clase. Ahora bien, P y Q pertenecen a la circunferencia O', pues si fuesen $\left\{ \begin{array}{c} \text{interiores} \\ \text{exteriores} \end{array} \right\}$ habría, en virtud del lema puntos $\left\{ \begin{array}{c} \text{siguientes} \\ \text{precedentes} \end{array} \right\}$ también pertenecientes a la clase $\left\{ \begin{array}{c} \text{primera} \\ \text{segunda} \end{array} \right\}$ en contra del axioma.

7. Posiciones de dos circunferencias.—Comparando la distancia d entre los centros con la suma y diferencia de los radios r y r', supuestos distintos, $r<r'$ caben los siguientes casos que se completan:

1.° $d>r'+r$ 2.° $d=r'+r$

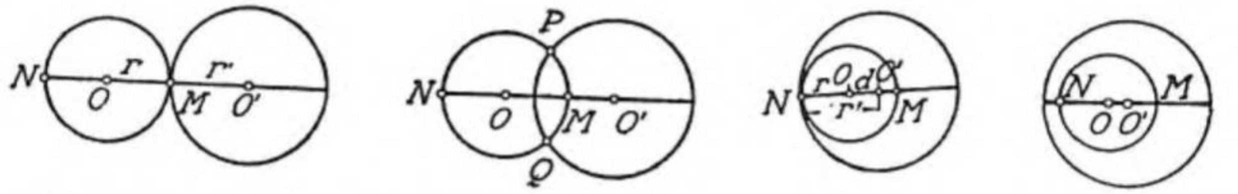
3.° $r'+r>d>r'-r$ 4.° $d=r'-r$

5.° $r'-r>d$



Caso 1.° Se tendrá $d-r>r'$, lo que prueba que la mínima distancia MO' de la circunferencia O al punto O' es mayor que el radio r' o sea que todos los puntos de O son exteriores a O', y viceversa. Las circunferencias se llaman en este caso *exteriores* entre sí.

Caso 2.° $d-r=r'$ El punto M de O más próximo a O' pertenece a ambas circunferencias. Todos los demás puntos de cada una de ellas son exteriores a la otra y las circunferencias se llaman *tangentes exteriormente*.



Caso 3.° $d-r<r'$; en cambio $d+r>r'$. El punto más próximo M es interior y el más alejado N es exterior a la circunferencia O'. En virtud del teorema fundamental anterior, *ambas circunferencias tendrán dos puntos comunes, que,* por la simetría de ambas circunferencias respecto de su recta diametral común, *serán* también *simétricos respecto de la recta que une los centros*. Las circunferencias se llaman *secantes* entre sí.

Caso 4.° $d+r=r'$. El punto N más alejado pertenece a la circunferencia O'; los demás son interiores a ella, y la circunferencia O se dice que es *tangente interiormente* a la O'.

Caso 5.° $d+r<r'$. El punto más alejado a N, y por consiguiente todos los demás de O son interiores a O'; y se dice que la circunferencia O es interior a la O.

Resumiendo los cinco casos en un solo teorema, podemos enunciar

Si la distancia d *entre los centros de dos circunferencias de radios diferentes* $r<r'$ *cumple la condición.*

$d<r'+r$	*las dos circunferencias son exteriores.*
$d=r'+r$	*las dos circunferencias son tangentes exteriormente.*
$d<r'+r$ $d>r'-r$	*las dos circunferencias son secantes.*
$d=r'-r$	*la de radio* r *es tangente interior a la otra.*
$d<r'-r$	*la de radio* r *es interior a la otra.*

Como las hipótesis de estos cinco teoremas se completan y las tesis se excluyen, los recíprocos son ciertos y el lector los enunciará fácilmente.

Si las circunferencias son de igual radio $r-r=0$, sólo tienen validez los enunciados y demostraciones de los tres primeros casos. La condición del tercer caso se reduce a $d<r'+r=2r$, de donde resulta:

Dos circunferencias iguales cuya distancia entre centros sea menor que el doble del radio son secantes.

LECCIÓN 14.—CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

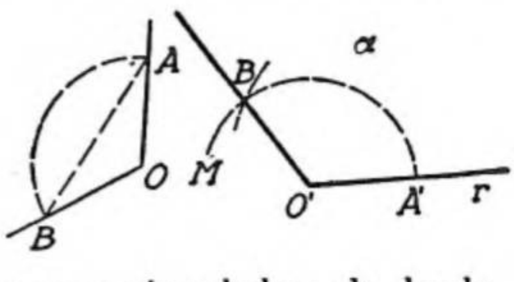
En la lección anterior hemos dado el fundamento teórico necesario a las dos operaciones características del compás, demostrando la existencia de las intersecciones de una recta y una circunferencia y las de dos circunferencias, en ciertas condiciones. Veamos ahora cómo, mediante este instrumento y la regla, no sólo ampliamos nuestro campo de construcciones sino que podemos realizar también las anteriores; es decir el transporte de segmentos y de ángulos, y las que de éstas se derivaron.

He aquí, pues, las operaciones que, siguiendo la escuela griega, vamos a considerar como fundamentales en lo sucesivo:

Trazar la recta que une dos puntos }
Hallar el punto de intersección de dos rectas } (uso de la regla).
Trazar una circunferencia de centro y radio dados (compás).
Intersección de recta y circunferencia (regla y compás).
Intersección de dos circunferencias (compás).

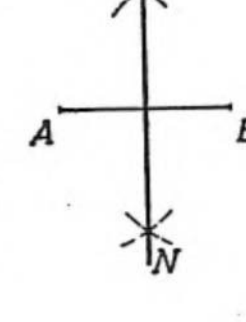
1. El compás usado como transportador de segmentos y de ángulos.—En la lección 9.ª hemos hablado ya del transporte de segmentos mediante el compás, que se usa, a tal fin, con ambas puntas metálicas (compás de puntas).

El transporte de ángulos exige ya el trazado de arcos de circunferencia y la intersección de ellos. Dado el ángulo AOB, para trazar otro igual $A'O'B'$ sobre la semirecta $O'r$ en el semiplano α, señalaremos en el ángulo dado $OA=OB$; trazaremos en α a partir de r, con centro O' y radio$=OA$, el arco $A'M$ y le cortaremos por otro de centro A' y de radio $A'B'=AB$. Los triángulos AOB y $A'O'B'$ son iguales por la igualdad de sus tres respectivos lados; de donde $\sphericalangle A'O'B'=\sphericalangle AOB$.



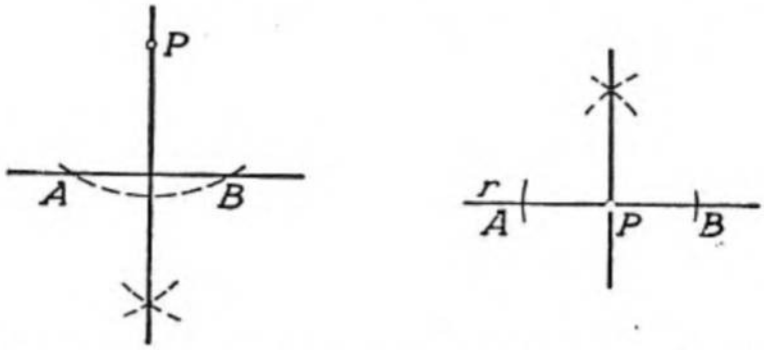
(Obsérvese que los arcos se cortan, por cumplir sus radios y la distancia entre centros la condición 3.ª del teorema del § 7 de la lección anterior, ya que son iguales, por construcción, a los lados del triángulo AOB.)

Con igual facilidad completará el lector el detalle de las demostraciones de las conocidas construcciones clásicas siguientes, que no haremos más que recordar:

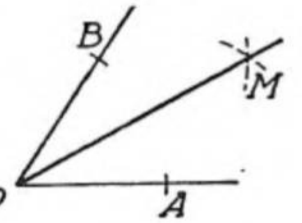


2. Trazado de la mediatriz de un segmento AB.—Se obtiene uniendo dos puntos M y N equidistantes de los extremos A y B, construídos por intersección de dos arcos de igual radio, con centro en dichos extremos y de radio suficiente para que se corten.

3. Trazado de la perpendicular por un punto P a una recta r.—Se

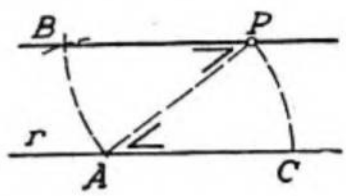


reduce al problema anterior construyendo previamente sobre la recta dos puntos A y B equidistantes del punto dado P

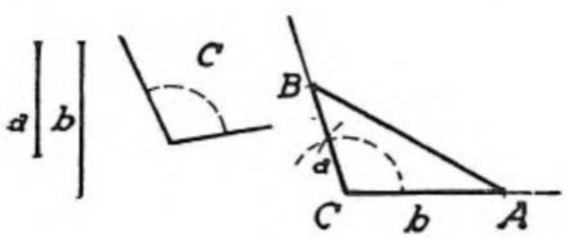


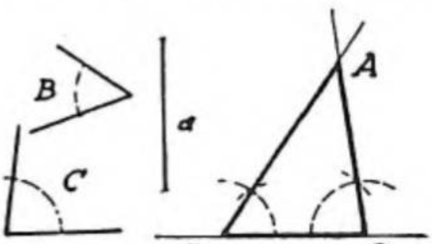
4. Trazado de la bisectriz de un ángulo.—Se toman sobre sus lados $OA = OB$, y con el mismo radio y centro en A y en B dos arcos que se cortarán en M. OM es la bisectriz del ángulo AOB por ser diagonal del rombo $OAMB$.

5. Trazado de la paralela por un punto a una recta.— La clásica construcción que reproduce la figura equivale al trazado de una transversal PA y de un ángulo APB alterno interno e igual al PAC (véase transporte de un ángulo en § 1).



6. Construcción de triángulos.—Recordemos que los lados se designan por las minúsculas a, b, c, correspondientes a los vértices opuestos A, B, C.





1.° *Dados dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido* $\sphericalangle$C.

La construcción se reduce al simple transporte de los datos.

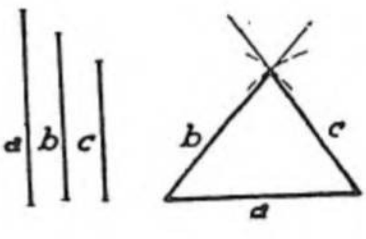
2.° *Dados un lado* a *y dos ángulos* $\sphericalangle$B *y* $\sphericalangle$C.

Dados dos ángulos, puede hallarse el tercero construyendo por transporte el suplementario de su suma; por eso suponemos en la construcción conocidos los ángulos contiguos al lado dado. Transportándolos sobre los extremos de éste en un mismo semiplano se construirá el triángulo.

La solución existe si la suma de estos dos ángulos es menor que dos rectos (Euclides).

3.° *Dados los tres lados.*

El problema se reduce a hallar la intersección de dos circunferencias cuyos centros son los extremos de un lado a y cuyos radios son los otros dos b y c. Por tanto, sólo tendrá solución cuando sea $a<b+c$ y $a>b-c$; que son, por otra parte, condiciones que deben cumplir los lados de todo triángulo.

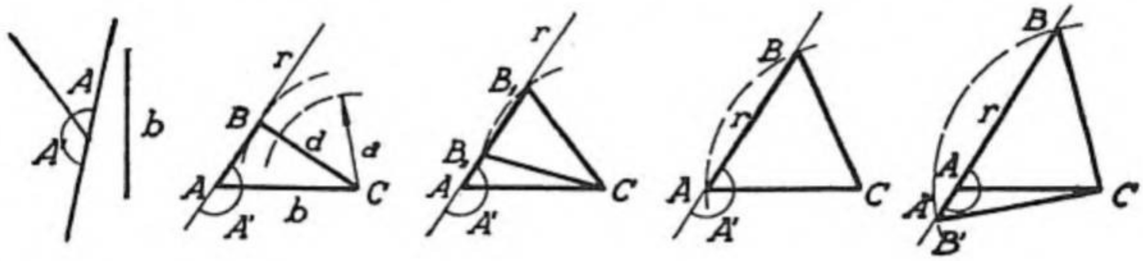


En la lección 10 vimos que estas condiciones eran *necesarias*; ahora vemos que también son *suficientes* para que los tres segmentos formen triángulo.

En los tres casos anteriores todos los triángulos que se obtengan con unos mismos datos son iguales, por los criterios de congruencia de triángulos y en este sentido se dice que *la solución es única*. No ocurre así en la construcción que sigue:

4.° *Dados dos lados* a *y* b *y el* $\sphericalangle$ A *opuesto a uno de ellos.*

Sobre uno de los lados del ángulo A llevaremos el lado contiguo b conocido. Haciendo centro en su extremo C y con radio a trazaremos una circunferencia. Su intersección (B, B_1) con la recta del otro lado r determina el triángulo.



Discusión: Sea d la distancia de C al lado opuesto. Se tiene $d<b$.

Si es $a<d$ no existe solución, por ser la recta r exterior a la circunferencia trazada.

Si es $a=d<b$ la circunferencia es tangente y existe una solución, sólo válida si es también $\sphericalangle A<\sphericalangle B$ (recto, es decir, $\sphericalangle A$ agudo).

Si es $d<a<b$ la circunferencia es secante y las dos intersecciones están del mismo lado de A en la recta r (por las propiedades de las oblicuas). Tendremos, pues, dos soluciones válidas si $\sphericalangle A$ es agudo, y ninguna si $\sphericalangle A$ es obtuso.

Si $a=b$, una de las intersecciones coincide con A. La otra es válida solamente si $\sphericalangle A$ es agudo (triángulo isósceles).

Si es $a>b$ la circunferencia sigue siendo secante a la recta r dando una intersección a cada lado del punto A, y existe, por lo tanto, una sola solución lo mismo para $\sphericalangle A$ agudo que para $\sphericalangle A$ obtuso. Ambas soluciones son simétricas si $\sphericalangle A$ es recto.

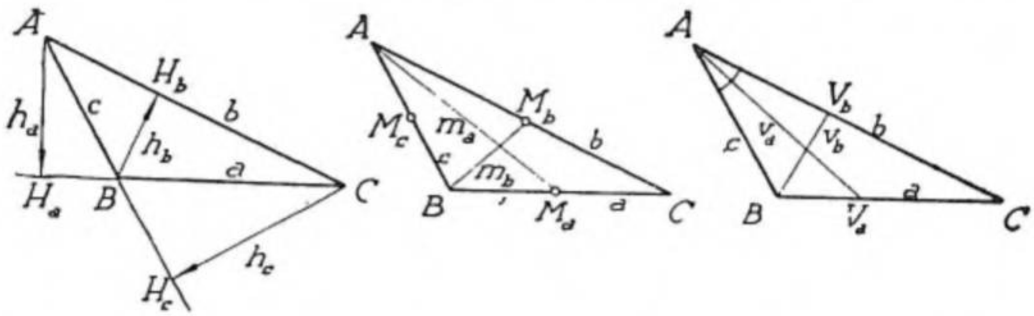
7. Construcción de triángulos rectángulos y de triángulos isósceles.— Como casos particulares de los anteriores (1.°, 2.° y 4.°), el lector resolverá fácilmente la construcción de un triángulo rectángulo, conocidos:

a) *los dos catetos*; b) *un cateto y un ángulo*; c) *la hipotenusa y un ángulo*; d) *la hipotenusa y un cateto.*

Asimismo resolverá la construcción de un triángulo isósceles conocidos: I y II) *un lado y un ángulo, o la base y un ángulo*; III) *la base y un lado*.

8. Construcción de un triángulo dada alguna altura, mediana o bisectriz.— Designaremos por h_a, h_b, h_c las tres *alturas* del triángulo, llamando así a las distancias respectivas de los vértices A, B, C del triángulo a las rectas de sus lados opuestos a, b, c Se designarán por H_a, H_b, H_c los pies de dichas alturas.

Designaremos por m_a, m_b, m_c las tres *medianas*, llamando así a las distancias de cada vértice A, B, C al punto medio M_a, M_b, M_c del lado opuesto.



Designaremos finalmente por v_a, v_b, v_c las tres *bisectrices*, designando abreviadamente con este nombre los segmentos de bisectriz de cada ángulo comprendidos entre cada vértice y su respectiva intersección V_a, V_b, V_c con el lado opuesto.

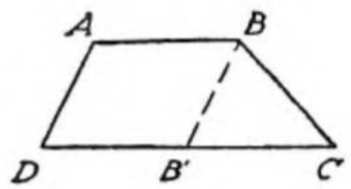
Cada uno de estos segmentos forma con los lados del triángulo o sus prolongaciones ciertos triángulos, que se podrán construir (completándose fácilmente la construcción del triángulo ABC) en los casos siguientes, cuyo estudio y discusión dejamos a cargo del lector.

Construcción de un triángulo ABC, dados:

h_a, a, b	(Se empezará construyendo el triángulo AH_aC).
h_a, b, c	(Se construirán los triángulos AH_aC y AH_aB).
h_a, b, $\sphericalangle B$	(» » » » » »).
h_a, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$	(» » » » » »).
h_a, a, $\sphericalangle B$	(Se empezará construyendo AH_aB).
h_a, b, $\sphericalangle A$	(» » » AH_aC)
m_a, a, b	(» » » AM_aC).
m_a, b, $\sphericalangle C$	(» » » »).
m_a, b, c	(Aplicando al triángulo la simetría respecto de M_a se completará un paralelogramo del que se conocerá una diagonal $= 2m_a$ y dos lados. V párrafo siguiente).
m_a, a, $\sphericalangle B$	(Constrúyase AM_aB).
m_a, b, $\sphericalangle A$	(Del paralelogramo anterior se conoce una diagonal, un lado y un ángulo).
v_a, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$	(Constrúyase AV_aB).
v_a, b, $\sphericalangle A$	(» AV_aC).
v_a, b, $\sphericalangle C$	(» »).

9. Construcción de cuadriláteros especiales.—La descomposición de un cuadrilátero en triángulos, mediante una diagonal o las dos, permite reducir su construcción a la de éstos, con lo que el lector resolverá fácilmente las siguientes cuestiones:

Construcción de un trapecio dados: 1) *Tres lados y una diagonal.* 2) *Tres lados y uno de los dos ángulos que forman.* 3) *Los ángulos* (para lo cual basta dar dos contiguos a la misma base o dos opuestos) *y una base y un lado.* 4) *Los ángulos y las dos bases.* (Constrúyase el triángulo $BB'C$ que determina la paralela a un lado AD por el vértice B en que concurren el otro y la base menor.) 5) *Los cuatro lados.* (Constrúyase el mismo triángulo.) 6) *Las bases, un lado y un ángulo no contiguo a éste.* (Idem íd.)

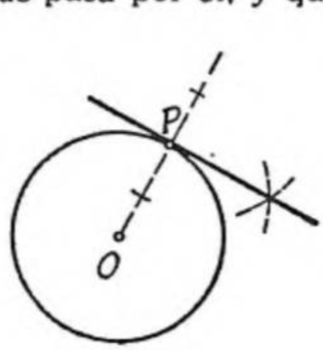


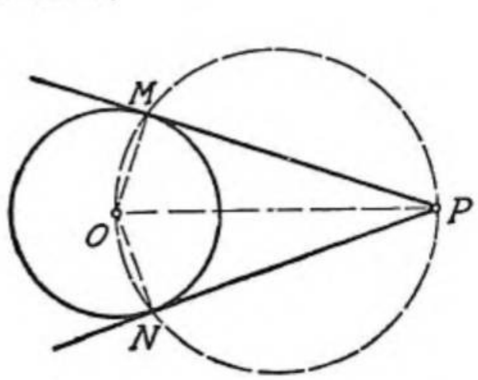
Construcción de un paralelogramo: 1) *Dados dos lados consecutivos y una diagonal.* (Constrúyase el triángulo que forman.) 2) *Dos lados consecutivos y un ángulo.* (Determínese el comprendido.) 3) *Un lado, una diagonal y un ángulo.* (Se hallará uno de los ángulos no concurrentes con la diagonal, y se construirá el triángulo que determina con los elementos dados.) 4) *Un lado y las dos diagonales.* (Construyendo el triángulo que determina aquél con las mitades de éstas.)

Construcción de un rombo dados: 1) *El lado y una diagonal.* 2) *El lado y uno de los ángulos.* 3) *Las dos diagonales.* 4) *Una diagonal y un ángulo.*
Construcción de un cuadrado dados: 1) *El lado.* 2) *La diagonal.*

10. Tangentes a una circunferencia que pasan por un punto.—Para trazar la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos P basta trazar la perpendicular al radio que pasa por él, y que es única.

Para trazar las tangentes por un punto exterior P observemos que el punto de contacto ha de ser vértice de un ángulo recto cuyos lados, radio y tangente pasen respectivamente por el centro O y por dicho punto.



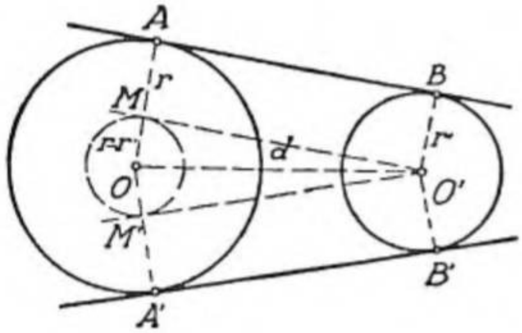


Como el lugar geométrico de dichos vértices es (lecc. 9) la circunferencia que tiene por diámetro OP, bastará trazarla, y unir con P sus intersecciones con la circunferencia dada.

Puesto que las dos circunferencnas se cortan en dos puntos simétricos M y N respecto de la recta que une los centros, resulta:

Desde un punto exterior a una circunferencia se pueden trazar dos tangentes a ella, que son simétricas respecto de la recta que une el punto con el centro. Por tanto, *son iguales los dos segmentos* PM *y* PN *de tangente comprendidos entre el punto* P *y los de contacto.*

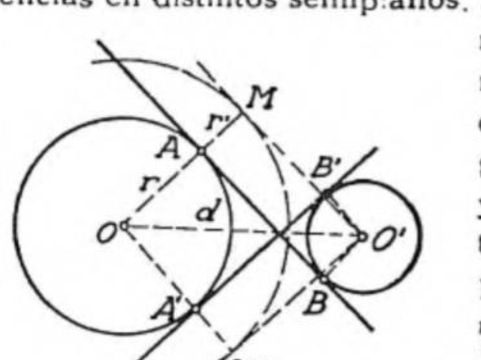
11. Tangentes comunes a dos circunferencias.— *Tangentes exteriores.* Llamaremos así aquéllas que dejan en un mismo semiplano las dos circunferencias. Supondremos los radios r y r' desiguales, $r > r'$ (el caso $r = r'$ es trivial), y la distancia entre los centros mayor que la diferencia de radios $d > r - r'$.



Los centros O, O' y los puntos de contacto A y B de una tangente exterior son vértices de un trapecio rectángulo del que se conocen tres lados y los ángulos rectos, y cuya construcción se reduce a la del triángulo rectángulo $OO'M$ obtenido al trazar por O' la paralela a la tangente AB. De este triángulo se conoce la hipotenusa d y un cateto $OM = r - r'$ y su construcción equivale al trazado por O' de las tangentes a la circunferencia de centro O y radio $r - r'$.

Obtenidas éstas, como se ha dicho en el párrafo anterior, prolongaremos los radios de contacto OM y OM', y por sus intersecciones A y A' con la circunferencia O, trazaremos paralelas respectivas a ellas.

Tangentes interiores.—Llamaremos así aquéllas que dejan las dos circunferencias en distintos semiplanos. Supondremos ahora $d > r + r'$. Trazando análogamente por O' la paralela a una tangente interior AB, hasta cortar el radio OA por el punto de contacto, se determina un triángulo rectángulo $OO'M$ del que se conoce la hipotenusa d y el cateto $OM = r + r'$. La construcción de este triángulo equivale al trazado de una tangente por O' a la circunferencia de centro O y radio $r + r'$, de la que O' es exterior por hipótesis. Trazando paralelas a las dos soluciones del problema por los puntos A y A' de intersección de la circunferencia dada con los radios de contacto M y M', se obtendrán las tangentes comunes pedidas.



EJERCICIOS

1. Calcular la carrera de un émbolo accionado por una excéntrica de diámetro exterior 25 cm. sobre un árbol de 10 cm. sabiendo que el espesor mínimo entre ambas circunferencias es de 3 cm.
2. Si O'' es circunferencia tangente en A a la circunferencia O y en B a la O' y la recta AB corta a O' en A' los radios OA y $O'A'$ son paralelos. Demostración.
3. Dadas dos circunferencias tangentes exteriormente, la que tiene por diámetro la porción de tangente común exterior comprendida entre sus puntos de contacto, es tangente a la recta de centros en el punto de contacto de ambas circunferencias. Demostración.
4. Trazar por un punto A de una recta r una circunferencia tangente que pase por B, exterior a r.
5. Trazar una circunferencia que sea tangente a dos rectas paralelas y que pase por un punto.
6. Trazar una circunferencia de radio dado que pase por un punto y sea tangente a una recta dada, o a una circunferencia dada.

7. Trazar una circunferencia de radio dado que sea tangente a dos rectas dadas.

8. Trazar una circunferencia de radio dado que sea tangente a una recta y a una circunferencia dadas.

9. Trazar una circunferencia de radio dado tangente a dos circunferencias dadas.

10. Trazar una circunferencia tangente en A a otra dada, y que pase por otro punto B.

11. Trazar una circunferencia que sea tangente en A a una recta r y además tangente a otra circunferencia dada.

12. Aplicaciones de los problemas anteriores al dibujo. Enlace de dos rectas mediante un arco circular, dando · 1.º, el radio del arco de enlace; 2.º, uno de sus puntos de tangencia. Enlace de una recta y una circunferencia: 1.º, dado el radio del arco de enlace; 2.º, dado uno de los puntos de tangencia. Enlace de dos circunferentias ídem íd.

13. Por un punto A de intersección de dos circunferencias c y c', trazar una cuerda de c que sea bisecada por c'.

14. Por el punto A del ejemplo anterior, trazar una secante BAC entre ambas circunferencias de longitud dada.

15. Dadas dos paralelas, un punto A en una de ellas y otro punto P exterior, trazar por P una secante que corte a ambas paralelas en dos puntos equidistantes de A.

16. Dados tres puntos A, B y C no alineados, trazar por A una recta cuya suma de distancias a B y C sea dada. Idem para la diferencia.

17. Trazar una recta tangente a una circunferencia dada y que intercepte en otra una cuerda dada.

18. Trazar una recta que intercepte en dos circunferencias dadas cuerdas dadas.

19. Trazar por un punto A una recta que intercepte entre dos paralelas dadas un segmento dado.

20. Idear una construcción de la perpendicular por un punto A a una recta r que diste de A más de lo que alcanza la abertura del compás.

21. Hallar la bisectriz de un ángulo de vértice inaccesible.

22. Construir un triángulo conociendo $a h_a m_a$.

23. Idem dados $c\, h_a m_a$.

24. Idem dados $h_a m_a \sphericalangle A$. (Construir el paralelogramo doble de diagonal $2\,m_a$; de él se conocen los ángulos y la recta que contiene la otra diagonal.)

25. Idem dados $h_a m_a \sphericalangle B$.

26. Idem dados $a\, h_a \sphericalangle B-C$.

27. Idem dados a, b, $b+c$.

28. Idem dados a, b, $b-c$.

29. Idem dados $a+b$, $b-c$, c.

30. Idem dados $a+b$, c, $\sphericalangle C$.

31. Construir un paralelogramo conocidas las dos diagonales y el ángulo que forman.

32. Idem conocidos un lado, una diagonal y el ángulo de las diagonales.

33. Construir un trapecio conocidas las bases y las diagonales.

34. Construir un cuadrilátero dados los cuatro lados y una diagonal.

35. Idem dados tres lados y las dos diagoales.

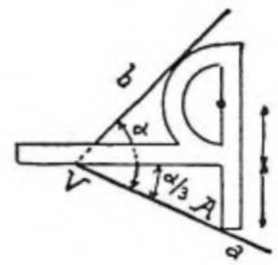
36. Idem dados los cuatro lados y un ángulo.

37. Idem dados tres lados, una diagonal y el ángulo que forman los dos lados concurrentes con la diagonal.

38. Idem dados dos lados, el ángulo que forman, otro ángulo contiguo a uno de los lados dados y la diagonal concurrente con los lados.

39. Idem dados tres lados y dos ángulos opuestos.

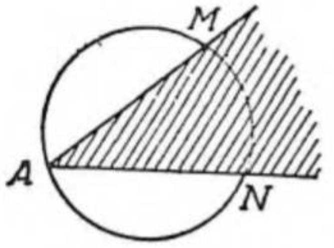
40. Inscribir un cuadrado en un rombo dado.



41. Demostrar el fundamento del instrumento trisector de ángulos que indica la figura. Dado un ángulo aVb, y colocado el borde r apoyado en V mientras el punto A se apoya en un lado a y la circunferencia en el otro, el borde r marca la división de la tercera parte.

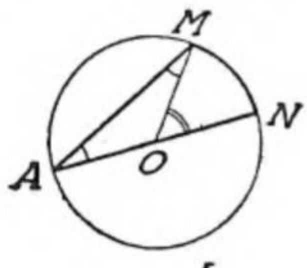
Lección 15.—Angulos y polígonos en la circunferencia

1. Angulos inscritos.— Cuando el vértice A de un ángulo MAN es punto de un arco y sus lados pasan por los extremos del mismo se dice que el ángulo está *inscrito en el arco* MAN, y también *en la circunferencia que lo contiene*. En cuanto al arco restante MN, cuyos puntos son interiores al ángulo, diremos que está comprendido o *abarcado* por él

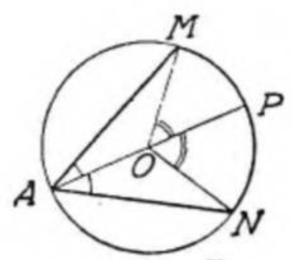


Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del central que comprende el mismo arco

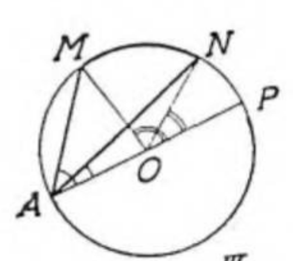
El teorema es inmediato si uno de los lados del ángulo inscrito MAN pasa por el centro O, pues entonces (fig. I) el central MON que abarca el mismo



I



II



III

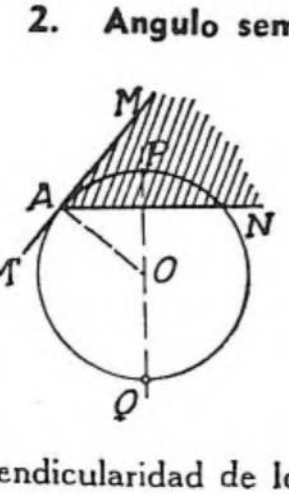
arco es exterior al triángulo isósceles MOA, e igual por tanto a la suma de los internos iguales entre sí, uno de los cuales es el inscrito MAN en cuestión.

Si el centro está en el interior del ángulo (fig. II) puede considerarse éste como suma de dos ángulos inscritos MAP y PAN con un lado diametral común AP, mitades respectivas de los centrales MOP y PON, cuya suma es, a su vez, el central MON que abarca el mismo arco MPN.

Si el centro O está fuera del ángulo inscrito MAN (fig. III) puede éste considerarse análogamente como diferencia de dos ángulos inscritos MAP y NAP con el lado diametral común AP, y, por tanto, es la mitad de la diferencia de los centrales MOP y NOP, o sea, de MON.

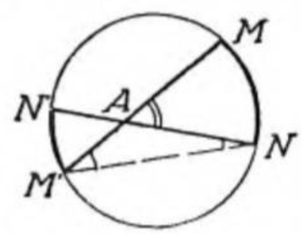
De aquí se desprende: *Todos los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales*, propiedad demostrada y enunciada en otra forma en la lección 9.ª, § 9.

2. Angulo semiinscrito.—Llámase *ángulo semiinscrito* en una circunferencia a todo aquél cuyo vértice está en ella y cuyos lados son uno tangente y el otro secante. El arco cuyos puntos son interiores a dicho ángulo se dice abarcado por él. Por ejemplo, en la figura, el ángulo semiinscrito MAN abarca el arco APN, mientras el inscrito adyacente $M'AN$ abarca el arco AQN. Ambos arcos completan la circunferencia.



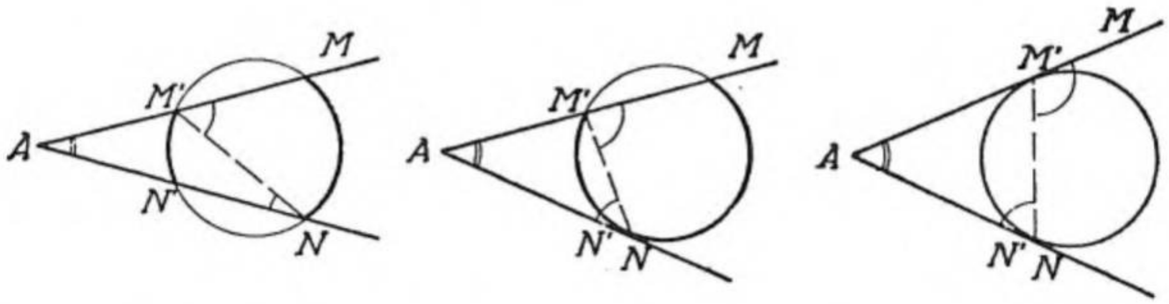
Todo ángulo semiinscrito vale la mitad del central que abarca el mismo arco. Trazando el diámetro PQ perpendicular a la cuerda, se tendrá, en efecto, por la perpendicularidad de los lados $MAN = AOP$ o bien $M'AN = AOQ$.

3. Angulo interior y ángulo exterior.—Llámase *ángulo interior o exterior* de una circunferencia, todo aquel cuyo vértice es un punto interior o exterior a la misma, respectivamente



Todo ángulo interior es igual a la semisuma de los centrales correspondientes a los arcos abarcados por dicho ángulo y por su opuesto por el vértice. En efecto (v. fig.), el ángulo interior MAN es exterior del triángulo $AM'N$, y, por tanto, igual a la suma de los internos no adyacentes $MM'N$ y $N'NM$ que son los inscritos que abarcan los mismos arcos que el ángulo dado y su opuesto.

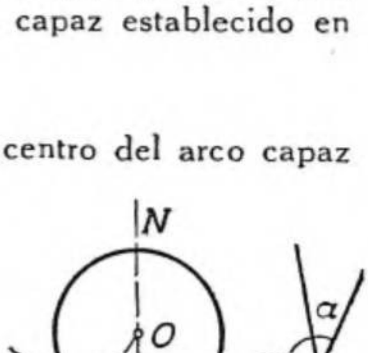
Todo ángulo exterior cuyos lados cortan o son tangentes a una circunferencia es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes a los arcos abarcados por sus lados.



En efecto, el ángulo exterior MAN en cuestión es ahora interior del triángulo $AM'N$ (v. figs.) y, por tanto, diferencia entre el exterior $MM'N$ y el interior $M'NA$, ángulos ambos inscritos (o semiinscritos si los lados son tangentes) en la circunferencia y que abarcan en ella los mismos arcos MN y $M'N'$ que el ángulo dado.

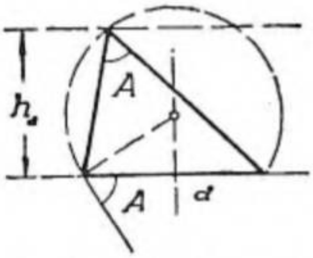
De estas proposiciones se desprende que todo ángulo *no inscrito no es igual* al central correspondiente a ninguno de los arcos abarcados por sus lados. Lo que en combinación con lo demostrado en el párrafo 1, proporciona una nueva demostración del lugar geométrico llamado arco capaz establecido en Lección 9, párrafo 10.

4. Construcción del arco capaz.—Para hallar el centro del arco capaz de un ángulo dado α sobre un segmento AB, bastará hallar en la mediatriz MN de AB un punto O tal que el ángulo AOM sea igual a α. Para ello construiremos en el semiplano opuesto un ángulo $BAP=\alpha$ y trazaremos por A la perpendicular AO al lado AP. Esta recta y la mediatriz se cortan (por cortarse sus perpendiculares) en el centro buscado. En efecto, $AOM=BAP=\alpha$ (por la perpendicularidad de los lados).



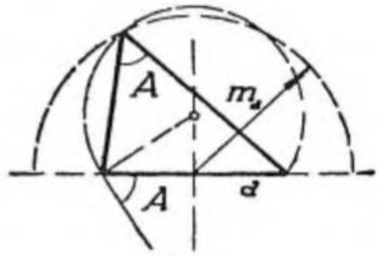
Obsérvese que la construcción del arco capaz del ángulo *suplementario* α', en el semiplano opuesto *da el mismo centro*, y que ambos arcos completan una circunferencia.

5. Aplicaciones del arco capaz.—Este lugar geométrico permite resolver algunas nuevas e interesantes construcciones, como por ejemplo:

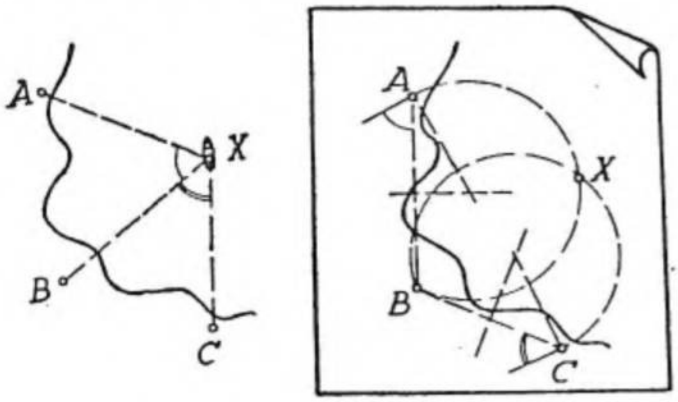


Construcción de un triángulo dados h_a, A *y* a.—Tomando sobre una recta el lado dado a, su vértice opuesto debe estar situado en una paralela a ella a distancia h_a y también en el arco capaz del ángulo A, construído en el mismo semiplano sobre dicho segmento.

Construcción de un triángulo dados m_a, A, a. Tomando como antes el lado a, su vértice opuesto A debe estar ahora en el arco capaz de $\sphericalangle A$ construído en el semiplano elegido y en la semicircunferencia de centro el punto medio de a y de radio m_a, contenida en el mismo semiplano.

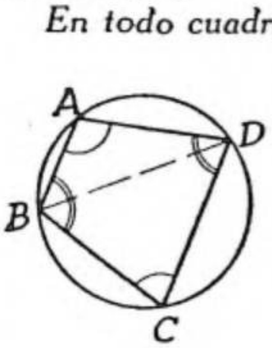


Problema de la carta (Potenot).—Desde un navío se observan tres puntos notables de la costa A, B y C, y se miden los ángulos AXB y BXC que forman entre sí las visuales. Con estos dos sencillos datos se puede fijar en el mapa la situación X del navío. En efecto, X estará en el arco capaz del primer ángulo construído sobre el segmento AB del plano del lado del mar, y en el arco capaz del segundo construído sobre BC. La segunda intersección de estos dos arcos (ya secantes en B) da la situación X buscada.



6. Cuadrilátero inscriptible.—Llámase, en general, *polígono inscrito en una circunferencia* todo aquel cuyos vértices son puntos de la misma. En particular, un cuadrilátero se llamará *inscriptible* si puede ser *inscrito en una circunferencia.*

En todo cuadrilátero inscriptible (convexo) los ángulos opuestos son suplementarios. En efecto, son ángulos inscritos en una circunferencia cuyos arcos abarcados suman la circunferencia entera. Luego su suma es la mitad de la de los centrales, cuya suma es dos llanos.



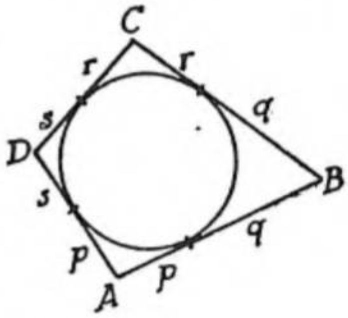
Recíprocamente: *Todo cuadrilátero que tiene dos ángulos opuestos suplementarios es inscriptible.*

En efecto, si A y C son suplementarios, según hemos observado en la construcción del arco capaz, los dos arcos capaces de A y de C sobre BD en distinto semiplano, tienen el mismo centro, completando ambos una circunferencia.

Claro es que si dos ángulos son suplementarios, también lo son los otros dos, por valer dos llanos la suma de los cuatro.

7. Cuadrilátero circunscriptible.—Se llama, en general, *polígono circunscrito* a una circunferencia todo polígono cuyos lados son tangentes a ella; más preciso: cuando las rectas de sus lados son tangentes en puntos de éstos. Todo polígono circunscrito a una circunferencia es, pues, convexo. En particular, llamaremos *circunscriptible* a todo cuadrilátero que pueda ser *circunscrito a una circunferencia*. Así como en un cuadrilátero inscriptible son iguales las sumas de los ángulos opuestos, se verifica:

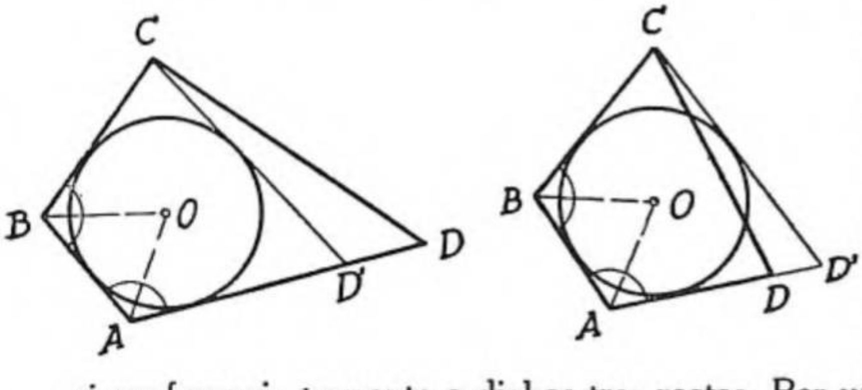
En todo cuadrilátero circunscriptible son iguales las sumas de los lados opuestos. Así (v. fig.), $AB+DC=AD+BC$.

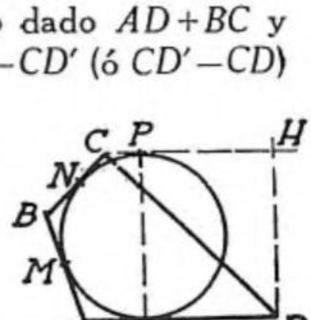


En efecto, los puntos de contacto dividen a cada lado en dos segmentos, siendo iguales los segmentos parciales concurrentes en un mismo vértice (v. lec. anterior). Dos lados opuestos se componen de cuatro de ellos distintos; los otros cuatro compondrán, por consiguiente, una suma igual, formando los otros dos lados. Así, los dos miembros de la igualdad anterior son iguales a $p+q+r+s$.

Teorema contrario: *Si un cuadrilátero convexo no es circunscriptible no son iguales las sumas de los pares de lados opuestos.*

En efecto, sea $ABCD$ el cuadrilátero. Sus ángulos suman dos llanos Las bisectrices de dos consecutivos A y B se cortarán. por formar con el lado común AB ángulos colaterales de suma menor que un llano (Euclides). Su punto O de intersección equidista de los tres lados, por pertenecer a una y otra bisectriz, y es, por consiguiente, centro de una circunferencia tangente a dichas tres rectas. Por uno de los vértices extremos C tracemos la tangente a dicha circunferencia distinta de CB, y sea D' el punto de intersección de la misma con el lado opuesto AD. Como suponemos $ABCD$ no inscriptible, D' es distinto de D, cumpliéndose $AD'+BC=AB+CD'$. Si pasamos de estas sumas a las correspondientes al cuadrilátero dado $AD+BC$ y $AB+CD$, la primera ha variado en DD', y la segunda en $CD-CD'$ (ó $CD'-CD$) diferencia que es, en todo caso. menor que DD'. Estas sumas no pueden ser, pues, iguales entre sí, si lo eran aquéllas, con lo que queda demostrado el teorema.





La demostración no es aplicable si la tangente trazada por C a la circunferencia no corta al lado AD. En tal caso, es el lado $CD>CH=$ $=CP+QD$ (segmentos de tangente trazados desde sus extremos a la circunferencia). Sumando miembro a miembro con las igualdades $BM=BN$ y $AM=AQ$, resulta $CD+AB>(BN+CP)+(QD+AQ)=BC+AD$.

Como consecuencia de los teoremas directo y contrario, resulta:

La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea circunscriptible es que las sumas de los lados opuestos sean iguales.

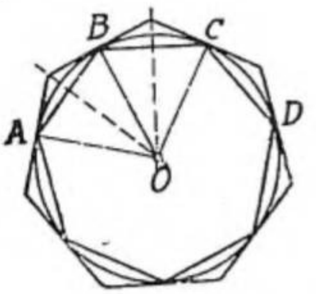
8. Polígonos regulares.— Llámase *polígono regular* aquel que tiene los lados iguales entre sí y los ángulos también iguales entre sí.

Uniendo los puntos de división consecutivos de una circunferencia en n partes iguales (n>2) *se obtiene un polígono regular.* Pues al girar la figura, alrededor del centro, de un ángulo correspondiente a la n^a parte alícuota, cada vértice coincidirá con el siguiente, y por tanto, cada lado y cada ángulo es congruente con el siguiente; es decir, todos los lados son iguales entre sí así como los ángulos.

Este polígono se llama *inscrito* en la circunferencia y ésta *circunscrita* al polígono.

Análogamente se demuestra que: *Si por los puntos de división trazamos las tangentes a la circunferencia, se cierra igualmente un polígono regular* que se llama *circunscrito* a la circunferencia y ésta *inscrita* en el polígono.

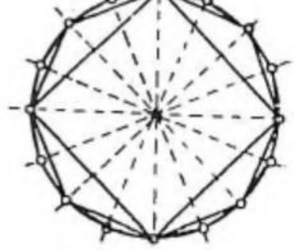
Recíprocamente: *Todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia y circunscriptible a otra.* De otro modo: *Existe un punto O llamado centro del polígono que equidista de todos sus vértices y de todos sus lados.*



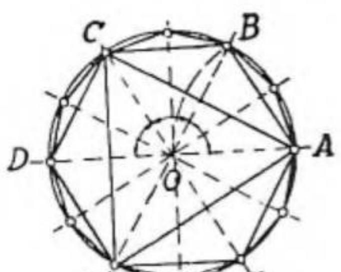
En efecto, consideremos la circunferencia que pasa por tres vértices consecutivos A, B, C y cuyo centro es la intersección de las mediatrices de AB y BC. Giremos el polígono alrededor de O de un ángulo AOB que es igual al BOC por ser iguales las cuerdas AB y BC. Este giro lleva A sobre B, B sobre C, BC sobre su igual CD, por la igualdad de los ángulos B y C, y por tanto C sobre D: así también CD sobre DE, etc. De donde, todos los vértices equidistan de O y los lados también.

En virtud de lo dicho, son problemas equivalentes la división de una circunferencia en un cierto número de partes iguales y la construcción de un polígono regular inscrito o circunscrito de igual número de lados.

9. División de la circunferencia. Construcción de polígonos regulares inscritos.—*División en* 2^p *partes.*— Dos diámetros perpendiculares dividen al ángulo completo en cuatro rectos, y la circunferencia en cuatro arcos iguales llamados *cuadrantes*. Sus cuerdas forman un cuadrilátero regular o *cuadrado*.



Las bisectrices de estos ángulos rectos determinarán los vértices del octógono regular inscrito y las nuevas bisectrices de los ángulos centrales pasarán por los vértices de un polígono regular de 16 lados. Análogamente obtendremos los de 32, 64, y en general 2^p lados.



División en $3 \cdot 2^k$ *partes.*—Una cuerda AB igual al radio limita con los radios extremos un triángulo equilátero AOB, y, por tanto, equiángulo, de donde resulta que el ángulo central AOB vale la tercera parte de un llano, o un sexto del ángulo completo. En consecuencia, llevando seis veces consecutivas una cuerda igual al radio volveremos al punto de partida y cerraremos un hexágono regular Tres vér-

..ices alternados unidos A, C, E nos darán un *triángulo equilátero inscrito* En cambio, las bisectrices de los seis ángulos centrales determinarán la división en doce partes iguales, es decir, el *dodecágono regular*. Y por sucesivas bisecciones construiríamos los polígonos regulares inscritos de 24, 48, .. y en general $3 \cdot 2^k$ lados.

NOTA.—Más adelante aprenderemos a inscribir el decágono, el pentágono y el pentadecágono regulares y, por consiguiente, también los polígonos de $5 \cdot 2^k$ y $15 \cdot 2^k$ lados. No se crea, sin embargo, que esta inscripción es posible con la regla y compás para cualquier número de lados. Los ejemplos más sencillos de imposibilidad los proporcionan el eptágono (7 lados) y el eneágono (9 lados) regulares. En cambio es posible la inscripción del polígono regular de 17 lados.

Gauss demostró que la condición necesaria y suficiente para que una circunferencia sea divisible en n partes con la regla y el compás es que n admita una descomposición en factores primos de la forma

$$n = 2^p (2^{2^{\alpha_1}} + 1)(2^{2^{\alpha_2}} + 1) \dots (2^{2^{\alpha_s}} + 1)$$

en la que $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_s$ son enteros distintos entre sí.

10. Polígonos regulares estrellados.—Supongamos dividida la circunferencia en n partes, y unamos los puntos de división de dos en dos, de tres en tres, etc. Puede ocurrir:

1.° Que se vuelva al punto de partida después de recorrer *una sola vez* la circunferencia.

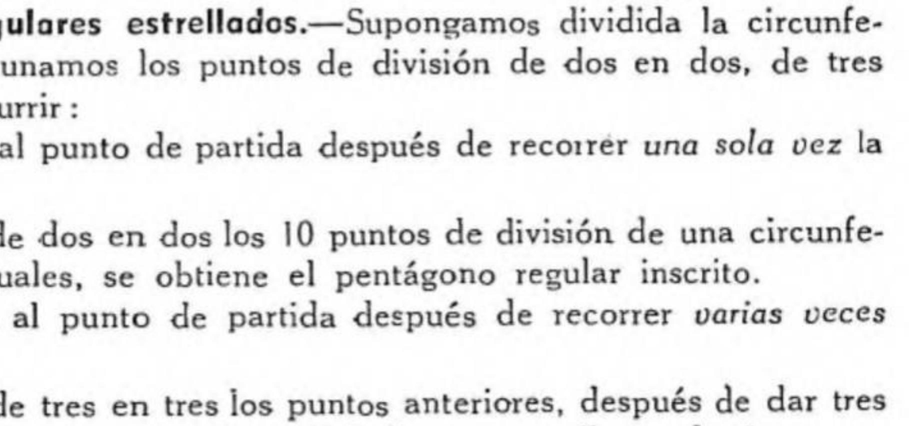
EJEMPLO.—Al unir de dos en dos los 10 puntos de división de una circunferencia en 10 partes iguales, se obtiene el pentágono regular inscrito.

2.° Que se vuelva al punto de partida después de recorrer *varias veces* la circunferencia.

EJEMPLO.—Al unir de tres en tres los puntos anteriores, después de dar tres vueltas, se cierra una línea poligonal de 10 lados, que se llama *decágono estrellado*.

Al unirlos de cuatro en cuatro, se cierra, después de dos vueltas, una línea poligonal de cinco lados, llamada *pentágono estrellado*

Las observaciones anteriores sugieren estas preguntas: ¿Se cerrará siempre el polígono? ¿Después de cuántas vueltas? ¿Cuántos lados tendrá?



La primera pregunta tiene contestación inmediata, pues la condición para que cierre el polígono es que el número de divisiones recorridas sea múltiplo de 10, y en general de n, y esto siempre es posible recorriendo np divisiones si es p el número de partes alícuotas comprendidas entre dos vértices unidos. es decir, haciendo n uniones.

Ahora bien, ¿será ésta la primera vez que se vuelva al punto de partida? Si así fuera, el polígono tendría n lados, como ha ocurrido en el ejemplo del decágono estrellado. Pero puede ocurrir que haya algún múltiplo de n inferior a np. Como el número de divisiones recorridas tiene que ser múltiplo de p y de n, se cerrará *por primera vez* el polígono cuando hayamos recorrido un número de divisiones igual al m. c. m. (n, p); y el número de lados será el cociente de este m. c. m. por p.

Pueden ocurrir, pues, los siguientes casos:

1.° n es múltiplo de p, es decir, m. c. m. $(n, p) = n$. En este caso el número de lados del polígono $N = n:p$. El polígono obtenido es *convexo*.

EJEMPLO.—El del pentágono $n = 10$, $p = 2$, $N = 10:2 = 5$.

2.° $n \neq p$, pero n y p no son primos entre sí. En este caso existe m. c. m. $= M < np$, y el número de lados del polígono será

$$M : p < n.$$

EJEMPLO.—El del pentágono estrellado. $n = 10$, $p = 4$, $M = 20$, $N = 20 : 4 = 5$.

3.° n y p primos entre sí. En este caso, $M = np$, y el número de lados, $N = np : p = n$. El n-gono obtenido se llama *estrellado*.

EJEMPLO.—Decágono estrellado. $n = 10$, $p = 3$, $M = 30$, $N = 30 : 3 = 10$

De este caso 3.° parece desprenderse que existen tantos n-gonos estrellados como números primos p menores que n. Pero como unir los puntos de p en p divisiones es lo mismo que unirlos de $n-p$ en $n-p$, resulta:

Existen tantos n*-gonos estrellados cuantos sean los números primos con* n *menores que* n/2.

NUEVOS EJEMPLOS:

Pentágonos, $n = 5$:

$p = 1$ (pentágono regular convexo).
$p = 2$, $M = 10$, $N = 5$ (pentágono estrellado).

Unir las divisiones de 3 en 3 es lo mismo que unirlas de 2 en 2 en sentido contrario: por tanto, el pentágono estrellado que se obtendría para $p = 3$ es el mismo anterior.

Heptágonos, $n = 7$:

$p = 1$ (heptágono regular convexo).
$p = 2$, $M = 14$, $N = 7$ (heptágono estrellado).
$p = 3$, $M = 21$, $N = 7$ (otro heptágono estrellado).

Para $p = 4$ el polígono es el mismo que para $p = 3$. Hay, pues, dos heptágonos estrellados; para distinguir uno de otro se consigna el *número de vueltas* que es preciso dar a la circunferencia para cerrarlos, y que se llama *especie* del polígono. Así, en el ejemplo precedente un heptágono es de especie 2 y otro de especie 3.

EJERCICIOS

1. Sin más elementos que una escuadra y un lápiz, hallar el centro de un disco circular.

2. Demostrar que los arcos limitados en una circunferencia por dos rectas paralelas secantes son iguales. Recíproco.

3. Demostrar que si A, B, C, A', B', C' son puntos ordenados de una circunferencia y es AB paralela a $A'B'$ y BC paralela a $B'C'$, también es AC' paralela a $A'C$.

4. Sean AB y CD dos arcos de una circunferencia. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto de intersección de AC y BD al permanecer fijos A y B y girar el arco CD sobre la circunferencia?

5. Demostrar que si los extremos de un segmento AB de longitud fija se deslizan sobre dos rectas secantes fijas OX, OY, la circunferencia circunscrita AOB tiene radio invariable.

6. Lugar geométrico de los vértices de una escuadra cuya hipotenusa se desliza apoyándose en los lados de un ángulo recto.

7. Dadas dos rectas fijas secantes m y n y en ellas dos puntos fijos M y N consideremos dos circunferencias C_1 y C_2 respectivamente tangentes a m y n en M y N y además tangentes entre sí en P. Hallar el lugar geométrico de P.

8. Dividir un arco en dos partes cuyas cuerdas tengan suma o diferencia dada. (Véase ejercicio 30, lecc. 14.)

9. Si dos fuerzas de intensidad constante giran del mismo ángulo alrededor de sus respectivos puntos de aplicación, supuestos fijos, la resultante gira del mismo ángulo y pasa constantemente por un punto fijo. ¿Cuál? Demostración para fuerzas no paralelas.

10. Demostrar que las bisectrices de un cuadrilátero cualquiera (no rombo ni romboide) limitan un cuadrilátero inscriptible.

11. Construir un cuadrado cuyos lados pasen por cuatro puntos dados.

12. Construir un rombo cuyos lados pasen por cuatro puntos dados, conociendo uno de sus ángulos.

13. Condición necesaria y suficiente para que un trapecio sea inscriptible.

14. Construir un trapecio circunscriptible dado su perímetro y los ángulos en una base.

15. Demostrar que en un cuadrilátero no convexo, limitado por cuatro rectas tangentes a una circunferencia, son iguales las sumas de los pares de lados concurrentes con la diagonal exterior. (Compárese con la propiedad del cuadrilátero circunscriptible convexo.)

16. Construir un cuadrilátero circunscriptible conociendo tres lados y el ángulo que forman dos de ellos.

17. Idem conociendo dos lados consecutivos, el ángulo que forman, y uno de los ángulos consecutivos a éste.

18. Construir un cuadrilátero conociendo dos lados, el ángulo que forman, y los ángulos que la diagonal concurrente con ellos forma con los otros dos lados.

19. Expresar en ángulos rectos el ángulo de un polígono regular en función del número de lados n.

20. Idem íd. el ángulo en un vértice de un polígono estrellado de n lados conocida la especie de polígono.

21. Dígase si es posible formar mosaico con losetas pentagonales regulares. Idem octogonales.

22. Idem con cuadrados y octógonos regulares. Idem con pentágonos y triángulos equiláteros.

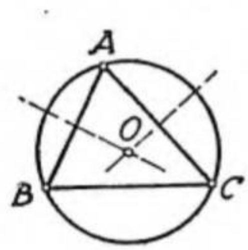
23. Demostrar que los puntos que se obtienen llevando la mitad de la diagonal de un cuadrado sobre los lados a partir de los vértices, son vértices de un octógono regular.

24. Demostrar que hay un solo octógono regular estrellado, un solo decágono y tres pentadecágonos. Hallar sus especies.

25. Cuántos y cuáles son los polígonos regulares inscriptibles con regla y compás de menos de 300 lados. (Aplíquese el teorema de Gauss. Son 38 polígonos.)

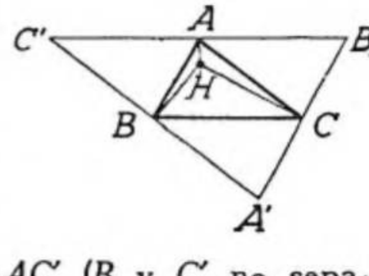
LECCIÓN 16.—PUNTOS Y RECTAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

1. Circunferencia circunscrita. Circuncentro.—Ya se ha dicho que tres puntos no alineados A, B, C determinan una circunferencia que pasa por ellos y cuyo centro O es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos AB, BC y AC, lo que podemos enunciar diciendo:



Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto O, que se llama *circuncentro* por ser el centro de la circunferencia llamada *circunscrita* al triángulo.

2. Ortocentro.—*Las paralelas a los lados de un triángulo* ABC *que pasan por los vértices opuestos, forman otro triángulo* A'B'C' *de lados dobles de los del primero y cuyos puntos medios son* A, B, C.

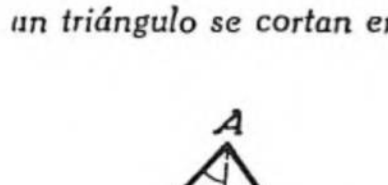


En efecto, sean $B'C'$, $A'C'$ y $A'B'$ las paralelas respectivas a los lados BC, AC y AB por los vértices A, B y C. En primer lugar, estas rectas se cortan dos a dos, por cortarse sus paralelas. El cuadrilátero $AB'CB$ es paralelogramo por construcción; de donde $AB'=BC$ (siendo B y B' separados por AC). Análogamente del paralelogramo $ACBC'$ resulta $BC=AC'$ (B y C' no separados por AC). De donde $B'A=AC'$ (B' y C' separados por A). Por consiguiente, $B'C'=2BC$ y A es el punto medio de $B'C'$. Análogamente se demuestra para los restantes lados.

Consecuencias: *Las alturas del triángulo* ABC *son mediatrices de* A'B'C'. De donde, por lo anterior:

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto H, *llamado ortocentro* del triángulo.

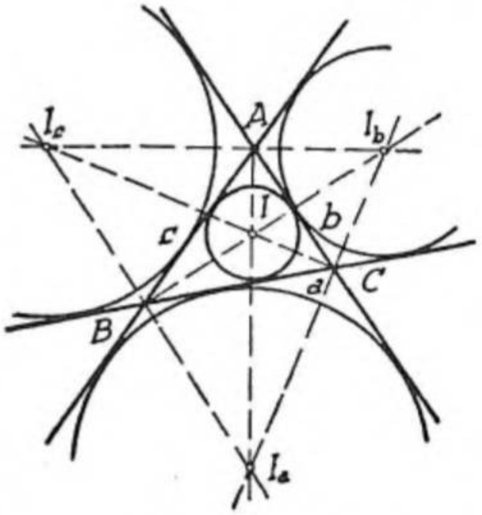
3. Circunferencia inscrita. Incentro.—*Las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto.* Este punto se llama *incentro* del triángulo.



En efecto, las bisectrices de los ángulos A y B se cortan, por formar con la secante común AB ángulos cuya suma es menor que un llano. El punto I de intersección equidista de las rectas de los tres lados por pertenecer a una y otra bisectriz. Equidista en particular de las rectas AC y BC; y como es punto interior del triángulo, por pertenecer a dos de sus ángulos, pertenecerá también a la tercera bisectriz interior.

Existe, pues, *una circunferencia interior y sólo una, tangente a los tres lados*. Se llama *circunferencia inscrita* en el triángulo.

4. Circunferencia exinscritas. Exincentros.— El incentro de un triángulo es el único punto interior que equidista de las rectas de los lados, pero existen también puntos exteriores que tienen la misma propiedad y que se llaman *exincentros*.



Consideremos, por ejemplo, las bisectrices de los ángulos exteriores A y C determinados respectivamente por los semiplanos cC, aA y el opuesto a bB. Por ser estos ángulos convexos sus mitades suman menos que un llano y las bisectrices se cortan (Euclides) en un punto I_b situado en aquellos semiplanos y que equidista de las rectas de los tres lados, luego pertenece a la bisectriz que pasa por B contenida en los semiplanos cC y aA, es decir a la bisectriz del ángulo interior B.

Los pies de las perpendiculares de I_b a las tres rectas estarán, pues, en las semirrectas que definen los ángulos exteriores A y C y por tanto en las prolongaciones $BC\rightarrow$ y $BA\rightarrow$ y en las semirrectas AC y CA, o sea en el lado b. En resumen:

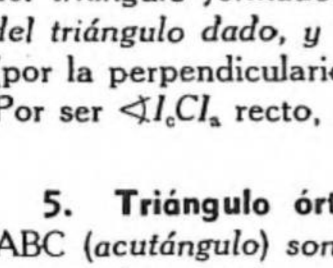
Cada dos bisectrices exteriores de un triángulo concurren en un punto con la bisectriz interior por el tercer vértice. Este punto es centro de una circunferencia tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos y que se llama *exinscrita* al triángulo.

Existen, pues, tres circunferencias exinscritas, y tres exincentros. *Los lados del triángulo formado por los exincentros son, pues, las bisectrices exteriores del triángulo dado, y las bisectrices interiores de éste son las alturas de aquél* (por la perpendicularidad de las bisectrices interior y exterior por cada vértice). Por ser $\sphericalangle I_cCI_a$ recto, es $\sphericalangle I_a$ agudo; por tanto el triángulo $I_aI_bI_c$ es *acutángulo*.

5. Triángulo órtico.— Recíprocamente: *Las alturas de todo triángulo* ABC *(acutángulo) son bisectrices interiores del triángulo* $H_aH_bH_c$ *cuyos vértices son los pies de sus alturas*. Este triángulo se llama *triángulo órtico* del ABC.

Demostremos, por ejemplo, que $\sphericalangle H_cH_aA = \sphericalangle AH_aH_b$ (en la fig. $\beta=\beta'$) (1).

H_c y H_b son vértices de ángulos rectos cuyos lados pasan por B y C; luego los cuatro puntos B, H_c, H_b, C están en una circunferencia; y, por tanto, son iguales los ángulos, en ella inscritos, $\alpha=\alpha'$ (2).



Análogamente, por ser rectos los ángulos CH_bH y HH_aC están los cuatro puntos C, H_b, H, H_a en otra circunferencia, verificándose $\alpha=\beta$ (3).

De la misma manera se prueba que $\alpha'=\beta'$ (4).

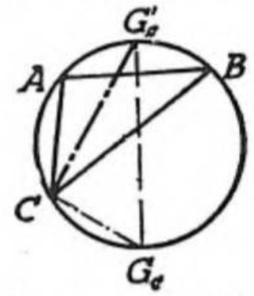
Comparando las igualdades (2), (3) y (4) resulta (1).

De lo demostrado se desprende:

Los lados de un triángulo acutángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico. Los vértices de un triángulo son los exincentros de su triángulo órtico.

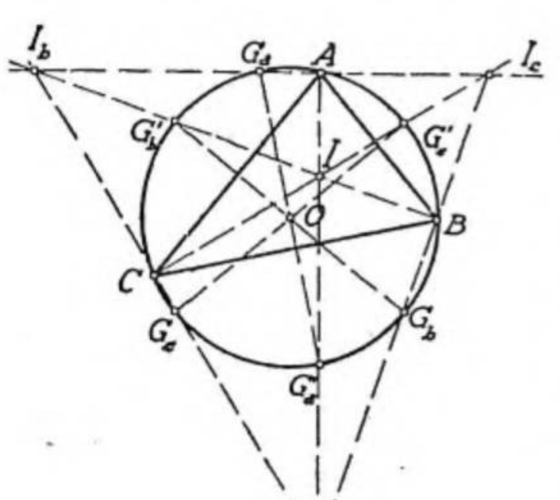
Si el triángulo es obtusángulo se demuestra análogamente que *las alturas son una bisectriz interior y dos exteriores y los lados son las bisectrices restantes del triángulo órtico.* Si el triángulo es rectángulo no existe triángulo órtico.

6. Seis puntos notables de la circunferencia circunscrita.—Recordando la figura y razonamiento que nos demostró (lec. 9.ª) una propiedad de los puntos de intersección de los lados correspondientes de dos haces directamente iguales, podemos enunciar sin más:



La circunferencia circunscrita a un triángulo ABC *contiene los puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con las bisectrices que pasan por el vértice opuesto.*

Otra demostración: Por los puntos medios G'_c y G_c de los arcos de dicha circunferencia de extremos en A y B, pasan a un tiempo el diámetro perpendicular a AB (mediatriz de AB) y las bisectrices interior y exterior de $\sphericalangle C$ (por las propiedades de los ángulos inscritos); lo que demuestra el teorema.



Formemos ahora el triángulo $I_aI_bI_c$ de los exincentros. Los puntos A y B son vértices de dos ángulos rectos (formados por las bisectrices) cuyos lados pasan por I_b y I_a; luego están en una circunferencia de diámetro I_bI_a, y cuyo centro o punto medio estará en la mediatriz de AB; es decir, es el punto G_c. Análogamente, II_c es el diámetro de una circunferencia que pasa por los puntos A y B, por ser rectos los ángulos en A y B. El punto de intersección de la mediatriz de AB con II_c es, pues, el centro o punto medio de II_c. De donde:

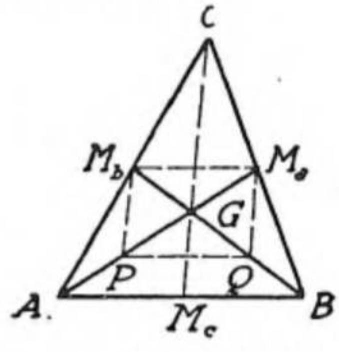
La circunferencia circunscrita a un triángulo contiene los puntos medios de los lados del triángulo de los exincentros, así como los puntos medios de los segmentos que unen éstos con el incentro.

7. Circunferencia de Feuerbach.—Dado un triángulo cualquiera (no rectángulo), apliquemos las propiedades anteriores a su triángulo órtico, y resulta:

La circunferencia que pasa por los pies de las alturas de un triángulo contiene los puntos medios de sus lados así como los puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro.

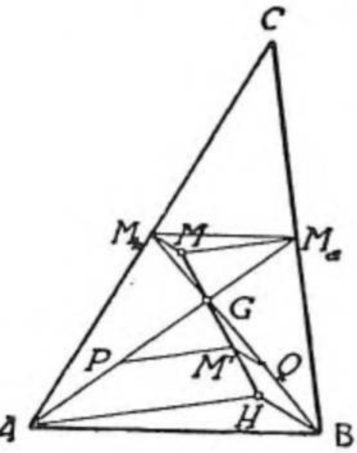
Esta circunferencia se llama *circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Feuerbach* (también llamada de Euler).

8. Baricentro del triángulo.—*Las tres medianas de un triángulo* ABC *concurren en un punto* G, que se llama *baricentro* del triángulo. *El segmento de cada mediana comprendido entre su pie y el baricentro es un tercio de la misma.* Es decir (fig.) $M_aG = \frac{1}{3}M_aA$ $M_bG = \frac{1}{3}M_bB$ $M_cG = \frac{1}{3}M_cC$



Determinada, en efecto, la intersección G de dos de las medianas AM_a y BM_b, señalemos los puntos medios P y Q de GA y GB. En el triángulo ABC, el segmento M_aM_b es la paralela media, es decir, paralelo a AB e igual a su mitad. Asimismo, en el triángulo AGB es PQ paralelo a AB e igual a su mitad. El cuadrilátero PQM_aM_b es, pues, paralelogramo (por tener dos lados iguales y paralelos), y el punto G es el punto medio de sus diagonales, de donde resulta $M_aG = GP = PA$ y $M_bG = GQ = BQ$; lo que demuestra el teorema, puesto que la tercera mediana tendrá que dividir a éstas de igual modo, determinando en ellas el mismo punto G.

9. Recta de Euler.—Tracemos por A y B las alturas del triángulo, que se cortan en el ortocentro H, y por P y Q las respectivas paralelas, que se cortarán en el punto medio M' de GH (por ser paralelas medias de AGH y GBH). Las simétricas de éstas respecto de G, es decir, las paralelas a ellas por M_a y M_b, que lo serán también a AH y BH, coincidiendo así con las mediatrices del triángulo, se cortarán en el punto M (circuncentro), el cual estará, por tanto, alineado con G y H como la estaba su simétrico M'. Además se tiene por simetría $GM = GM' = \frac{1}{2}GH$. Resulta así el siguiente teorema demostrado por Euler:

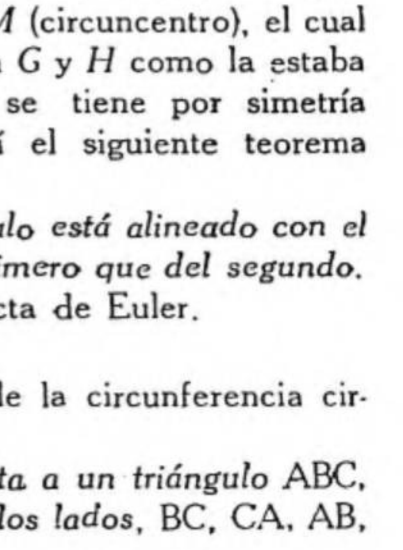


El baricentro de un triángulo está alineado con el ortocentro y el circuncentro, y a doble distancia del primero que del segundo.

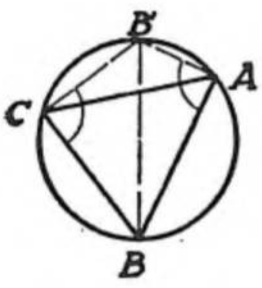
La recta que contiene estos tres puntos se llama recta de Euler.

10. Recta de Simson.—Otra curiosa propiedad de la circunferencia circunscrita es la que sigue:

Si desde un punto P *de la circunferencia circunscrita a un triángulo* ABC, *distinto de los vértices, trazamos las perpendiculares a los lados,* BC, CA, AB, *los pies de ellas* TSR *están en línea recta.* Esta recta se llama *recta de Simson* relativa al punto P.



En efecto, por ser rectos los ángulos PSA y PRA los puntos P, S, R, A están en una circunferencia; de donde $\alpha = \beta$. Análogamente, los puntos P, S, C, T están en otra circunferencia, por ser rectos los ángulos en T y S; de donde $\alpha' = \beta'$. Finalmente, $\sphericalangle TPR = \sphericalangle CPA$ por ser ambos suplementarios de $\sphericalangle B$ (como resulta de los cuadriláteros inscriptibles $TPRB$ y $APCB$). Restando de esta última igualdad $\sphericalangle CPR$, se obtiene $\beta' = \beta$. Y como consecuencia de las igualdades establecidas, resulta $\alpha=\alpha'$ y, por tanto, los puntos T, S y R están alineados.



Es fácil ver que si, por ejemplo, el triángulo es acutángulo, dos de los pies de las perpendiculares deben ser interiores a los lados respectivos y el otro exterior. En efecto, el pie de la perpendicular al lado AC desde un punto del arco AC es interior a dicho lado, y si B' es el punto diametralmente opuesto al B, según que P esté en el arco AB' o $B'C$, el pie de su perpendicular sobre AB será exterior o interior, y sobre BC ocurrirá lo contrario (como se vé observando que los ángulos BAB' y BCB' son rectos y que las rectas AB' y $B'C$ separan estos arcos).

De estas consideraciones resulta que los puntos T y R están separados por la recta AC y que los ángulos α y α' de la demostración no sólo son iguales sino que están en distinto semiplano respecto a AC, lo que es necesario para probar la alineación de los tres puntos.

Más sencilla es todavía la demostración para los puntos de arcos abarcados por ángulos agudos de triángulos obtusángulos; para los puntos del arco correspondiente a un ángulo obtuso la clasificación es más compleja, pues existen puntos del mismo que dan tres pies exteriores al triángulo, y la demostración (fundada en la misma idea) tiene ligera variante que no desarrollamos por brevedad (*).

EJERCICIOS

1. Demostrar que las paralelas a dos lados de un triángulo por el baricentro dividen al tercer lado en tres segmentos iguales.

2. Demostar que la recta que une un vértice A de un triángulo ABC con el incentro I corta a la circunferencia circunscrita en un punto P equidistante de B, de I y de C.

3 Demostrar que los cuatro lados de un cuadrilátero complejo (v. ejercicio 3.º, lecc. 1.ª) determinan dos a dos cuatro triángulos, cuyas circunferencias circunscritas pasan por un mismo punto M.

4. Demostrar que los circuncentros de los cuatro triángulos en que un cuadrilátero convexo queda dividido por sus dos diagonales, son vértices de un paralelogramo.

5. La circunferencia que pasa por el vértice A de un triángulo ABC y es tangente en V_a al lado opuesto, es tangente en A a la circunferencia circunscrita. Demostración.

6. Los arcos simétricos de los AB, BC, CA de circunferencia circunscrita a un triángulo ABC respecto de sus lados respectivos pasan por el ortocentro. Demostración.

7. En un triángulo ABC las circunferencias que pasan, respectivamente, por A, B, C, y son tangentes en B, C, A a los lados opuestos BC, CA, AB se cortan en un punto. Demostración.

8. Sean r y r' dos rectas no paralelas, cuya intersección cae fuera de los límites del dibujo. Sea AB una secante de ambas y A y B los puntos de intersección. Demostrar que las bisectrices de los ángulos colaterales se cortan en puntos de la bisectriz del ángulo rr' Dedúzcase una construcción de la bisectriz de ángulos de vértice inaccesible

9. Lugar de los ortocentros de los triángulos con un lado fijo y ángulo opuesto constante.

10. Idem íd. de los incentros.

11. Idem íd. de los exincentros.

12. Construir un triángulo dados un lado, el ángulo opuesto y el radio de la circunferencia inscrita o de una de las exinscritas.

(*) Este estudio de la *posición* de los ángulos α y α' suele omitirse en las demostraciones corrientes, por lo que carecen de rigor. (V., por ejemplo, *Rouché Comberouse* Traité de Géometrie.)

13. Construir un triángulo conociendo e radío del círculo circunscrito, un ángulo y la suma de uno de los lados que lo forman con el opuesto.

14. Construir un triángulo conociendo el radio de la circunferencia circunscrita, una altura h_a y la diferencia entre los ángulos $B-C$.

15. Construir un triángulo conocidos un lado y dos medianas.

16. Construir un triángulo dados los puntos medios de sus lados. Idem un pentágono. Idem un heptágono ...., ¿Es determinado el problema cuando el polígono tiene un número par de lados?

17. Los pies de las perpendiculares a dos lados AB y AC de un triángulo trazadas desde el punto medio de cada uno de los arcos BC de circunferencia circunscrita están alineados con el punto medio del lado BC.

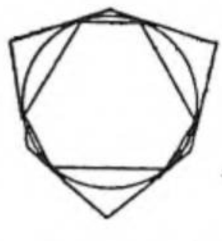
18. Demostrar que el triángulo de los exincentros es siempre acutángulo.

19. Demostrar que la recta de Simson relativa al punto P equidista de P y del ortocentro.

NOTAS AL CAPITULO CUARTO

Polígonos semirregulares.— Llámase *polígono simerregular equilátero* a todo polígono de número par de lados iguales y cuyos *ángulos alternados* son iguales. Ejemplo: el rombo.

Llámase *polígono semirregular equiángulo* todo polígono de número par de lados cuyos ángulos son todos iguales y cuyos *lados son alternadamente* iguales. Ejemplo: el rectángulo.



El lector demostrará fácilmente:

Todo polígono semirregular equiángulo es inscriptible y todo semirregular equilátero es circunscriptible.

Las tangentes a una circunferencia en los vértices de un polígono semirregular equiángulo inscrito limitan un polígono semirregular equilátero y recíprocamente.

Para construir un polígono semirregular equiángulo de $2n$ lados basta dividir la circunferencia en n partes e intercalar otros n puntos de división intermedios obtenidos girando los anteriores de un ángulo menor que la mitad del central comprendido entre dos consecutivos. Los $2n$ puntos obtenidos unidos consecutivamente en el orden en que quedan, dan origen a un polígono semirregular equiángulo convexo (fig. 1). Los puntos alternados son vértices a su vez de un mismo polígono regular convexo de n lados; pero también pueden unirse los puntos obtenidos en orden tal que alternadamente sean vértices de un polígono regular de n lados estrellado, con lo que se obtendrá un polígono semirregular equiángulo *estrellado* como indica la figura 2.

1ª

2ª

Sobre el concepto de «problema determinado».— No siempre la palabra «determinado», aplicada al resultado de un problema geométrico, tiene la misma acepción.

Así, por ejemplo, al decir que un triángulo queda *determinado* dando tres segmentos iguales a sus lados significamos que: *todos los triángulos que podríamos obtener con estos datos son congruentes entre sí.* Se conviene por tanto en considerar como solución uno cualquiera de ellos en lugar de considerar el conjunto, por ligarles a todos una relación de igualdad.

En cambio al decir: *un triángulo queda determinado al dar los puntos medios de sus lados* (supuestos no alineados) significamos que existe un triángulo y sólo uno, es decir, de posición determinada por los datos.

Observaciones análogas cabe hacer al contar el número de soluciones «distintas», pues depende del criterio de «igualdad» con respecto al cual se las compare.

Capítulo V.—MEDIDA Y PROPORCIONALIDAD

LECCIÓN 17.—MAGNITUD Y CANTIDAD

1. Conjuntos homogéneos. Cantidad y magnitud.— En lecciones anteriores hemos visto que los segmentos y los ángulos constituyen entes o elementos que cumplen por separado las condiciones siguientes:

1. *Se puede definir entre ellos una cierta relación de igualdad* (que representábamos con el signo =) de tal modo que dados dos elementos cualesquiera, existe un criterio para afirmar si son iguales o no, por aplicación de este criterio.

2. *La igualdad entre elementos tiene las mismas propiedades*, idéntica, transitiva y recíproca *que la igualdad de números*, a saber:

a) *Propiedad idéntica.*—Todo ente es igual a sí mismo. $\alpha=\alpha$.

b) *Propiedad recíproca.*—Si es $\alpha=\beta$ es también $\beta=\alpha$.

c) *Propiedad transitiva.*—Si es $\alpha=\beta$ y $\beta=\gamma$ es también $\alpha=\gamma$.

3. *Dados dos elementos cualesquiera* α *y* β *se puede formar con ellos otro elemento llamado suma*, que se representa por $\alpha+\beta$. Reiterando la operación se define la *suma de varios sumandos.*

4. *La suma de elementos tiene las mismas propiedades que la suma de números*, a saber:

a) *Propiedad uniforme.*—Si es $\alpha=\alpha'$ y $\beta=\beta'$ es también $\alpha+\alpha'=\beta+\beta'$.

b) *Propiedad conmutativa.*— $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

c) *Propiedad asociativa.*— $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

d) *Propiedad modular.*—Existe un elemento nulo, representado por 0, tal que sumado a otro cualquiera da una suma igual a él. Es decir, $\alpha+0=\alpha$.

Admitidas estas proposiciones para el mínimo de sumandos es fácil generalizarlas (como se hace en Aritmética con los números) para cualquier número de sumandos.

Definiciones.—Todo conjunto cuyos elementos cumplen las condiciones 1 y 2 se llama *homogéneo.* Si además cumplen las condiciones 3 y 4 diremos que sus elementos definen una *magnitud*, entendiendo por tal la cualidad común que les hace igualables y sumables. Todos los elementos iguales entre sí diremos que tienen la misma *cantidad* de esta magnitud.

La *cantidad* es, pues, lo que tienen de común los elementos iguales entre sí, mientras la *magnitud* es el carácter común a todos los elementos del conjunto. Ambos conceptos quedan, pues, definidos por abstracción.

Ejemplos.—La magnitud común a todos los segmentos se llama *longitud*, para distinguirla de la que caracteriza los ángulos, llamada *amplitud*. La cantidad común a todos los segmentos *iguales* entre sí se llama asimismo *longitud* de cada uno de ellos (en lugar de cantidad de longitud). Pero aun cuando, para abreviar, se designen la cantidad y la magnitud con la misma palabra no hay que con fundir los conceptos. Análoga observación para la amplitud.

2. Suma de cantidades. Cantidad múltiple y submúltiple de otra.— Puesto que las sumas de sumandos respectivamente iguales son iguales (propiedad uniforme), podemos definir la suma de cantidades como la cantidad correspondiente a las sumas de elementos representados por aquéllas. Así podemos hablar de una suma de longitudes o de amplitudes. Claro es que la suma de cantidades tiene, por consiguiente, las mismas propiedades que la suma de los elementos que representa.

Una cantidad α se dice n-múltiple de otra β cuando es igual a la suma de n sumandos iguales a ella ; y escribiremos $\alpha=n\beta$ o también $\beta=\alpha:n$, o bien $\beta=\frac{\alpha}{n}$, diciendo también que β es la n^{a} parte alícuota de α.

NOTA.—Obsérvese que para poder hablar propiamente de *magnitud* y *cantidad* no basta establecer entre los elementos del conjunto una relación de igualdad. Así, por ejemplo, todas las rectas del plano pueden relacionarse entre sí mediante la noción de paralelismo que cumple (mediante fácil convenio) las condiciones 1 y 2. Tenemos así definido un conjunto homogéneo mediante un criterio de igualdad de «dirección». Ahora bien, la dirección no es una magnitud por cuanto no tiene sentido hablar de una suma de direcciones.

3. Magnitudes escalares.—Toda magnitud definida por un conjunto que cumpla las condiciones 1, 2, 3 y 4 recibe el nombre de *escalar* si, además, los elementos del conjunto pueden *ordenarse* linealmente ; es decir, si entre los elementos no iguales puede establecerse una relación, que representaremos con el signo $<$ (menor que) o su inversa por $>$ (mayor que), con las siguientes propiedades:

5. *Dados dos elementos α y β no iguales, es $\alpha<\beta$ o $\beta<\alpha$, que también puede escribirse $\beta>\alpha$ y $\alpha>\beta$.*

Propiedad transitiva.—Si $\alpha\leqslant\beta$ y $\beta<\gamma$ es $\alpha<\gamma$.
—Si $\alpha\geqslant\beta$ y $\beta>\gamma$ es $\alpha>\gamma$.

Ley de monotonía.—Si es $\alpha<\beta$, es también $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

De estas propiedades se deducen fácilmente, como en Aritmética para los números, las que permiten operar con desigualdades.

De $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$, se desprende, por la ley de monotonía, $\alpha+\gamma<\beta+\gamma<\beta+\delta$, y, por la propiedad transitiva, $\alpha+\gamma<\beta+\delta$.

De $\alpha>\beta$, $\gamma<\delta$ se desprende $\alpha-\gamma>\beta-\delta$, pues si fuera $\alpha-\gamma\leqslant\beta-\delta$ sumando $\gamma<\delta$ se tendría $\alpha<\beta$, contra lo supuesto.

Puesto que la relación $>(<)$ subsiste al sustituir los elementos por sus iguales, podemos definir la ordenación de cantidades por la de los elementos que éstas representan, y hablar de una longitud mayor o menor que otra. Claro es que tal ordenación cumplirá las mismas propiedades establecidas para los elementos.

De las propiedades establecidas en lecciones anteriores resulta que la longitud de los segmentos y la amplitud de los ángulos son magnitudes escalares.

4. Diferencia de cantidades. Magnitudes absolutas y relativas.— Dados los elementos α y β de una magnitud escalar se define la diferencia $\delta=\alpha-\beta$ como un elemento que sumado a β da α, es decir, $\delta+\beta=\alpha$. Según postulemos la existencia de dicha diferencia resultan categorías distintas de magnitudes. Si se admite :

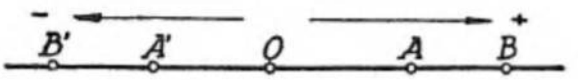
6. *Existe* $\alpha-\beta$ *cuando y sólo cuando* $\alpha \geqslant \beta$, la magnitud se llamará *absoluta*. En particular $\alpha-\alpha=0$, puesto que $\alpha+0=\alpha$.

6 bis.—*Existe* $\alpha-\beta$ *siempre*, la magnitud se llama relativa. En este caso existen cantidades llamadas *opuestas* cuya suma es 0, pues si es $\delta=\alpha-\beta$, $\delta'=\beta-\alpha$, se tendrá $\delta+\beta=\alpha$, $\delta'+\alpha=\beta$ y sumando $\delta+\delta'+\beta+\alpha=\alpha+\beta$, de donde $\delta+\delta'=(\beta+\alpha)-(\alpha+\beta)=0$ En cualquier caso la *diferencia* es única, pues si $\delta+\beta=\alpha$ $\delta'+\beta=\alpha$ debe ser $\delta+\beta=\delta'+\beta$, lo que exige $\delta=\delta'$ por la ley de monotonía.

Los segmentos y ángulos estudiados hasta ahora dan origen o las magnitudes *longitud* y *amplitud* absolutas. Los segmentos orientados de una recta, darán origen al concepto de longitud relativa.

5. Igualdad, desigualdad y suma de segmentos orientados.—Recordemos que un segmento orientado (vector) sobre una recta define una traslación que tiene dicha recta por guía. Convendremos en que: Dos segmentos orientados en una recta son *iguales* cuando definen *la misma traslación*.

Un segmento orientado es *suma* de dos cuando define la traslación resultante de las que definen los sumandos. De modo que por definición $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ Transportados todos los segmentos orientados de la recta de modo que coincidan sus orígenes en O conservando su sentido, los puntos extremos formarán un conjunto linealmente ordenado, en el que podemos adoptar un sentido u orden de prelación que llamaremos *positivo* (y *negativo* al opuesto). Dados ahora dos segmentos orientados no iguales de la recta, diremos que es *menor* aquel cuyo extremo *precede* al del otro en el orden establecido.



De las propiedades de la traslación estudiadas en la lección 7.ª se desprende fácilmente que estas definiciones de igualdad y suma cumplen las propiedades 1, 2, 3 y 4 (en particular, la propiedad asociativa se desprende del hecho de formar grupo tales traslaciones, y la conmutativa del carácter abeliano del mismo; la propiedad modular resulta de haber considerado la identidad como caso particular del movimiento).

De las propiedades de la ordenación y sentido, establecidas en las lecciones 2.ª y 3.ª, se desprende además que el anterior criterio de desigualdad cumple las condiciones 5 de toda magnitud escalar.

Obtenemos así longitudes *relativas*, susceptibles de ser consideradas en dos sentidos. Llamaremos *positivos* o *negativos* los segmentos, y también las longitudes que definen, según que estén orientados en el sentido elegido como positivo o en el opuesto.

Dos segmentos de igual longitud absoluta pero de opuesto sentido se llaman *opuestos* y representan dos traslaciones recíprocas una de otra, cuya resultante es la identidad, la cual designaremos por 0. Representando por $+s$ un segmento, su opuesto se representará por $-s$, para que sea, como en los números, $+s+(-s)=0$. Restar un segmento es lo mismo que sumar el opuesto, con lo que la resta se reduce a la suma, y es siempre posible.

Del criterio de desigualdad establecido resulta $-s<0<+s$.

De la definición de suma se desprenden además las relaciones

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0 \qquad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$

Convenios análogos se establecen para definir la igualdad, desigualdad y suma de *ángulos orientados*, definiendo la amplitud relativa.

Generalizando, llamaremos cantidades *positivas* de una magnitud relativa las mayores que la cantidad nula y *negativas* las menores.

6. Magnitudes escalares continuas.— Según acabamos de ver, elegido un punto origen común de los segmentos orientados de una recta, a cada longitud orientada corresponde un punto extremo en la recta. (Si no hubiésemos considerado más que segmentos absolutos la representación de longitudes se hubiese efectuado sólo en una semirrecta.) Ahora bien, los puntos de una recta o semirrecta verifican el axioma de continuidad establecido en la lección 13. Ello nos permite enunciar, para las longitudes tanto absolutas como orientadas, la siguiente propiedad común, en la que se han sustituído las palabras longitud por la genérica «cantidad».

7. *Dada una clasificación de las cantidades de una misma magnitud en dos clases* C_1 *y* C_2, *tales que:*

a) *existen cantidades en una y otra clase*

b) *toda cantidad de la magnitud pertenece a una u otra clase*

c) *toda cantidad de la clase* C_1 *es menor que toda otra de la clase* C_2

existen una cantidad y sólo una, α, *tal que: toda cantidad menor que* α *pertenece a la clase* C_1 *y toda cantidad mayor que* α *pertenece a la clase* C_2.

Llamaremos a α *frontera* de las dos clases, y como, por *b*, ha de pertenecer a una u otra clase, será la cantidad menor de la clase C_2 o la mayor de C_1.

Toda magnitud escalar que cumpla la propiedad 7 se llamará *continua*. Son pues, magnitudes escalares continuas la longitud y la amplitud, así como otras magnitudes geométricas (área, volumen) que definiremos más adelante.

7. Propiedades de las magnitudes escalares continuas.—En una magnitud escalar continua se verifican las siguientes propiedades:

I. (Weierstrass).—*Toda sucesión indefinida de cantidades* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n, \dots$ *monótona creciente y acotada, es decir, tal que* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n \leqslant \dots < A$ (*fija*), *tiene un límite* $\alpha < A$.

La palabra *límite* tiene significado análogo al que tiene en Análisis: *Para cada cantidad* γ *menor que* α, *existe un cierto término de la sucesión a partir del cual todos los términos siguientes están entre* γ *y* α.

En efecto, clasifiquemos las cantidades de la magnitud en las dos clases siguientes: C_1 formada por todas las iguales o menores que algún término de la sucesión; C_2 formada por todas las mayores que todos los términos de la sucesión. Esta clasificación cumple las condiciones exigidas en la propiedad 7: la *b*) por evidencia, la *c*) por la propiedad transitiva de la desigualdad, y la *a*) por pertenecer a C_1 los términos de la sucesión y a C_2 la cantidad A y todas las mayores que ella. Existe, pues, una cantidad α frontera de ambas clases que cumple la tesis, pues toda cantidad γ menor que α, según 7, pertenecerá a C_1, es decir, será menor (o igual) que algún término de la sucesión, y, por tanto, será menor que todos los que le siguen. Además, no puede ser $A<\alpha$ por pertenecer A a la clase C_2. Análoga propiedad puede enunciarse para sucesiones monótonas decrecientes, de términos $\alpha_i>A$.

II. (Arquímedes).—*Dadas dos cantidades absolutas* α, β *desiguales*, $0<\alpha<\beta$, *existe un entero* n *tal que* $n\alpha\geqslant\beta$.

En efecto, si para cualquier n fuese $n\alpha<\beta$ la sucesión monótona creciente $\alpha<2\alpha<3\alpha<\ldots$ tendría, por lo anterior, una cantidad límite λ tal que *para toda cantidad* $\gamma<\lambda$ habría infinitos términos de la sucesión comprendidos entre γ y λ; pero como dos consecutivos difieren en α, ello exigiría $\alpha<\lambda-\gamma$, lo que es imposible si tomamos $\gamma>\lambda-\alpha$.

III. (Cantor).—*Dadas dos sucesiones monótonas convergentes de cantidades, es decir,*

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n\leqslant\ \ldots\leqslant\alpha'_n\leqslant\ldots\leqslant\alpha'_3\leqslant\alpha'_2\leqslant\alpha'_1$$

tales que para toda cantidad $\delta>0$ *puedan hallarse dos términos* $\alpha_i\alpha'_i$, *a partir de los cuales sea* $\alpha'_i-\alpha_i<\delta$, *ambas sucesiones tienen un límite común* α.

En efecto, por I, la primera tiene un límite α y la segunda otro α', que es $=\alpha$, pues si estos límites no coincidieran debería ser $\alpha'_i-\alpha_i>\alpha'-\alpha$, y tomando $\delta=\alpha'-\alpha$, estaríamos en contradicción con la hipótesis.

Si las cantidades son longitudes y llevamos todos los segmentos de las sucesiones sobre una recta a partir de un origen común, los extremos formarán dos sucesiones *ordenadas* de puntos A_1, A_2, A_3, ... A_n, A'_n, ... A'_3, A'_2, A'_1 tales que la distancia $A_nA'_n$ puede hacerse tan pequeña como se quiera. La propiedad enunciada se traduce en la existencia de *un punto límite* A de ambas sucesiones, es decir, tal que en el interior de todo segmento de punto medio A existen infinitos puntos de ambas sucesiones. Análogo enunciado geométrico para amplitudes, es decir, para semirrectas de un haz.

8. **Divisibilidad de segmentos y ángulos.**— La posibilidad de la división de un segmento en un número cualquiera de partes iguales quedó establecida con la construcción expuesta en la lección 12. No resulta, en cambio, posible construir, con la regla y compás, un ángulo que sea la n^a parte de otro dado, cualquiera que sea n (*). Demostraremos, sin embargo, su existencia. Sea α el ángulo dado.

Dado un número natural n *es posible hallar ángulos* x *tales que* $nx<\alpha$ (1): pues basta tomar p tal que $2^p>n$ y construir por bisecciones $x=\alpha:2^p$.

Hallado un ángulo x que cumpla (1), siempre es posible hallar otro mayor x' que también la cumpla; pues basta tomar $x'=x+\varepsilon$, eligiendo un ángulo ε tal que sea $n\varepsilon<\alpha-nx$ (lo que es posible por el mismo razonamiento anterior). Resumiendo: *Entre los ángulos* x *que cumplen* (1) *no hay ninguno que sea mayor que todos los demás.* Análogamente: *Es posible hallar ángulos y que cumplan* $ny>\alpha$; *pero no existe ninguno que sea menor que todos los demás.*

(*) La demostración de tal imposibilidad requiere recursos superiores.

Demostremos ahora que: *Existe un ángulo* α *tal que* $n\alpha'=\alpha$.

En efecto, si no existiera, todos los ángulos se podrían clasificar en:

$$\left.\begin{array}{l}1.^{a}\ \text{Angulos } x \text{ tales que } nx<\alpha \\ 2.^{a}\ \text{Angulos } y \text{ tales que } ny>\alpha\end{array}\right\}\ \text{de donde } x<y \text{ (por reducción al absurdo)}$$

clases que, por lo demostrado, cumplirían las condiciones *a*), *b*) y *c*) y existiría un ángulo frontera, mayor que todos los ángulos x o menor que todos los y, contra lo probado antes.

En resumen, *dado un segmento o un ángulo cualquiera existe su* n^{a} *parte, cualquiera que sea el número natural* n.

9. Divisibilidad de una magnitud escalar.—El razonamiento que ha permitido demostrar la existencia de la n^{a} parte alícuota de un ángulo podrá repetirse para toda magnitud cuyas cantidades puedan simplemente bisecarse. Con objeto, pues, de hacer generalizable a toda magnitud escalar continua la operación de medida, objeto de la lección siguiente, señalaremos como última de las propiedades esenciales de las magnitudes escalares *medibles* la siguiente:

8. *Dada una cantidad cualquiera* α *de la magnitud, existe su mitad.*

Para las longitudes y las amplitudes, esta propiedad, lo mismo que las anteriores, es consecuencia de los axiomas de la Geometría.

NOTA

Es usual definir como magnitudes *escalares* aquellas cuyas cantidades cumplen las propiedades *1* a *5*, relativas a la *igualdad, suma* y *desigualdad*, y además el enunciado de *Arquímedes* (§ 7, II), así como la *divisibilidad* de toda cantidad por cualquier número natural n (*), añadiendo el calificativo de *continuas* si además cumplen el *axioma de continuidad*.

Enunciado este axioma en la forma de Dedekind (**) y admitida la existencia de la resta (***), se ha visto cómo el de Arquímedes es consecuencia de él y cómo además la divisibilidad por n se deduce de la divisibilidad por 2 (****). También ésta se podría demostrar por clasificación de las cantidades en aquellas cuyo duplo es mayor que la cantidad dada α y aquellas cuyo duplo es menor que α; postulando la existencia efectiva de cantidades cuyo doble es menor que α, pero es más cómodo admitir directamente la existencia de $\alpha:2$, como hemos hecho.

(*) V. por ejemplo, Rey Pastor: «Análisis algebraico», o R. San Juan: «Teoría de las magnitudes físicas».

(**) Otra forma de Cantor, puede verse en la Nota final de Capítulo.

(***) Es necesario postular esta existencia. Los elementos definidos por un par de números (p, α), p entero α real $\geqslant 0$ con la definición de suma$=(p,\alpha)+(p',\alpha')=(p+p',\alpha+\alpha')$ y la de desigualdad: $(p,\alpha)>(p',\alpha')$ cuando $p>p'$, y si $p=p'$ cuando $\alpha>\alpha'$, verifican las propiedades 1, 2, 3, 4, 5 y aun las 7 y 8, pero no verifica la 6 (no existe, p. ej., $(3,2)-(2,3)$ a pesar de ser $(3,2)>(2,3)$), ni el axioma de Arquímedes ($n(0,1)<(1,0)$ por grande que sea n). (Ejemplo que agradecemos al Sr. García Rodejas.)

(****) La independencia de las restantes propiedades puede verse en la obra citada de San Juan.

LECCIÓN 18.—MEDIDA Y PROPORCIONALIDAD

1. Medida de las cantidades de una magnitud escalar.—Sea α una cantidad cualquiera de una magnitud escalar continua. Elijamos una cantidad positiva fija u que llamaremos *unidad*. Pueden ocurrir los siguientes casos:

I. α es múltiple de u; es decir, existe un entero n tal que $\alpha = nu$

Diremos entonces que este número n es la medida de α con la unidad u (con el signo que le corresponda según el sentido de la cantidad, en caso de ser la magnitud relativa).

II. α es múltiple de una parte alícuota de u. Es decir, existen dos enteros p y q (q positivo) tales que $\alpha = p\dfrac{u}{q}$.

Diremos entonces que el número racional p/q es la *medida* de α y escribiremos también $\alpha = \dfrac{p}{q}u$.

En los dos casos anteriores se dice que α y u son conmensurables. Resumiéndolos, diremos: A cada cantidad α comensurable con la unidad, corresponde una medida racional. Recíprocamente: A cada número racional p/q corresponde una cantidad cuya medida es este número. (Basta considerar la cantidad $p\dfrac{u}{q}$ y tomarla en el sentido que corresponda a su signo.)

Es fácil probar que *en esta correspondencia se conserva el orden*. Es decir, si las cantidades α y β tienen por medidas $\dfrac{m}{n}$ y $\dfrac{p}{q}$, toda relación de la forma $\dfrac{m}{n} \gtreqless \dfrac{p}{q}$ implica otra análoga en las cantidades: $\alpha \gtreqless \beta$; pues llamando u' a la parte alícuota $u:(qn)$, se tendrá $mq \gtreqless pn$, $(mq)u' \gtreqless (pn)u'$, o sea $m\dfrac{u}{n} \gtreqless p\dfrac{u}{q}$, es decir, $\alpha \gtreqless \beta$. Y, por consiguiente, los recíprocos son ciertos: Si $\alpha \gtreqless \beta$ es $\dfrac{m}{n} \gtreqless \dfrac{p}{q}$.

III. Supongamos ahora α inconmensurable con u, es decir, no múltiple de ninguna parte alícuota de u. Podremos clasificar las cantidades conmensurables en dos clases, según sean mayores o menores que α. Como a cada número racional corresponde una cantidad conmensurable y se conserva la ordenación, queda así establecida una clasificación o cortadura en el campo de los números racionales, la cual define un número irracional μ que llamaremos también *medida* de α con la unidad u, escribiendo $\alpha = \mu u$.

Si la magnitud escalar es continua, también a todo número irracional corresponde una cantidad que le tiene por medida. Basta definir el número mediante dos sucesiones monótonas convergentes de números racionales, a las que corresponderán dos sucesiones análogas de cantidades conmensurables, y aplicar la propiedad de Cantor demostrada en la lección anterior. La cantidad límite común de ambas sucesiones es la única comprendida entre ambas y no puede tener otra medida que la del *único* número real comprendido entre las sucesiones de medidas.

Queda así establecida entre las cantidades de una magnitud escalar continua y los números reales una correspondencia biunívoca que conserva el orden.

Es frecuente aplicar al número, medida, la misma palabra con que se designa la magnitud y la cantidad y decir, por ejemplo, la longitud de un segmento es 3 cm. en lugar de *la medida de la cantidad de longitud* es 3 cm.

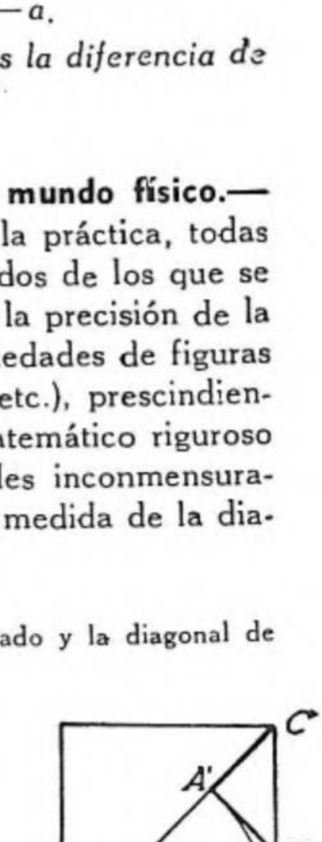
2. Abscisas de los puntos de una recta.—Aplicando lo anterior a los segmentos orientados de una recta, que tienen su origen común O (Lecc. 17, § 5), a cada segmento a y por consiguiente a su extremo A, corresponde un número, medida de OA con su signo, llamado *abscisa* de A en la recta. Todo punto de la recta tiene, pues, su abscisa y, recíprocamente, elegido un origen y una unidad, todo número real viene representado por un punto de la recta. De aquí que podamos representar las cantidades de una magnitud escalar mediante los puntos de una *escala rectilínea*, lo que justifica su nombre.

El conocimiento de las abscisas de los puntos de una recta permite resolver los problemas métricos sobre ella, así la longitud l del segmento orientado AB, o *distancia* AB, se puede expresar en función de las abscisas a b de estos puntos, pues de $OA+AB=OB$, resulta $a+l=b$, o sea $l=b-a$.

La distancia orientada AB *entre dos puntos de una recta es la diferencia de las abscisas del extremo* B *y del origen* A.

3. Medidas y unidades de longitud y amplitud en el mundo físico.—La noción de inconmensurabilidad es puramente teórica. En la práctica, todas las medidas experimentales son números racionales aproximados de los que se conoce tan sólo un límite de error cuya pequeñez caracteriza la precisión de la medida. Sin embargo, del mismo modo que estudiamos propiedades de figuras geométricas teóricamente perfectas (cuadrados, rectángulos, etc.), prescindiendo de su existencia material, es necesario dar un sentido matemático riguroso al concepto de *medida exacta*, aun en el caso de cantidades inconmensurables; de otro modo no podríamos hablar, por ejemplo, de la medida de la diagonal de un cuadrado de lado unidad.

Es fácil demostrar geométricamente la inconmensurabilidad entre el lado y la diagonal de un cuadrado. La construcción de la figura permite deducir del triángulo rectángulo isósceles BAC otro $B'A'C'$ en el que $CA'=B'A'=B'A<\frac{1}{2}AC$



Todo segmento que estuviese comprendido un número exacto de veces en BC y BA lo estaría también en $A'C=BC-BA$ y en $B'C=AC-AB'$ Es decir, sería parte alícuota común del lado y de la hipotenusa de otro triángulo rectángulo isósceles $A'B'C$ de catetos menores que la mitad de los de dado. Reiterando el razonamiento, llegaríamos a la consecuencia de que este segmento, parte alícuota común, tendría que ser menor que la mitad de la mitad, etc., del lado, es decir, menor que cualquier segmento.

En la práctica la medición de longitudes de tamaño corriente se efectúa por aplicación directa de escalas graduadas, según los submúltiplos decimales de la unidad fundamental: el *metro*; y se anotan los metros, decímetros, centímetros, milímetros..., contenidos en el segmento medido. Teóricamente la medida decimal, así obtenida, sólo tendría un número finito de cifras en los casos de medida entera o fraccionaria irreducible de denominador de la forma $2^p \cdot 5^q$, constituyendo una sucesión periódica en los demás casos de medida racional y aperiódica en el caso de medida inconmensurable. Prácticamente, sin embargo, es difícil apreciar a simple vista décimas de milímetro.

Para medidas micro o macroscópicas se emplean métodos indirectos y unidades especiales. Las distancias interestelares se miden en *años de luz*, unidad equivalente a unos 9,46 billones de kilómetros $= 9,46 \cdot 10^{12}$ metros. Las longitudes microscópicas se expresan en *micras*, $\mu = 10^{-3}$ mm; las dimensiones atómicas se miden en la unidad Angstrom (*), $\text{Å} = 10^{-7}$ mm, que aún resulta muy grande en comparación con las dimensiones teóricas del electrón y del protón.

Unidad natural de amplitud angular es el ángulo *recto*. Desde tiempo inmemorial se ha tomado, sin embargo, como unidad el *grado sexagesimal*, que resulta de dividir el ángulo recto en 90 partes, es decir, que el ángulo completo mide 360 grados (**). Cada grado se divide en 60 minutos sexagesimales y cada uno de éstos en 60 segundos, los cuales se fraccionan decimalmente. Modernamente se ha generalizado en aparatos topográficos el uso de la división centesimal, en la que el *grado* (*centesimal*) es la centésima parte del ángulo recto, el minuto centesimal la centésima del grado, y el segundo la centésima del minuto. Esta división tiene la ventaja de permitir el uso de la notación decimal, evitando el engorroso cálculo y reducción de números complejos de varias unidades. Finalmente, en cálculos teóricos, la unidad usual es el *radián*, que definiremos más adelante.

4. Producto de una cantidad por un número.—Hemos visto cómo, en toda magnitud que cumpla las condiciones 1 a 8 (lección anterior), se puede establecer una correspondencia entre las cantidades y los números reales, de tal modo que a toda cantidad α corresponde un número a, su medida; y recíprocamente: a todo número real a (positivo si la magnitud es absoluta) corresponde una cantidad α que tiene por medida a. Representaremos esta cantidad por au, y la llamaremos *producto de la unidad* u *por el número* a.

Fácil es probar que *este producto cumple la propiedad distributiva*, es decir, $\alpha + \beta = au + bu = (a+b)u$.

La propiedad es evidente si las medidas a y b son enteras. Si son racionales $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, reduciéndolas a un común denominador, es decir, tomando la parte alícuota común u/nq como nueva unidad, podremos escribir

(*) Físico sueco (1814-74).

(**) Los antiguos astrónomos babilonios creían que el año tenía 360 días. Sin duda en esta creencia tuvo origen la división sexagesimal.

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= m\frac{u}{n} = mq\frac{u}{nq} \\ \beta &= p\frac{u}{q} = pn\frac{u}{nq} \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \alpha+\beta = (mq+pn)\frac{u}{nq}$$

lo que indica que la medida de $\alpha+\beta$ es $\dfrac{mq+pn}{nq} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q}$.

Si las medidas son irracionales, podemos suponerlas definidas por pares de sucesiones monótonas convergentes, $a \equiv (r_i, r'_i)$, $b \equiv (s_i, s'_i)$, y se tendrá

$$\left.\begin{aligned} r_i u &< \alpha < r'_i u \\ s_i u &< \beta < s'_i u \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad (r_i + s_i)u < \alpha+\beta < (r'_i + s'_i)u$$

lo que prueba que la cantidad $\alpha+\beta$ tiene por medida el número racional definido por las sucesiones $r_i + s_i$, $r'_i + s'_i$, o sea, la suma $a+b$.

5. Concepto general de medida.—Decir que a cada cantidad corresponde un número equivale a afirmar: *A entes iguales corresponden medidas iguales.* Decir que en esta correspondencia se conserva el orden es afirmar que: *A entes ordenados corresponden medidas ordenadas.*

La propiedad distributiva del producto de una cantidad por un número, puede enunciarse diciendo: *Si un ente es la suma de dos tiene por medida la suma de las medidas de estos dos.*

Estas propiedades también se expresan diciendo que *existe correspondencia en la igualdad, en el orden y en la suma entre entes y medidas,* y son a tal punto esenciales que pueden adoptarse como definición indirecta de medida, diciendo:

Medir los elementos de un conjunto homogéneo es establecer una correspondencia entre ellos y los números reales llamados sus medidas, de modo que a entes iguales correspondan medidas iguales, que a entes ordenados correspondan medidas ordenadas y que la medida de la suma de entes sea igual a la suma de las medidas de ellos.

En muchas de las mediciones físicas no se hace otra cosa que establecer una tal correspondencia entre las cantidades físicas objeto de la medición y los números de una cierta escala, mediante aparatos especiales (dinamómetros, amperímetros, ...) que aplican convenios de medida universalmente admitidos. Es preciso, pues, desde un principio no olvidar este carácter *convencional* de la medida quitándole toda rigidez dogmática. Sólo así se estará bien dispuesto posteriormente a admitir de buen grado las modificaciones que los avances de la Física moderna imponen aún en los conceptos fundamentales de medida, de espacio y tiempo, tradicionalmente tenidos por intangibles.

6. Proporcionalidad estre magnitudes.—Consideremos dos magnitudes o simplemente dos sistemas S y S' de entes que cumplan las condiciones 1 a 7 de la lección anterior. Supongamos además que entre sus elementos existe una correspondencia que cumple las siguientes propiedades:

Ser biunívoca.—A cada elemento $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de S corresponde un elemento $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ de S'.

Existir correspondencia en la igualdad, en el orden y en la suma.—Si $\alpha=\beta$ es $\alpha'=\beta'$. Si α, β, γ, están ordenados, α', β', γ' ... también lo están. Si $\gamma=\alpha+\beta$ es $\gamma'=\alpha'+\beta'$.

Supuestas verificadas estas condiciones, diremos que las magnitudes o sistemas de cantidades *son proporcionales*. Es fácil probar entonces que

Las medidas de cantidades correspondientes α, α', *con unidades correspondientes* u, u'. *son iguales.*

En efecto, todas las operaciones de medida de α con la unidad u, descritas al comienzo de la lección, se fundan en las relaciones de igualdad, desigualdad y suma (múltiplos de la unidad, fraccionamiento en partes iguales, clasificación...) las cuales se conservan íntegramente en la correspondencia establecida. Por lo tanto, las operaciones para medir α con la unidad u serán *las mismas* que para medir α' con la unidad u' y, por consiguiente, las medidas obtenidas serán iguales.

ESCOLIO.—*Cuando se trata de magnitudes absolutas*, la desigualdad puede definirse mediante la suma ($\gamma>\alpha$ si $\gamma=\alpha+\beta$), y entonces *es suficiente la correspondencia en la igualdad y la suma* para que exista también correspondencia en el orden y, por tanto, proporcionalidad.

7. Medición indirecta de cantidades. Medida de arcos.— El teorema anterior permite reducir la medida de ciertas cantidades a la de otras proporcionales a ellas. Así, por ejemplo, la correspondencia existente entre los arcos de una circunferencia y los ángulos centrales, cumple, en virtud de lo demostrado en el Cap. II, las condiciones de la proporcionalidad:

Los arcos de una circunferencia son proporcionales a los ángulos centrales correspondientes.

Podemos así medir los arcos mediante los ángulos centrales o al revés (limbos circulares) tomando unidades correspondientes. De aquí se desprende la definición de grado, minuto y segundo de arco, que el lector ya conoce.

8. Proporción entre cantidades.—La medida de una cantidad α con otra u tomada como unidad, se llama *razón* de estas dos cantidades y se escribe $\alpha:u$ o bien $\dfrac{\alpha}{u}$ Expresaremos, pues, la igualdad de medidas entre cantidades proporcionales, escribiendo la *igualdad de dos razones*

$$\alpha:u=\alpha':u' \quad \text{o bien} \quad \frac{\alpha}{u}=\frac{\alpha'}{u'}$$

que se llama *proporción*.

Con dos pares de cantidades correspondientes en dos magnitudes proporcionales podemos, pues, formar una *proporción*, lo que justifica la denominación.

La correspondencia entre cantidades y sus medidas cumple, según se ha visto, las condiciones de la proporcionalidad (§§ 3 y 4), de donde:

La razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas tomadas con la misma unidad.

Esta proposición permite reducir a proporciones numéricas las proporciones entre cantidades y aplicar a éstas las denominaciones y propiedades de aquéllas, conocidas por Aritmética (siempre que las operaciones indicadas con los números se pueden efectuar también con las cantidades). Así, por ejemplo:

I. *Si dos proporciones tienen iguales los tres términos que ocupan los mismos lugares, los cuartos también son iguales.* De $\alpha:\beta=\alpha':\beta'$ y de $\alpha:\beta=\alpha':\beta''$ resulta $\beta'=\beta''$.

II. *De toda proporción se deduce otra invirtiendo las razones.*

De $\alpha:\beta=\alpha':\beta'$ resulta $\beta:\alpha=\beta':\alpha'$.

III. *De toda proporción se deduce otra sustituyendo cada antecedente (consecuente) por su suma o diferencia con el consecuente (antecedente) de la misma razón.*

$$\text{De } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{resulta} \quad \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\alpha'\pm\beta'}{\beta'}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha'+\beta'}{\alpha'-\beta'}$$

IV. *En una proporción entre cuatro cantidades «homogéneas» se pueden permutar los medios y los extremos.* De $\alpha:\beta=\alpha':\beta'$ resulta $\alpha:\alpha'=\beta:\beta'$.

Si α y α' no son homogéneos habría que definir previamente la razón $\alpha:\alpha'$.

V. *En una proporción* entre cuatro cantidades homogéneas *la suma o diferencia de antecedentes es a la de consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente.*

$$\text{De } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'} \quad \text{resulta} \quad \frac{\alpha\pm\alpha'}{\beta\pm\beta'}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Si α y α' no son homogénas la expresión $\alpha\pm\alpha'$ carece de sentido.

9. Cambio de unidad.— Sea a la medida de una cantidad α con la unidad u. Si cambiamos u por $u'=ku$ la nueva medida a' de α será (§ anterior)

$$a'=\frac{\alpha}{u'}=\frac{au}{ku}=\frac{a}{k} \qquad \text{de donde} \quad a=ka'$$

y por tanto

$$\frac{a}{a'}=\frac{u'}{u}$$

Las medidas de una misma cantidad con unidades distintas están en razón inversa de dichas unidades.

EJEMPLO: Una pulgada inglesa = 2,54 cm. Por tanto: medida de una longitud en pulgadas = medida en cm : 2,54.

10. Obtención de la medida en fracción continua.

La definición de medida, dada al comenzar la lección, no da un método para obtenerla, ya que, salvo en el caso de medida entera, implica un número indefinido de tanteos. La aplicación de escalas graduadas (medida decimal) tiene el inconveniente de dar desarrollos de infinitas cifras en la mayor parte de casos de medida conmensurable.

Se llega metódicamente a la medida racional, cuando existe, aplicando a la cantidad y a la unidad un algoritmo operatorio análogo al que se emplea en Aritmética entre números naturales para hallar su máximo común divisor. Obtendremos así la medida en forma de fracción continua limitada si la medida es racional e ilimitada si es irracional. Para concretar operaremos con segmentos absolutos.

Supongamos, por ejemplo, que el segmento s contiene a veces la unidad u, y que sobra un resto r_1. Se tendrá

$$s = au + r_1 \quad (r_1 < u); \quad \frac{s}{u} = a + \frac{r_1}{u} \tag{1}$$

Llevemos ahora r_1 sobre u y supongamos que cabe b veces sobrando el segmento r_2

$$u = br_1 + r_2 \quad (r_2 < r_1); \quad \frac{u}{r_1} = b + \frac{r_2}{r_1} \tag{2}$$

Llevemos análogamente r_2 sobre r_1 y sea c el número de veces que cabe en él, y r_3 el nuevo resto.

$$r_1 = cr_2 + r_3 \quad (r_3 < r_2); \quad \frac{r_1}{r_2} = c + \frac{r_3}{r_2} \tag{3}$$

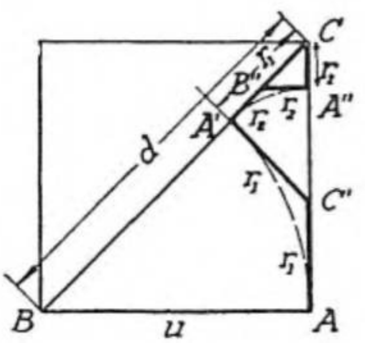
Supongamos, finalmente, que $r_2 = dr_3$ sin resto, o sea $\frac{r_2}{r_3} = d$ (4)

Sustituyendo ahora la inversa de (4) en (3); la de (3) en (2) y la de (2) en (1) se obtiene

$$\frac{s}{u} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

La medida es, pues, una fracción continua cuyos cocientes incompletos son los números de veces que cada resto está contenido en el anterior.

Es fácil ver, como en Aritmética, que si los segmentos s y u tienen un segmento divisor común, éste debe serlo también de todos los restos sucesivos, y como cada uno de ellos es menor que la mitad del anterior (*) la operación ha de conducir a un resto nulo, y el último resto no nulo es precisamente el mayor segmento divisor común buscado. Si tal divisor no existe, la operación no tiene fin.



Apliquemos, por ejemplo, el procedimiento a la obtención de la medida de la diagonal del cuadrado mediante el lado como unidad.

Por la figura se tiene.

$$d = u + r_1 \qquad \frac{d}{u} = 1 + \frac{r_1}{u}$$

$$u = 2r_1 + r_2 \qquad \frac{u}{r_1} = 2 + \frac{r_2}{r_1}$$

(*) En efecto, de las igualdades escritas se desprende $u = br_1 + r_2 > 2r_2$, $r_1 = cr_2 + r_3 > 2r_3$, ...

Puesto que el triángulo $CA'C'$ es rectángulo isósceles como el CAB de partida, podemos repetir la construcción, obteniendo

$$r_1 = 2r_2 + r_3 \qquad \frac{r_1}{r_2} = 2 + \frac{r_3}{r_2}$$

formándose otro triángulo $A''B''C$ rectángulo isósceles con el que podemos seguir repitiendo la operación... Cada resto cabrá, pues, invariablemente dos veces en el anterior, y la fracción continua indefinida tendrá la forma

$$\frac{d}{u} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+\ddots}$$

que es el desarrollo de $\sqrt{2}$. (V., por ejemplo, Rey Pastor: «Análisis algebraico».)

NOTAS AL CAPITULO V

Sobre la caracterización de la proporcionalidad.—Indicando con el símbolo $y=f(x)$ la correspondencia biunívoca entre cantidades x de una magnitud y las y de otra, la correspondencia en la suma vendrá expresada por la ecuación funcional $f(x+x')=f(x)+f(x')$ que se satisface para la solución clásica de Cauchy $y=Cx$ (proporcionalidad) y además para ciertas correspondencias singulares de carácter discontinuo que no hemos de desarrollar aquí (*).

Imponiendo la condición de conservación del orden (que suele omitirse) se eliminan estas soluciones excepcionales y queda como única solución, es decir, caracterizada, la proporcionalidad. Ya hemos dicho que para las magnitudes *absolutas* es inecesario añadir la conservación del orden.

Otras condiciones menos restrictivas que la conservación del orden bastan asimismo para eliminar las soluciones excepcionales de la referida ecuación funcional, pero su estudio es más propio del *Análisis* que de este curso (**).

El axioma de las clases contiguas de Cantor.— En lugar del enunciado de Dedekind (lección 17, § 6) para caracterizar la continuidad de una magnitud, enuncian algunos teóricos el axioma de Cantor, que dice así:

Dadas dos clases de cantidades homogéneas a y b llamadas «contiguas», es decir, tales que

1.º toda cantidad a es menor que b

2.º dada una cantidad ϵ positiva es posible hallar dos cantidades a y b tales que $b-a<\epsilon$.

existe una cantidad α, y una sola, tal que toda $a\leqslant\alpha$ y toda $b\geqslant\alpha$.

Este axioma puede demostrarse como consecuencia del de Dedekind (lec. 17, § 6). Clasifiquemos, en efecto, todas las cantidades de la magnitud en las dos siguientes clases: A) formada por cantidades menores que alguna a; B) formada por cantidades no menores que ninguna a.

Se comprueba fácilmente que esta clasificación cumple las premisas del axioma de Dedekind; por tanto existe una cantidad frontera α que es forzosamente la menor de la clase B (no la mayor de A por no existir tal); por tanto toda $a\leqslant\alpha$. Análogamente se prueba la existencia de una cantidad α' tal que toda $b\geqslant\alpha'$. Ahora bien, α' debe ser igual a α, de lo contrario no podría verificarse $b-a<\epsilon$ para $\epsilon=\alpha'-\alpha$, con lo que queda demostrado el axioma.

El axioma de Dedekind no puede, en cambio, demostrarse mediante el de Cantor, sin añadir el de Arquímedes; de modo que en definitiva el axioma de Dedekind es equivalente al conjunto de los de Cantor y Arquímedes.

(*) V. R. San Juan: «Teoía de las magnitudes físicas».

(**) V. R. San Juan, loc. cit., y Rey Pastor: «Teoría de funciones reales»

Capítulo VI.—HOMOTECIA Y SEMEJANZA

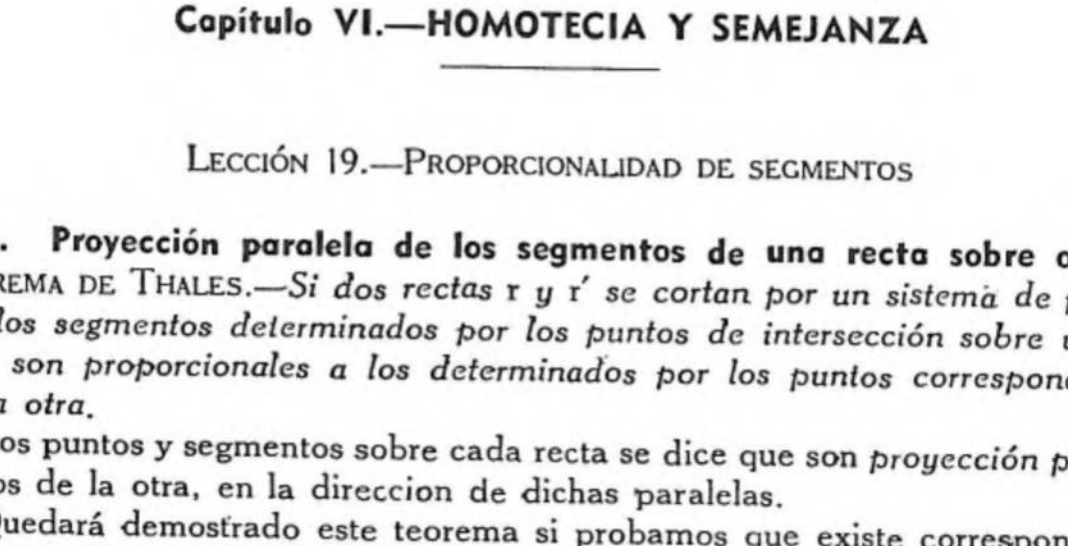
LECCIÓN 19.—PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

1. Proyección paralela de los segmentos de una recta sobre otra.— TEOREMA DE THALES.—*Si dos rectas* r *y* r′ *se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra.*

Los puntos y segmentos sobre cada recta se dice que son *proyección paralela* de los de la otra, en la direccion de dichas paralelas.

Quedará demostrado este teorema si probamos que existe correspondencia en la igualdad, desigualdad (orden) y en la suma de dichos segmentos.

En primer lugar, a segmentos iguales $AB=CD$ sobre una recta corresponden segmentos iguales en la otra $A'B'=C'D'$; pues si r y r' son paralelas se



tendrá $AB=A'B'$, $CD=C'D'$, y al ser $AB=CD$ son también iguales los segundos miembros. Si r y r' no son paralelas, efectuemos la traslación del trapecio $ABB'A'$ (o triángulo si A y A' coincidieran) que lleve a coincidir AB con CD; el segmento $A'B'$ se transforma en $A''B''$ comprendido entre las paralelas CC' y DD', con lo que se tendrá $A'B'=A''B''$ (por traslación) y $A''B''=C'D'$ (por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas); de donde $A'B'=C'D'$, como queríamos demostrar.

Por otra parte, si M es interior a AB, la paralela por M está en la faja de plano limitada por las paralelas AA' y BB' y, por tanto, M' será interior a $A'B'$, en otros términos:

Si es $AM<AB$ es también $A'M'<A'B'$
Si es $AB=AM+MB$ es también $A'B'=A'M'+M'B'$

lo que prueba la correspondencia en la ordenación y en la suma, y por tanto, junto con lo anterior, la proporcionalidad enunciada.

Así, por ejemplo,

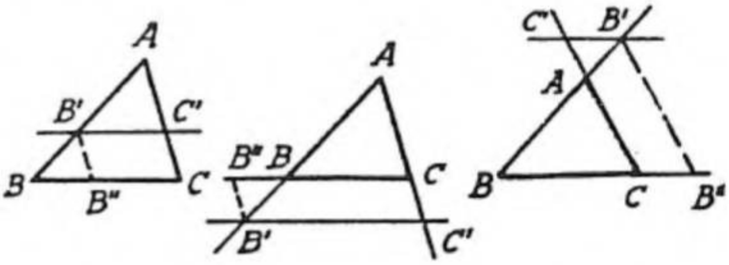
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \qquad \text{etc.}$$

2. Segmentos determinados por una paralela a un lado de un triángulo.— Como corolario del teorema anterior podemos enunciar el siguiente:

Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos o sus prolongaciones segmentos proporcionales a ellos.

Así, si $B'C'$ son las intersecciones de una paralela a un lado BC del triángulo ABC con las rectas AB y AC, se tendrá

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$$



Recíprocamente: *Si una recta corta a dos lados de un triángulo (o a sus prolongaciones) determinando segmentos proporcionales a ellos (y situados ambos al mismo o distinto lado del vértice común), es paralela al tercer lado.*

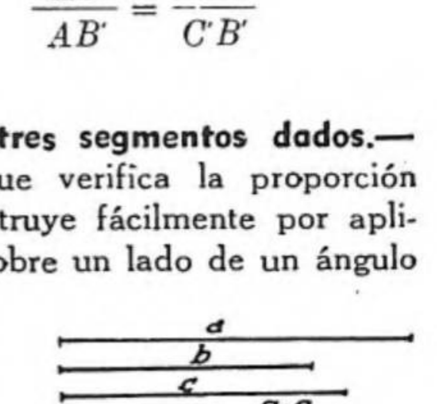
En efecto, en virtud de lo dicho en la lección anterior no hay más que un segmento AC' cuarto proporcional entre AB, AB' y AC, luego la paralela por B' pasa también por C', es decir, coincide con la secante de la hipótesis

Demostremos ahora que:

El lado BC *y segmento* B'C' *de paralela, son también proporcionales a* AB *y* AB' En efecto, trazando por B' la paralela $B'B''$ a AC se tendrá

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{CB}{CB''} \quad \text{y, por ser } CB'' = C'B', \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{CB}{C'B'}$$

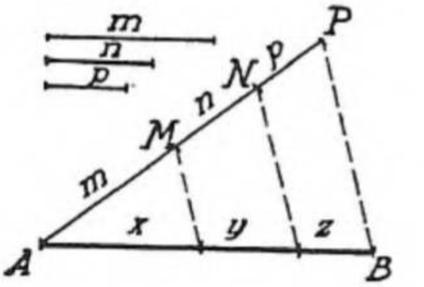
3. Construcción del cuarto proporcional a tres segmentos dados.— Dados tres segmentos a, b, c el segmento x que verifica la proporción $a:b=c:x$ se llama *cuarto proporcional*, y se construye fácilmente por aplicación de los teoremas anteriores. Llevados a y b sobre un lado de un ángulo a partir del vértice, y c sobre el otro lado, si unimos los extremos A y C de a y c y trazamos por el extremo B de b la paralela BX a AC, el punto X en que esta paralela corta al lado OC determina un segmento OX que es el cuarto proporcional pedido.



Como todos los cuartos proporcionales a tres segmentos dados son iguales (lec. anterior) la solución es independiente del ángulo elegido

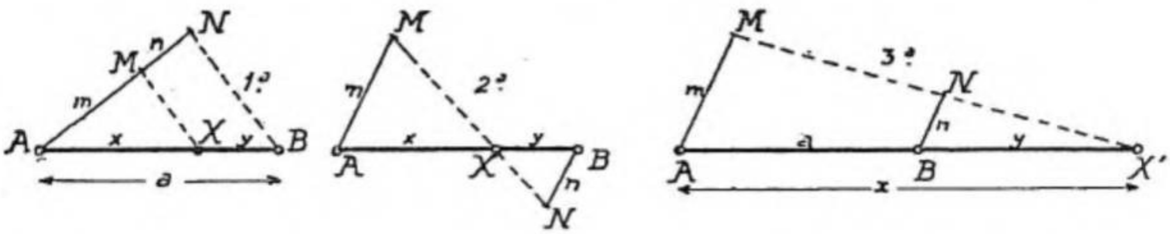
Si $c=b$ se obtiene el segmento llamado *tercero proporcional* entre a y b.

4. División de un segmento en partes proporcionales a segmentos dados.—El teorema de Thales nos permite asimismo dividir con gran sencillez un segmento dado AB en partes proporcionales a otros varios m, n, p. Llevando en efecto estos segmentos consecutivamente sobre una semirrecta concurrente con el segmento dado AB en uno de sus extremos A, y uniendo el extremo P de la suma $m+n+p$, así construída, con el extremo B del segmento, las paralelas a PB por los puntos de división M y N determinarán en el segmento dado los segmentos x, y, z proporcionales a m, n, p y cuya suma es AB.



Caso particular de esta construcción es la división del segmento en partes iguales, indicada en la lección 12, § 8.

5. Determinación de puntos de una recta por su razón de distancias a dos de ella.—Cuando las partes proporcionales en que se divide un segmento AB son dos m, n, el problema anterior es equivalente al de hallar un punto X del segmento AB, cuya razón de distancias a A, B sea igual a $m:n$. Dados A y B en un orden, no hay más que un punto interior X que cumpla esta con-



dición, puesto que el segmento $AX=x$ es el único que verifica la proporción $(m+n):m=a:x$, que se desprende de la construcción (fig. 1.ª). Este punto puede también obtenerse como indica la figura 2.ª, o sea llevando los segmentos m y n a partir de A y B sobre dos semirrectas paralelas situadas en semiplanos distintos respecto de AB, el punto X de intersección de la recta MN que une los extremos con AB es el punto pedido, puesto que se verifica, por lo demostrado antes, $x:y=m:n$.

Si llevamos m y n (fig. 3.ª) sobre semirrectas paralelas situadas en el mismo semiplano obtendremos (si $m \neq n$) un punto X' *exterior* cuya razón de distancias a A y B es asimismo $X'A:X'B=m:n$, y es el único punto exterior que la cumple, puesto que tiene que verificar asimismo en valor absoluto y signo:

$$\frac{AX'}{AX'-BX'}=\frac{m}{m-n}, \quad \text{es decir,} \quad \frac{AX'}{AB}=\frac{m}{m-n}$$

X' está pues en la semirrecta AB si el segundo miembro es positivo, es decir, si $m>n$, y en la semirrecta opuesta en caso contrario.

Si las distancias a A y B deben ser *inversamente* proporcionales a m y n bastará permutar estos segmentos. Estas construcciones son las mismas que en Mecánica elemental se estudian para hallar el punto de aplicación de la resultante de dos fuerzas paralelas, según sus sentidos.

6. Signo de la razón de distancias.—Lo anterior indica la conveniencia de considerar en ocasiones los segmentos *orientados*, atribuyéndoles un sentido y un signo a tenor de lo establecido en lección 17, § 5. De acuerdo con ello: *la razón de distancias orientadas* XA : XB *de un punto de una recta a dos puntos de ella* A *y* B, *es positiva cuando* X *no separa* A *y* B, *y negativa cuando los separa*. Con lo que podemos resumir lo anterior diciendo:

Dados dos puntos fijos A *y* B *de una recta, existe un punto* X *situado entre ambos, y sólo uno, cuya razón de distancias (negativa) es en valor absoluto igual a un número positivo dado, y un punto exterior y sólo* X′ *cuya razón de distancias (positiva) es igual a este mismo número supuesto distinto de la unidad.* Cuando este número es la unidad, el único punto interior que cumple la condición es el punto medio, y no existe punto exterior cuyas distancias a A y B sean iguales.

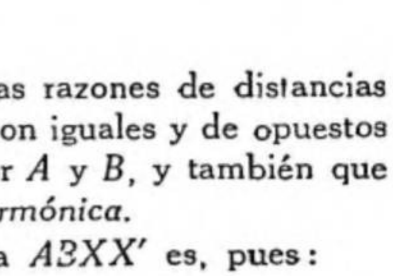
7. Cuaterna armónica.—Los puntos X y X' cuyas razones de distancias a dos puntos fijos A y B (de la recta que los contiene) son iguales y de opuestos signos se dice que están *armónicamente separados* por A y B, y también que los cuatro puntos $ABXX'$ constituyen una *cuaterna armónica*.

La condición que caracteriza la cuaterna armónica $ABXX'$ es, pues:

$$\frac{XA}{XB} = -\frac{X'A}{X'B} \quad \text{de la que resulta permutando los medios} \quad \frac{AX}{AX'} = -\frac{BX}{BX'}$$

Por tanto: A y B están también armónicamente separados por X y X'. *La separación armónica de dos pares de puntos es recíproca.*

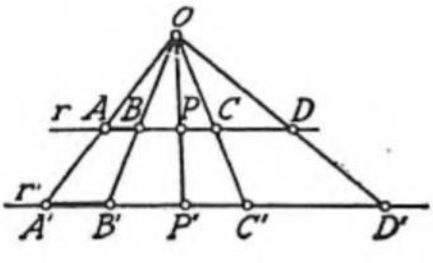
8. Construcción del cuarto armónico.—Las figuras anteriores nos sugieren la construcción del cuarto armónico X' dados los tres A, B, X. Bastará cortar por dos paralelas AM y BN una secante cualquiera MN trazada por X. Si M y N son las respectivas intersecciones, tomaremos BN' igual y opuesto a BN y la intersección de la recta MN' con AB da el punto X' armónicamente separado de X respecto de A y B. La misma construcción permite hallar X conocidos X', A y B.



9. Proyección central de los segmentos de una recta sobre otra paralela.—Diremos que un punto A se proyecta desde el centro O sobre la recta r' en el punto A', si A' es la intersección de OA con r'. Si A' y B' son las proyecciones de A y B sobre una recta r' paralela a AB, diremos que el segmento $A'B'$ es *proyección central* del segmento AB, por ser secciones del mismo ángulo AOB. Demostremos el siguiente teorema:

Los segmentos AB, BC, CD, ... *de una recta son proporcionales a sus proyecciones centrales sobre otra recta paralela,* A′B′, B′C′, C′D′, ...

En efecto, por lo demostrado en el § 2



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

Como los pies P y P' de la perpendicular común OPP' a ambas paralelas desde O, son puntos homólogos en la proyección, podemos, en resumen, afirmar:

La razón constante (llamada «razón de proporcionalidad») entre los segmentos de una recta y sus proyecciones centrales sobre otra paralela, es igual a la razón de distancias de cualquier punto y su proyección al centro, y también a la razón de distancias de ambas rectas a dicho centro.

De esta propiedad se deducen nuevas construcciones de cuartas proporcionales, que dejamos a cargo del lector.

EJERCICIOS

1. Construir dos segmentos conocidas su razón y su suma o diferencia.

2. Trazar por un punto una recta cuya razón de distancias a dos puntos dados sea conocida.

3. Demostrar que la distancia del baricentro de un triángulo a cualquier recta es la media aritmética de las distancias de ésta a los vértices.

4. Calcular la longitud del segmento interceptado en un trapecio de bases a y b por una paralela a ellos, sabiendo que divide a los lados en la razón $m:n$. Aplicación al triángulo.

5. Demostrar que las diagonales de un trapecio se dividen mutuamente en partes proporcionales a las bases.

6. El segmento interior de la para ela a las bases de un trapecio por el punto de intesección de las diagonales es bisecado por dicho punto. Demostrar dicha proposición y calcular la longitud de tal segmento en función de las bases.

7 E punto de intersección de las prolongaciones de los lados de un trapecio y el de las diagona es están alineados con los puntos medios de las bases, y están armónicamente separados por ellos. Demostración.

8. Dedúzcanse del ejercicio 7 construcciones para bisecar y duplicar los segmentos de una recta supuesta trazada otra paralela a ella, *haciendo sólo uso de la regla.*

9. Idem íd. para multiplicar y dividir los segmentos de ambas rectas por un número natural.

Consecuencia· *Supuestas trazadas dos paralelas en el plano y elegido en una cualquiera de ellas un segmento unidad* U *es posible construir* CON EL SIMPLE USO DE LA REGLA *cualquier otro segmento cuya medida con la unidad* U *sea un número racional dado.*

10. Lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos interceptados en un triángulo por un sistema de rectas paralelas. Caso en que lo sean a uno de los lados.

11. Idem íd. para un cuadrilátero. Caso en que sea paralelogramo. Caso en que las paralelas trazadas lo sean a una de las diagonales del cuadrilátero.

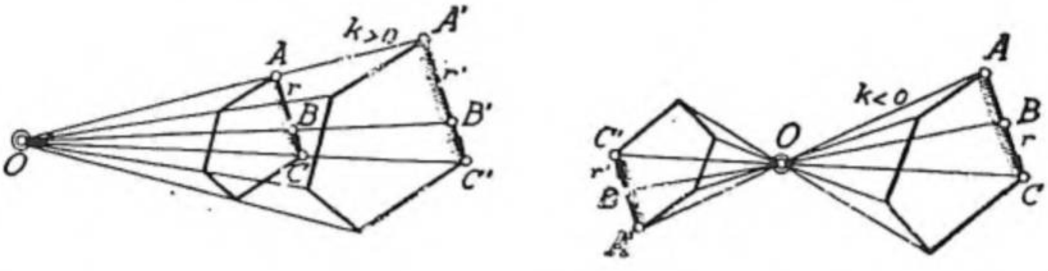
12. Idem íd. para un polígono.

13. Trazar por un punto una recta que concurra con otras dos cuyo punto de intersección sea inaccesible.

LECCIÓN 20.—HOMOTECIA Y SEMEJANZA

1. Definición y propiedades de la homotecia.—Dado un punto O y un número real $k \neq 0$, hagamos corresponder a todo punto A del plano, distinto de O, otro punto A' alineado con OA y tal que $OA':OA=k$. Según hemos visto en la lección anterior, este punto estará situado en la semirrecta OA si k es positivo y en la semirrecta opuesta si k es negativo.

La correspondencia así definida se llama *homotecia de centro* O *y razón* k.



Llamaremos *figuras homotéticas* aquellas cuyos puntos se corresponden en una homotecia.

De las propiedades demostradas en la lección anterior se desprende:

Los homólogos A', B', C', ... *de los puntos* A, B, C, ... *de una recta* r *que no pasa por* O *están en otra recta* r' *paralela a* r *y en el mismo orden.* En efecto, las proporciones

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}$$

prueban que $B'A'$ es paralela a BA y $B'C'$ paralela a BC, pero como por B' no pasa más que una paralela a AB, $A'B'C'$ están alineados.

Por otra parte, si B está entre A y C, la semirrecta OB está en el ángulo convexo AOC y la semirrecta OB', opuesta a OB, está en el ángulo convexo $A'OC'$, opuesto por el vértice al AOC. Tanto si $k>0$ como si $k<0$ B' está, pues, entre A' y C', es decir, se conserva el orden.

Por lo demostrado en la lección anterior se tendrá además

$$A'B':AB=OA':OA=k$$

(propiedad que subsiste aun cuando AB y $A'B'$ estén alineados con O, pues basta restar los antecedentes y consecuentes en $OA':OA=OB':OB$).

La razón entre dos segmentos homólogos cualesquiera es constante e igual a la razón k *de homotecia.*

Por tanto si $A'B'$ y $A'C'$ son homólogos de AB y AC se tendrá:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \quad \text{de donde} \quad \frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC}$$

En estas demostraciones no influye que k sea positiva o negativa. Si $k>0$, las semirrectas homólogas son del mismo sentido, y si $k<0$ de sentidos opuestos, pero en ambos casos el centro O está a un mismo lado de las semirrectas homólogas; por lo tanto *el sentido del plano se conserva.*

En resumen: *La homotecia conserva la alineación, el orden de los puntos homólogos y el sentido del plano. El centro es el único punto doble.*

Las rectas que pasan por el centro son las únicas rectas dobles (homólogas de sí mismas).

Las rectas homólogas que no pasan por el centro son paralelas.

Los segmentos homólogos son proporcionales.

La razón de distancias de un punto a otros dos de una figura es igual a la razón de distancias entre los puntos homólogos.

Finalmente: *Los ángulos homólogos son iguales.* Por ser sus lados paralelos y dirigidos en igual (u opuesto) sentido.

2. Grupo de las homotecias con el mismo centro.—Fácil es ver que la homotecia se convierte en identidad cuando $k=1$, y en la simetría central cuando $k=-1$. La identidad y la simetría central son, pues, casos particulares de la homotecia.

Transformando sucesivamente una figura mediante dos homotecias con el mismo centro O y cuyas razones sean k y k' se obtiene una homotecia de razón kk'. Pues si un punto cualquiera A se transforma sucesivamente en A' y A'' A'' está en la recta OA y se tendrá

$$\frac{OA'}{OA}=k, \qquad \frac{OA''}{OA'}=k', \qquad \text{de donde} \qquad \frac{OA''}{OA}=kk'$$

Por consiguiente: *Todas las homotecias con el mismo centro forman grupo al que pertenecen la identidad y la simetría central.*

En particular toda homotecia de razón negativa puede obtenerse como producto de la correspondiente positiva por la simetría respecto del centro.

3. Concepto y propiedades de la semejanza.—Efectuemos el producto de una homotecia por un movimiento; de otro modo, movamos una de dos figuras homotéticas. Como el movimiento conserva asimismo la alineación y el orden de los puntos y transforma segmentos y ángulos en otros iguales, en la transformación resultante se verificará:

1 *A puntos alineados corresponden puntos alineados en igual orden.*

2. *Los segmentos homólogos son proporcionales.*

3. *Los ángulos homólogos son iguales.*

Dos figuras entre cuyos puntos se pueda establecer una correspondencia biunívoca que cumpla estas condiciones se llaman *semejantes*, y la correspondencia entre una y otra recibe el nombre de *semejaza*. Se llama *directa* si conserva el sentido del plano, e *inversa* en caso contrario. La razón de proporcionalidad entre segmentos homólogos se llama *razón de semejanza*. La congruencia es, pues, un caso particular de la semejanza, de razón unidad.

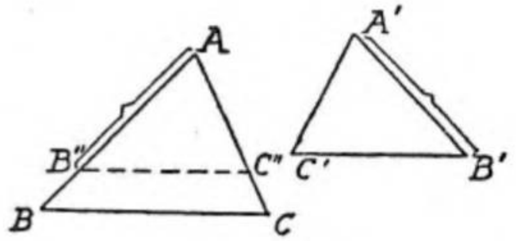
El producto de una homotecia por un movimiento directo (inverso) es, pues, una semejanza directa (inversa).

El producto de dos semejanzas es otra semejanza. Las semejanzas forman grupo. Las semejanzas directas forman un grupo parcial o *subgrupo*. Las inversas no forman subgrupo puesto que el producto de dos semejanzas inversas es una directa.

4. Triángulos semejantes.— Dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$ tienen, por lo dicho, los ángulos homólogos iguales

$$\left.\begin{array}{c} \sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C' \\ \text{y los lados homólogos proporcionales} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{array}\right\} \quad [1]$$

Recíprocamente: *Dados dos triángulos* ABC *y* A'B'C' *que cumplan las condiciones* [1], *uno de ellos puede obtenerse aplicando al otro una homotecia seguida de un movimiento,* y por tanto *son semejantes.*



Llevemos, por ejemplo, sobre la semirrecta AB el segmento $AB'' = A'B'$ y tracemos por B'' la paralela $B''C''$ al lado BC. El triángulo $AB''C''$ así obtenido es homotético del ABC. Pero, por ser sus ángulos iguales a los de éste son también iguales a los de $A'B'C'$, y como $AB'' = A'B'$ los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son congruentes, es decir, homólogos en un movimiento, lo que demuestra la proposición.

5. Criterios de semejanza de triángulos.—Dados dos triángulos cualesquiera ABC y $A'B'C'$, construyamos como en el párrafo anterior el triángulo $AB''C''$ obtenido llevando sobre AB el segmento $AB'' = A'B'$ y trazando por B'' la paralela $B''C''$ a BC.

Todo criterio que permita afirmar la igualdad entre los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ asegurará la semejanza entre ABC y $A'B'C'$. Para comprobar la semejanza entre dos triángulos no hace falta, pues, verificar *todas* las condiciones [1] de la definición sino sólo las suficientes para asegurar la igualdad entre los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$.

PRIMER CRITERIO.—*Si son iguales los ángulos* $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ *y proporcionales los lados que los forman* $AB:A'B' = AC:A'C'$, *los triángulos son semejantes.*

Pues los triángulos $AB''C''$ y $A'B'C'$ son iguales por tener iguales los ángulos $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ y los lados que los forman $AB'' = A'B'$ (por construcción) y $AC'' = A'C'$, por ser cuartos términos de dos proporciones cuyos tres primeros términos son iguales, a saber:

$AB : A'B' = AC : A'C'$ (por hipótesis) $\quad AB : AB'' = AC : AC''$ (por construcción)

COROLARIO.—*Dos triángulos rectángulos con catetos proporcionales son semejantes.*

SEGUNDO CRITERIO.—*Si son iguales los ángulos* $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ *y* $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ *los triángulos son semejantes.* Pues entonces los triángulos $A'B'C'$ y $AB''C''$ tienen $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B'' = \sphericalangle B'$ $(= B)$ y $AB'' = A'B'$ por construcción.

COROLARIOS.—*Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual son semejantes.*

Dos triángulos ABC, A'B'C' *de lados respectivamente paralelos son semejantes*

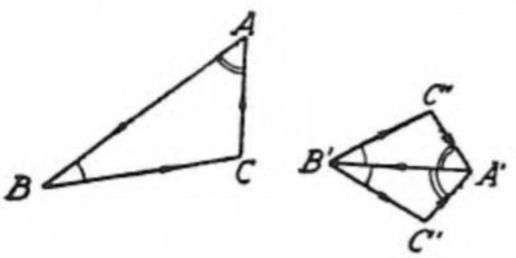
Aplicando al primero la traslación $\overrightarrow{AA'}$ se convierte en un homotético del segundo; luego, *la semejanza es directa*

TERCER CRITERIO.—*Si los tres lados* AB, AC, BC *de uno de los triángulos son proporcionales a los del otro* A'B', A'C', B'C', *los triángulos son semejantes.* En efecto, por hipótesis

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{y por construcción} \quad \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}$$

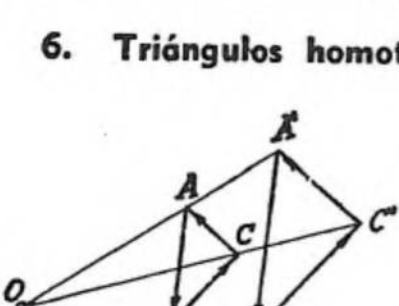
Los antecedentes de estas dos series de razones son respectivamente iguales, así como los primeros consecuentes (por contrucción) $A'B' = AB''$; por tanto también son iguales los demás consecuentes $A'C' = AC''$, $B'C' = B''C''$ y los triángulos $A'B'C'$ y $AB''C''$ serán congruentes por tener respectivamente iguales los tres lados.

Cualquiera de estos criterios permite construir sobre un segmento dado $A'B'$ un triángulo semejante a otro dado ABC, de modo que sean homólogos AB y $A'B'$ El segundo criterio es más sencillo, pues no exige más que el transporte de los ángulos $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle B$ sobre A' y B' Estos ángulos se llevarán a un semiplano o a otro según se desee conservar o no el sentido del plano, es decir, obtener una semejanza directa o una inversa.



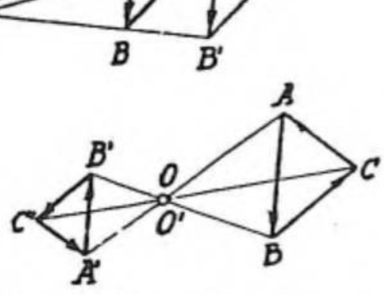
Fijada la clase de semejanza que se desea la solución es única.

6. Triángulos homotéticos.—*Dos triángulos no iguales, de lados respectivamente paralelos son homotéticos.*



Sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos, que serán semejantes (corolario anterior), con razón $k \neq 1$ Las rectas AA' y BB' se cortan (de lo contrario sería $AB = A'B'$, contra el supuesto) en un punto O que verifica

$$OA : OA' = AB : A'B' = k$$



Análogamente las rectas AA' y CC' se cortan en O' tal que

$$O'A : O'A' = AC : A'C' = k$$

Ahora bien, el carácter *directo* de la semejanza exige que si AB y $A'B'$

son de igual (opuesto) sentido también lo sean BC y $B'C'$, CA y $C'A'$; es decir, los puntos O y O' son ambos exteriores (interiores) a AA'. Y como no existe más que un punto interior (exterior) a AA' cuya razón de distancias a dichos puntos tenga un valor k, O y O' coinciden en un solo punto que es el centro de homotecia de los dos triángulos.

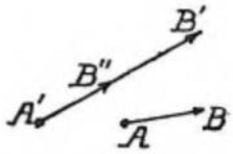
Si conviniéramos en considerar la traslación como un caso particular de la homotecia (centro infinitamente lejano) se podría omitir la restricción de ser desiguales los triángulos.

7. Determinación de la semejanza.—Los criterios de semejanza de triángulos nos permiten demostrar que las condiciones 2.ª y 3.ª que definen la semejanza de figuras en general (proporcionalidad de segmentos e igualdad de ángulos homólogos) son consecuencia una de otra, cuando se cumple la condición 1.ª (correspondencia en la alineación y orden). En efecto: *Si a los segmentos de una figura corresponden en la otra segmentos proporcionales, los ángulos homólogos son iguales,* puesto que los triángulos homólogos que sobre estos ángulos se pueden construir, tomando segmentos homólogos sobre sus lados, serán semejantes en virtud del tercer criterio.

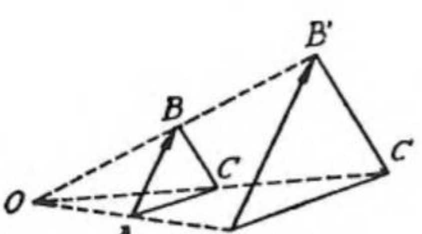
Análogamente, la igualdad de ángulos entraña la proporcionalidad de segmentos homólogos.

Toda semejanza queda determinada dando dos vectores homólogos $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *y la clase de semejanza directa o inversa.* Pues a todo punto C de la primera figura corresponderá otro punto C' en la segunda tal que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes directamente (o inversamente), lo que determina unívocamente C', según hemos dicho en el § 5. Si C estuviese en la recta AB su homólogo C' quedaría asimismo determinado unívocamente por la proporción $AB:AC = A'B':A'C'$.

8. Determinación de una semejanza en producto de una homotecia por un movimiento. Centro de semejanza directa.—La semejanza definida por dos vectores homólogos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ puede obtenerse mediante el movimiento que lleva AB sobre $A'B''$ en la semirrecta $A'B'$, seguido de la homotecia de centro A' que transforma B'' en B'. Como esto puede repetirse para cada par de vectores homólogos, toda semejanza puede obtenerse de infinitos modos como producto de un movimiento por una homotecia.

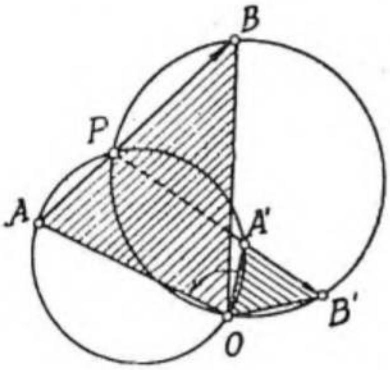


Supongamos ahora que la semejanza es *directa*. Si los vectores homólogos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ que la definen son paralelos, las figuras son homotéticas con centro de homotecia en el punto O de intersección de AA' y BB' (supuesto $k \neq 1$); pues todo otro par de puntos homólogos C, C' no alineados con los anteriores formará con ellos dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$ de lados paralelos (por la igualdad de ángulos homólogos) y, por tanto, homotéticos respecto del referido centro (§ 6). En cuanto a los



puntos homólogos de las rectas AB y $A'B'$ formarán a su vez triángulos homotéticos con BC y $B'C'$ y, por tanto, con el mismo centro O

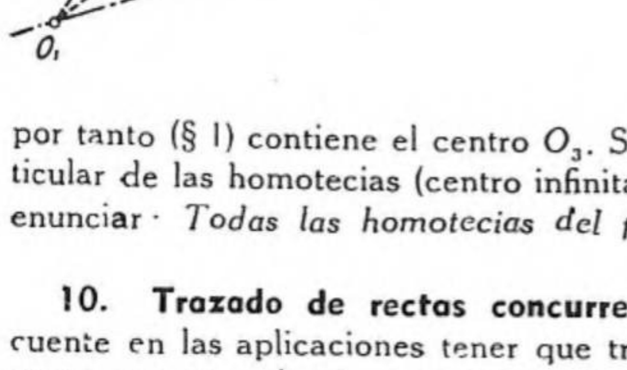
Si AB y $A'B'$ no son paralelos, puede hallarse un giro y una homotecia *con el mismo centro* O, cuyo producto sea la semejanza definida por este par de vectores homólogos; es decir, *existe un punto doble* O en la transformación, que llamaremos *centro de semejanza.*



Veamos, en efecto, qué condiciones determinantes ha de cumplir O, supuesto existente. Por tratarse de una semejanza directa se tendrá, en valor absoluto y sentido, $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OB'A'$; por tanto, si P es la intersección de BA y $B'A'$ los puntos $PBB'O$ están en la circunferencia. Análogamente de la igualdad $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA'B'$ se desprende que P, A, O, A' están en una circunferencia. El centro O se obtiene, pues, por intersección de las circunferencias PAA' y PBB'

Recíprocamente, construído en esta forma el punto O, resulta la igualdad de los ángulos $\sphericalangle OBA = \sphericalangle OB'A'$, $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA'B'$, y por consiguiente la semejanza de los triángulos OAB y $OA'B'$, lo que prueba que el punto O es doble

9. Grupo de las homotecias.— *El producto de dos homotecias de centros distintos,* O_1, O_2, es una semejanza directa en la que dos vectores homólogos son paralelos, por serlo en cada homotecia; en virtud de lo dicho en el párrafo anterior, si $k_1 k_2 \neq 1$, el producto *es una homotecia. Su razón es el producto de las razones de las homotecias componentes, y su centro* O_3 *está en línea recta con los centros anteriores.*



En efecto, si $A'B'$ es homólogo de AB en la primera homotecia, y $A''B''$ es homólogo de $A'B'$ en la segunda, se tendrá

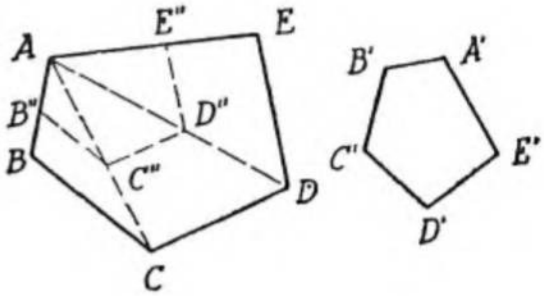
$$k_3 = \frac{A''B''}{AB} = \frac{A''B''}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{AB} = k_2 \cdot k_1 \neq 1$$

Por otra parte, la recta O_1O_2 es doble en las dos homotecias componentes, luego lo es en su producto, y por tanto (§ 1) contiene el centro O_3. Si incluímos la traslación como caso particular de las homotecias (centro infinitamente lejano y razón unidad) podemos enunciar: *Todas las homotecias del plano forman grupo*

10. Trazado de rectas concurrentes de vértice inaccesible.— Es frecuente en las aplicaciones tener que trazar por un punto A una recta concurrente con otras dos r s cuyo punto de intersección es inaccesible. Basta trazar un triángulo ABC con B sobre r y C sobre s, y luego, trazando paralelas, uno homotético cualquiera $A'B'C'$, con B' sobre r y C' sobre s; la recta AA' es la pedida.

LECCIÓN 21.—HOMOTECIA Y SEMEJANZA DE POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS

1. Semejanza de polígonos.—Para estudiar la semejanza de polígonos podemos repetir el mismo método empleado para los triángulos. Dados dos polígonos de igual número de lados $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ llevemos el lado $A'B'$ sobre AB'' en la semirrecta AB, y construyamos el polígono $AB''C''D''E''$ homotético de $ABCDE$ con centro A y razón $AB:AB''$.



A todo criterio de igualdad entre $AB''C''D''E''$ y $A'B'C'D'E'$ corresponde un criterio de semejanza entre los polígonos dados y recíprocamente. Por ejemplo:

Para asegurar la semejanza de dos polígonos, basta comprobar la proporcionalidad de los lados homólogos, menos un par,

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' \qquad [1]$$

y la igualdad de los ángulos homólogos que forman dichos lados,

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B' \qquad \sphericalangle C = \sphericalangle C' \qquad \sphericalangle D = \sphericalangle D' \qquad [2]$$

En efecto, construído como se ha dicho $AB''C''D''E''$, se tendrá

$$AB : AB'' = BC : B''C'' = CD : C''D'' = DE : D''E'' \qquad [1']$$
$$\sphericalangle B = \sphericalangle B'' \qquad \sphericalangle C = \sphericalangle C'' \qquad \sphericalangle D = \sphericalangle D'' \qquad [2']$$

que comparadas con [1] y [2] por ser $AB'' = A'B'$, dan

$$B'C' = B''C'', \qquad C'D' = C''D'', \qquad D'E' = D''E''$$
$$\sphericalangle B' = \sphericalangle B'' \qquad \sphericalangle C' = \sphericalangle C'' \qquad \sphericalangle D' = \sphericalangle D''$$

lo que demuestra (lección 4.ª, § 9) la igualdad de $A'B'C'D'$ y $AB''C''D''E''$.

Aplicando a la serie de razones iguales [1] la propiedad que permite igualar su valor a la razón cuyos términos son las sumas de antecedentes y consecuentes resulta:

La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

2. Semejanza de polígonos regulares.—Dos polígonos regulares de igual número de lados cumplen evidentemente las relaciones [1] y [2] del párrafo anterior por ser iguales entre sí todos los antecedentes de [1], así como los consecuentes, y por ser iguales todos los ángulos de [2]. Por tanto:

Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.

Como la semejanza conserva la igualdad de segmentos y la perpendicularidad de rectas, podemos añadir·

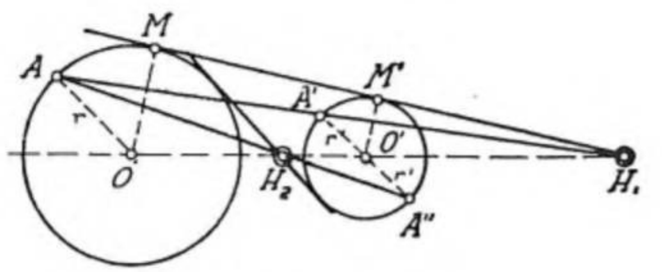
Los centros, los radios y las apotemas, son homólogos en la semejanza, y por consiguiente la razón de semejanza es igual a la razón entre los radios, entre las apotemas y entre los perímetros.

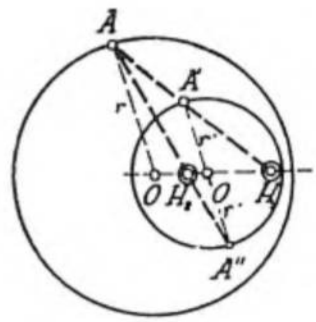
3. Homotecias entre dos circunferencias.— La figura homotética de una circunferencia es otra, puesto que a distancias iguales de una figura corresponden distancias iguales en su homotética. Recíprocamente:

Dos circunferencias concéntricas son homotéticas en una homotecia cuyo centro es el centro común y cuya razón es la que existe entre los radios.

Si las dos circunferencias no son concéntricas son homotéticas respecto de dos centros de homotecia armónicamente separados por los centros de las circunferencias.

Si trazamos, en efecto, un radio cualquiera OA en una de ellas, los radios





paralelos $O'A'$ y $O'A''$ de igual y de opuesto sentido en la otra, y se hallan las intersecciones H_1 y H_2 de AA' y AA'' con OO' se tiene

$$\frac{H_1 O}{H_1 O'} = \frac{r}{r'} = -\frac{H_2 O}{H_2 O'}$$

lo que prueba no sólo que la cuaterna $OO'H_1H_2$ es armónica, sino tambien que la posición de H_1 y H_2 sólo depende de la posición de O y O' y de la magnitud de los radios r y r', pero no del punto A elegido. Haciendo, pues, corresponder los puntos de ambas circunferencias obtenemos las dos homotecias del enunciado. La de centro H_1 es de *razón positiva* y la de centro H_2 es de *razón negativa*.

En particular son puntos homólogos en la homotecia de centro H_1 los de contacto de las tangentes exteriores, cuando existen, puesto que son extremos de radios paralelos entre sí y situados en un mismo semiplano respecto de OO'. Análogamente son homotéticos respecto de H_2 los puntos de contacto de las tangentes interiores. De aquí:

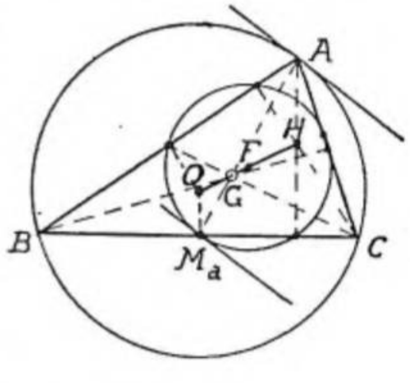
El centro de homotecia de razón positiva H_1 *(negativa* H_2*) es el punto de concurso de las tangentes exteriores (interiores) cuando existen.*

Cuando las circunferencias son tangentes, el punto de contacto es uno de los centros de homotecia.

4. Una propiedad de la circunferencia de Feuerbach.—Como aplicación de la homotecia entre dos circunferencias podemos demostrar sencillamente la siguiente propiedad de la circunferencia de los nueve puntos:

La circunferencia de Feuerbach relativa a un triángulo tiene radio mitad que la circunferencia circunscrita, y su centro F *biseca el segmento* OH *limitado por el circuncentro* O *y el ortocentro* H.

Recordando que el punto de intersección G de las medianas (baricentro) divide a éstas en dos segmentos cuya razón es $-\frac{1}{2}$, si aplicamos a la circunferencia circunscrita la homotecia de centro G y razón $-\frac{1}{2}$ se obtendrá la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados, es decir, la circunferencia de Feuerbach. Su radio vale, pues, la mitad del radio de la circunferencia circunscrita y su centro F estará alineado con el ortocentro O y con el baricentro G, distando de éste la mitad de aquél. Dicho centro F está, pues, situado en la recta Euler entre G y H y a una distancia de O y de H igual a $^3/_2$ de OG. (Recuérdese el teorema de Euler. Lección 16.)



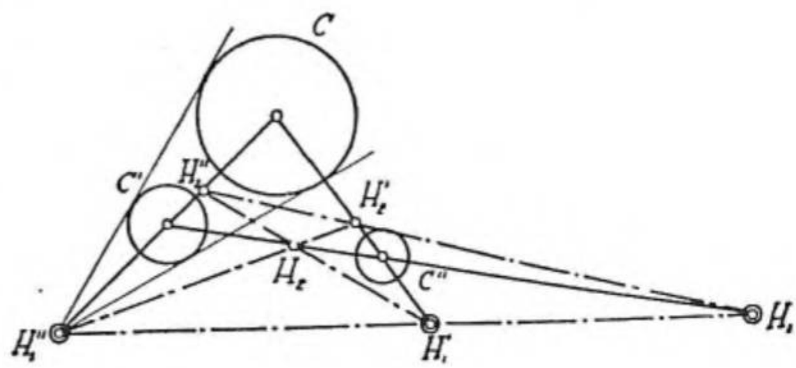
De esta homotecia se desprende además:

La tangente a la circunferencia de Feuerbach en el punto medio de un lado es paralela a la tangente a la circunferencia circunscrita en el vértice opuesto.

5. Centros de homotecia de tres circunferencias.—Dadas tres circunferencias C, C', C'', el producto de dos homotecias que transforman sucesivamente C en C' y C' en C'' será una homotecia que transforma C en C'' y tendrá su centro alineado con los de aquéllas (§ 2, lec. anterior). En consecuencia:

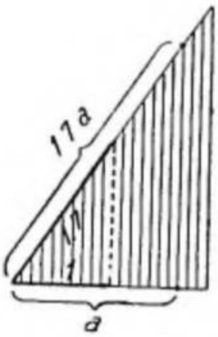
Los seis centros de homotecia de tres circunferencias están alienados tres a tres. Como el producto de dos homotecias de razón positiva (negativa) es otra homotecia de razón positiva, resulta:

Los tres centros de homotecia de razón positiva están alineados y cada uno de ellos alineado además con dos centros de homotecia de razón negativa.



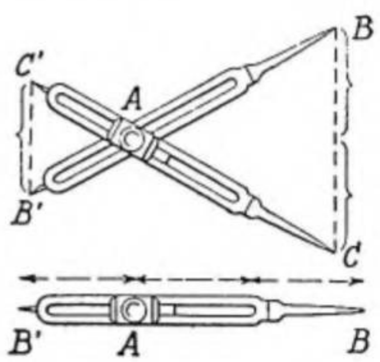
Las cuatro rectas cada una de las cuales contiene tres centros de homotecia se llaman *ejes de homotecia* de las tres circunferencias.

6. Aplicaciones de la semejanza al dibujo.—En el § 10 de la lección anterior ya hemos visto una aplicación. Veamos otras.



El compás de reducción.—Cuando hay que reducir o ampliar varios segmentos en una misma razón dada, basta construir sobre los lados de un ángulo dos segmentos a partir del vértice, que estén en esta razón, y todas las paralelas a la recta que une los extremos, determinan, en uno y otro lado, pares de segmentos en la misma razón.

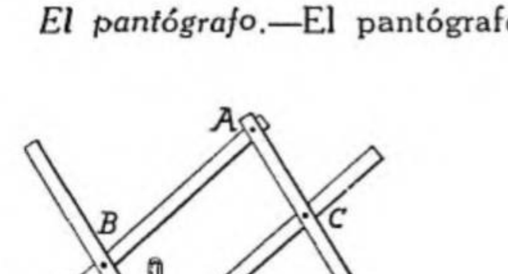
Para razones sencillas, puede utilizarse también el llamado *compás de reducción*, que constituye una interesante aplicación de la semejanza de triángulos. Es un compás cuyos brazos tienen unas ranuras a lo largo de las cuales se fija la articulación A. Si, cerrado el compás, se coloca A en posición tal que los brazos queden divididos en una cierta razón, por ejemplo $AB=2AB'$ al abrir el compás, los segmentos determinados por dos puntas y sus opuestas estarán en la misma razón; así BC será también el doble de $B'C'$ y éste mitad de aquél.



Variando la abertura del compás podremos, pues, reducir o ampliar en la misma razón varios segmentos.

Las ranuras llevan unas divisiones con números marcados 2, 3, 4, 5, ... que indican la colocación de la articulación para obtener la reducción o ampliación correspondientes.

El pantógrafo.—El pantógrafo es en esencia un paralelogramo articulado $ABLC$ con dos lados AB y AC prolongados, en los que se ha tomado $BP=BL$ y $CE=CL$, de donde $AP=AE$. La igualdad de los ángulos PBL y PAE y la proporcionalidad evidente $BP{:}BL=AP{:}AE=1$ prueban la semejanza de los triángulos BPL y APE, de donde $\sphericalangle BPL=\sphericalangle APE$, lo que demuestra que los puntos P, L, E están alineados y además que



$$PL{:}PE=PB{:}PA=\text{constante}.$$

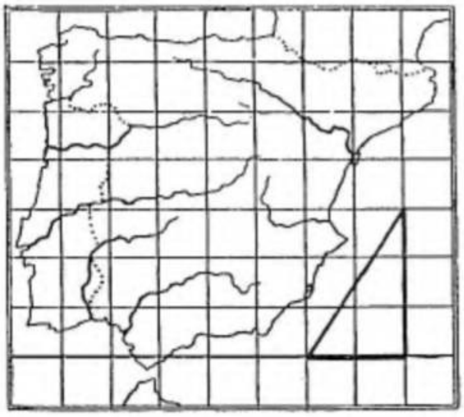
Si se fija, pues, el punto P en el plano y se recorre con un estilete colocado en E una figura S, un lápiz colocado en L describirá la figura S' homotética de S, con el centro P y la razón de homotecia $k=PB{:}PA$.

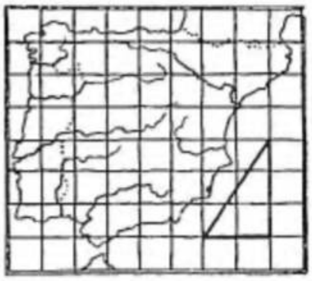
Análogamente si se fija L, las figuras descritas por E y P son homotéticas con centro en L y razón $LP{:}LE=BP{:}BA$.

En esto consiste la teoría geométrica del pantógrafo, aparato que permite el dibujo directo de figuras homotéticas y por tanto semejantes, con una razón fácilmente graduable, variando a voluntad la relación entre las longitudes de los lados del paralelogramo.

Trazado de figuras semejantes.—Para la construcción de polígonos semejantes puede utilizarse la homotecia, o el transporte de los ángulos y de los lados reducidos o ampliados, en número suficiente para su determinación (§ 1).

Para figuras más complicadas (mapas, por ejemplo) se puede utilizar, en defecto del pantógrafo, cuadrículas cuyos lados estén en la razón apetecida. Por ejemplo, para reproducir un mapa reducido a los $^2/_3$ se colocará encima del original una cuadrícula transparente, copiando sobre otra reducida el perfil





de las costas, ríos, etc., contando los cuadros y procurando conservar la proporcionalidad de las distancias intermedias.

Esta construcción asegura la proporcionalidad de los segmentos situados en dos direcciones perpendiculares y, por tanto, también la de los segmentos oblicuos considerados como hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos proporcionales, es decir, semejantes en idéntica razón.

Planos. Escalas—La construcción de figuras semejantes es problema de aplicación constante en la representación de terrenos, edificios y de objetos en general, que no sea posible reproducir a su tamaño en el papel.

Un *plano* no es más que una *figura semejante* a la proyección del terreno o edificio sobre un plano horizontal (*) y *levantar el plano* es construir dicha figura semejante con una cierta razón de semejanza que se llama *escala*.

Así, si la *escala* de un plano es 1 : 10.000 significa que cada distancia del plano corresponde a una distancia 10.000 veces mayor en el terreno. Un metro en el plano representa, pues, 10 kms., y si dos lugares distan en el plano 23 cm., distarán en realidad 2,3 kms., etc. Los mapas y planos suelen llevar un segmento graduado en m., km., ..., de terreno, que al mismo tiempo que indica la razón de semejanza facilita las lecturas y mediciones. Este segmento graduado se suele llamar también *escala gráfica*.

(*) El concepto de proyección sobre un plano se define en Geometría del espacio, pero por ser de cultura general, no vemos inconveniente en utilizarlo de pasada para dar con precisión el concepto de *plano*.

EJERCICIOS
(Sobre todo este capítulo)

1 Conocidos los cuatro lados de un trapecio, calcular los de los triángulos que limitan los lados prolongados con las bases

2. Se divide un lado de un triángulo equilátero en tres segmentos iguales, y, desde el vértice opuesto, se proyectan los puntos de división sobre la semicircunferencia construída exteriormente sobre dicho lado como diámetro Probar que esta semicircunferencia queda también dividida en tres partes iguales

3 Es preciso empalmar dos tubos de ejes paralelos, distantes entre sí 3 m., y cuyas bocas distan entre sí 5 m., mediante dos tubos iguales, en codo circular, tangentes, respectivamente, a aquéllos y entre sí (es decir formando *S*) Calcular el radio de estos arcos (en su línea de centros)

4 Determinar gráficamente los lados de un triángulo de perímetro dado, semejante a un triángulo dado *ABC*

5 Hallar la relación que existe entre la potencia y la resistencia en un plano inclinado de pendiente dada, supuesta la potencia 1.º, en dirección de la máxima pendiente del plano; 2.º, en dirección horizontal

6. Demostrar que la relación entre a potencia y la resistencia en una polea móvil es igual a la que existe entre el radio y la *cuerda* (geométrica) del arco abrazado por a cuerda (física).

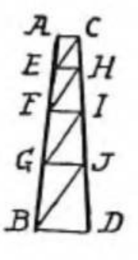
7. Enunciar criterios suficientes de semejanza de paralelogramos; de rombos, de trapecios.

8. Demostrar que e paralelogramo obtenido uniendo los puntos medios consecutivos de los lados de un cuadrilátero cualquiera, y el que resulta de trazar por los extremos de cada diagonal paralelas a la otra, son homotéticos, y averiguar cuál es el centro de homotecia.

9. Si dos circunferencias son tangentes entre sí exteriormente el segmento de tangente exterior a ambas, comprendido entre los puntos de contacto, es medio proporcional entre los dos diámetros.

10. Hallar el lugar geométrico del baricentro de un triángulo que tiene dos vértices fijos *A* y *B* y cuyo tercer vértice *C* describe una circunferencia dada.

11 Calcular, en función de los radios de dos circunferencias y de la distancia entre los centros, la que existe entre éstos y los centros de homotecia de ambas circunferencias Distancia que separa dichos centros de homotecia.



12. Triangular un trapecio *ABCD* (cara de un poste) en la forma que indica la figura; es decir, *EH*, *FI*, *GJ* paralelas a las bases (*AC*, *BD*); *CE*, *HF*, *IG*, *JB* paralelos entre sí. Calcular las longitudes de todas estas barras sabiendo que $AB=CD=10$ m., $AC=40$ cm., $BD=80$ cm. (*).

13 Sea *MNP* un triángulo inscrito en otro *ABC*, inscribir en *MNP* otro triángulo semejante al *ABC*.

14 Demostrar que si una circunferencia es tangente a un arco *BAC* y a su cuerda *BC*, respectivamente en los puntos *A* y *D*, la recta *AD* es bisectriz del ángulo *BAC*.

15. Construir un triángulo conocidos un ángulo, la mediana que parte de su vértice y la razón entre los lados que forman dicho ángulo.

16. Idem íd. conocidos un ángulo, la razón entre los lados que lo forman y el radio de la circunferencia circunscrita

17. Idem íd. conocidos dos ángulos y una bisectriz.

18. Idem íd conocidos un ángulo, la razón entre las alturas sobre los lados que lo forman y el radio de la circunferencia inscrita

19 Construir un cuadrilátero que sea inscriptible y circunscriptible, dados: un ángulo, la razón entre los lados que lo forman y la diagonal que une sus extremos.

20. Construir un cuadrilátero conociendo un ángulo, la diagonal que parte de su vértice y las razones entre los cuatro lados

(*) Para el cálculo de las oblicuas hace falta aplicar el teorema de Pitágoras.

Capítulo VII.—RELACIONES METRICAS DERIVADAS DE LA SEMEJANZA

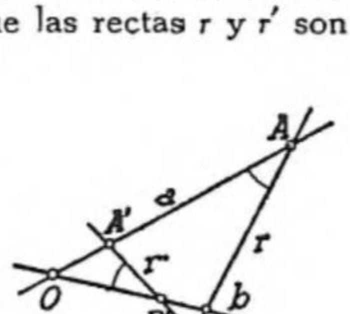
LECCIÓN 22.—EL TEOREMA DE PITÁGORAS

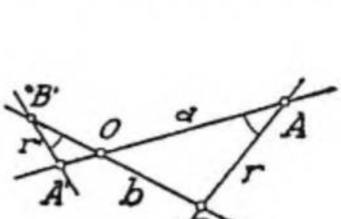
1. Advertencia preliminar sobre el producto de segmentos.—Hemos dicho en la lección 18 que la razón de dos segmentos es igual a la de sus medidas tomadas con la misma unidad. Por consiguiente toda proporción entre segmentos puede interpretarse como proporción entre sus medidas. En esta forma interpretaremos las proporciones segmentarias en esta lección y en las sucesivas, en cuanto igualemos en ellas los productos de medios y extremos.

Así, pues, de aquí en adelante donde vea el lector escrito o enunciado un producto de segmentos $\overline{AB}\,.\,\overline{AC}$ deberá entender como tal el número producto de las medidas de AB y AC con una misma unidad.

Hacemos esta advertencia preliminar para dar sentido matemático preciso a tales relaciones y enunciados, evitándonos la tarea de dar una definición geométrica pura de tales productos y cuadrados o de repetir constantemente en los enunciados el concepto preciso «medida de», que se dará por sobreentendido.

2. Rectas antiparalelas.—Si dos rectas a, b secantes en O se cortan por otras dos r, r' respectivamente en A, B y A', B', de modo que los *dos pares* AA' y BB' estén a un mismo lado o a distinto lado de O, y que el ángulo OAB sea igual al $OB'A'$, diremos que las rectas r y r' son *antiparalelas* respecto de las a y b. También son iguales entonces los ángulos OBA y $OA'B'$ como suplementarios de las sumas de los anteriores con AOB.





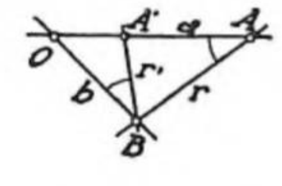
La recta r forma, pues, con cada una de las rectas dadas a, b, ángulos iguales a los que su antiparalela r' forma con la otra. De aquí resulta que el antiparalelismo es una relación recíproca, es decir: *Las rectas* a *y* b *son también antiparalelas respecto de* r *y* r'.

Los triángulos AOB y $B'OA'$ son semejantes por tener respectivamente iguales los ángulos homólogos en este orden, de donde

$$OA : OB = OB' : OA' \quad [1] \qquad \text{o bien} \qquad \overline{OA}\ \ \overline{OA'} = \overline{OB}\ \ \overline{OB'} \quad [2]$$

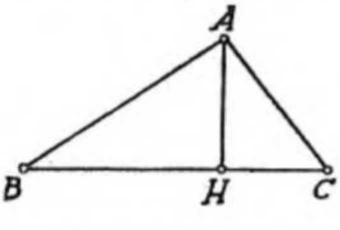
Dos rectas concurrentes en O son cortadas por dos antiparalelas respecto de ellas en puntos cuyo producto de distancias a O es el mismo en ambas rectas.

Recíprocamente: *Si se verifica* [2] se verifica asimismo [1], los triángulos AOB y $B'OA'$ son semejantes (criterio 1.°) *y las rectas* AB *y* A'B' *son antiparalelas respecto de* OA *y* OB. *También son antiparalelas las rectas* AB' *y* BA' (no trazadas en la figura) por la semejanza de los triángulos OAB' y OBA', como resulta de [1] permutando los medios.



Si B coincide con B' se tendrá $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB}^2$; es decir, el segmento OB *es medio proporcional* entre OA y OA'.

3. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo.— En el triángulo ABC rectángulo en A, la altura AH sobre la hipotenusa BC y un cateto AC, son antiparalelas respecto de los lados del ángulo formado por dicha hipotenusa y el otro cateto, por ser



$\sphericalangle AHB = \sphericalangle CAB =$ recto. Por lo tanto:

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC} : \overline{BH} \qquad \text{Análogamente} \qquad \overline{CA}^2 = \overline{CB} : \overline{CH} \quad [3]$$

TEOREMA DEL CATETO.—*Cada cateto de un triángulo rectángulo es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.*

De la semejanza de los triángulos rectángulos ABH y CAH (que tienen $\sphericalangle ABH = \sphericalangle CAH$) se desprende

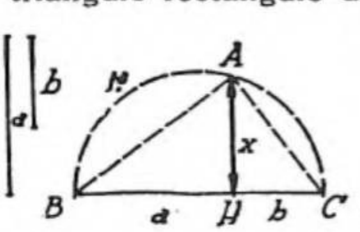
$$HB : HA = HA : HC \quad \text{de donde} \quad \overline{HA}^2 = \overline{HB} : \overline{HC} \qquad [4]$$

TEOREMA DE LA ALTURA.—*La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta*

Recíprocamente: *Si se verifica* [4] *el triángulo* ABC *es rectángulo.* Pues ello prueba la semejanza de los triángulos rectángulos BAH y ACH y por tanto que $\sphericalangle BAH = \sphericalangle ACH = 90° - \sphericalangle CAH$; es decir, $\sphericalangle BAC = 90°$.

4. Construcción de medias proporcionales.— Los teoremas anteriores proporcionan el medio de construir un segmento x medio proporcional entre dos segmentos dados a y b, pues bastará construir un triángulo rectángulo ABC cuya hipotenusa sea $BH + HC = a + b$ y cuyo vértice opuesto A se proyecte en H; es decir, A tiene que estar situado en la semicircunferencia de diámetro AC (lec. 9.ª, §6) y en la perpendicular a AC por H (v. construcción 1.ª). El segmento AH es el segmento medio proporcional en virtud del teorema de **la altura.**

También podemos apoyarnos en el teorema del cateto construyendo un triángulo rectángulo de hipotenusa $BC = a$ y uno de cuyos catetos se proyecte según $BH = b$ El vértice del ángulo recto A tiene que estar situado en la semicircunferencia de diámetro BC y en la perpendicular a BC por H (véase construcción 2.ª). El cateto $AB = x$ es el medio proporcional pedido.



De estas construcciones se desprende:

Toda semicuerda de una circunferencia es media proporcional entre los segmentos en que divide el diámetro perpendicular.

Toda cuerda de una circunferencia es media proporcional entre el diámetro por uno de sus extremos y su proyección sobre él.

5. Teorema de Pitágoras.— Sumando las dos relaciones [3] se obtiene:

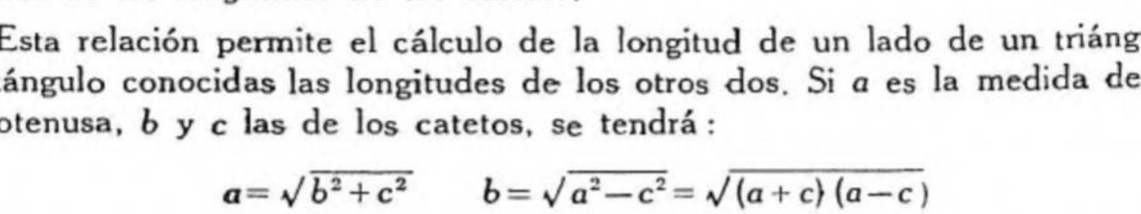
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{HC}) = \overline{BC}^2$$

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Esta relación permite el cálculo de la longitud de un lado de un triángulo rectángulo conocidas las longitudes de los otros dos. Si a es la medida de la hipotenusa, b y c las de los catetos, se tendrá:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a+c)(a-c)}$$

6. Generalización del teorema de Pitágoras.— Llamemos ahora a a la medida del lado BC, opuesto a un ángulo agudo en un triángulo oblicuán-



gulo ABC (figs. I y II) o el opuesto al ángulo obtuso en un triángulo obtusángulo (fig. III). Tracemos por un extremo B la altura correspondiente h_b y llamemos m y n a las medidas de los segmentos absolutos CH y AH que determina sobre el lado opuesto. Sean análogamente b y c las medidas CA y AB.

En fig. I y II se tiene: $a^2 = m^2 + h_b{}^2 = (b-n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 - 2bn.$

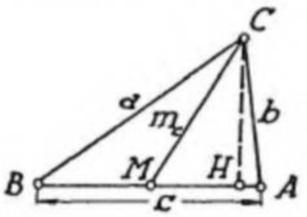
En fig. III » » $a^2 = m^2 + h_b{}^2 = (b+n)^2 + c^2 - n^2 = b^2 + c^2 + 2bn.$

En resumen: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 \mp 2bn}$ $\left\{\begin{array}{ll} - & \text{si } A < 90^\circ \\ + & \text{si } A > 90^\circ \\ n=0 & \text{si } A = 90^\circ \end{array}\right.$

El cuadrado de un lado opuesto a un ángulo $\left\{\begin{array}{l}\textit{agudo}\\ \textit{obtuso}\end{array}\right\}$ *de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos* $\left\{\begin{array}{l}\textit{menos}\\ \textit{más}\end{array}\right\}$ *el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Según este teorema, dadas las medidas de los tres lados de un triángulo se puede reconocer si es acutángulo, rectángulo u oblicuángulo sin construirle, comprobando si el cuadrado del lado mayor es <, = ó > que la suma de los cuadrados de los otros dos.

7. Suma y diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo.— Apliquemos el teorema anterior para expresar los cuadrados de dos lados a y b ($a>b$) de un triángulo ABC en función de la mitad del tercer lado c y de la mediana correspondiente $m_c = CM$



En BMC se tiene $$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 + 2\frac{c}{2}\overline{MH}$$

Análogamente, en MCA $$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2 - 2\frac{c}{2}\overline{MH}$$

Sumando, resulta $$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2m_c^2 \qquad (1)$$

y restando $$a^2 - b^2 = 2c \cdot \overline{MH} \qquad (2)$$

La suma de los cuadrados de dos lados es igual al doble de la suma de los cuadrados de la mitad del tercer lado y de la mediana correspondiente

La diferencia de cuadrados de dos lados es igual al doble del producto del tercer lado por la distancia de su punto medio al pie de la altura correspondiente.

8. Lugares geométricos de puntos cuyo suma o cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del plano es constante.— I. Supongamos fijos los puntos A y B de la figura anterior, y el punto C variable con la condición de ser constante a^2+b^2; la constancia del segundo miembro de [1] exige que m_c sea constante (puesto que c ya lo es); y recíprocamente, si m_c es constante, lo es a^2+b^2:

El lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del mismo A, B *es constante, es una circunferencia de centro en el punto medio de* AB. Para que dada la constante $k = a^2 + b^3$ y los puntos A y B, exista el lugar es preciso y basta que sea $a^2+b^2 > 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$ es decir, $k > \frac{\overline{AB}^2}{2}$.

II Si queremos ahora que sea constante la diferencia a^2-b^2, el segundo miembro de [2] deberá serlo también, y por tanto, deberá ser constante el segmento MH, y recíprocamente. Serán puntos del lugar todos los que se proyecten ortogonalmente sobre AB en un mismo punto H

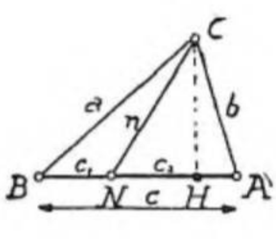
El lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos del mismo A, B *es una cantidad constante, es una recta perpendicular a* AB.

9. Teorema de Stewart.

Se obtiene una fácil generalización de la fórmula [1] del párrafo anterior aplicando cálculo análogo a una oblicua cualquiera al lado c, $CN=n$ interior al triángulo y distinta de la mediana. Llamando $c_1=\overline{BN}$ y $c_2=\overline{NA}$ se tendrá:

$$a^2=c_1^2+n^2+2c_1\,.\,\overline{NH}$$

$$b^2=c_2^2+n^2-2c_2\,.\,\overline{NH}$$



La eliminación de $\overline{NH}$ no puede efectuarse ahora por simple suma como antes. Es preciso igualar los coeficientes multiplicando previamente la ecuación primera por c_2 y la segunda por c_1. Resulta así

$$a^2c_2+b^2c_1=c_1^2c_2+c_2^2c_1+n^2c_2+n^2c_1=c_1c_2c+n^2c$$

Si atribuímos signos a los segmentos sobre la recta AB, y designamos por $\overline{AB}$ la medida de AB con su signo, esta igualdad puede escribirse (transponiendo y alterando el orden)

$$\overline{CA}^2\ BN+\overline{CB}^2\cdot\overline{NA}+\overline{CN}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BN}\cdot\overline{NA}\cdot\overline{AB}=0$$

fórmula que constituye el llamado *teorema de Stewart.*

10. Cálculo geométrico con segmentos.

Dados varios segmentos a, b, c, ... l, los teoremas y construcciones demostradas en esta lección y en las anteriores, permiten construir con la regla y el compás otros segmentos que vengan expresados en función de aquéllos, mediante expresiones de la siguiente forma:

I. *Cuartas y terceras proporcionales* $x=\dfrac{ab}{c}$, $x=\dfrac{a^2}{c}$ y por combinación de ellas, *expresiones racionales de numerador y denominador homogéneos cuyo numerador sea de un grado superior en una unidad al del denominador.*

Así, por ejemplo, para construir $x=\dfrac{abcd}{efg}$ se construirán sucesivamente $x_1=\dfrac{ab}{e}$, $x_2=\dfrac{x_1\,c}{f}$, $x=\dfrac{x_2\,d}{g}$.

Para construir $x=\dfrac{(ab+cd)\,e}{(m-n)\,p}$, hallaremos $x_1=\dfrac{cd}{a}$, con lo que $ab+cd=a(b+x_1)$ y construiremos luego $x_2=b+x_1$, $x_3=m-n$ y finalmente $x=\dfrac{ax_2\,e}{x_3\,p}$ de acuerdo con lo anterior.

II. *Medias geométricas* $x=\sqrt{ab}$; y por combinación de ellas, *radicales de índice* 2^n *de expresiones monomias o polinomias de grado* 2^n.

Así, por ejemplo, para construir $x=\sqrt[8]{a^4\,b^3\,c}$ podemos construir sucesivamente $x_1=\sqrt{bc}$, con lo que $x=\sqrt[8]{a^4\,b^2\,x_1^2}=\sqrt[4]{a^2\,bx_1}$; $x_2=\sqrt{bx_1}$, con lo que $x=\sqrt[4]{a^2\,x_2^2}=\sqrt{ax_2}$.

Para construir $x=\sqrt[8]{\dfrac{a^4\,b^3\,c^6}{m^3\,np}}$ hallaremos $\gamma=\dfrac{c^6}{m^3\,np}$ como en I y luego $x=\sqrt[8]{a^4\,b^3\,\gamma}$, como acabamos de indicar.

Para construir $x=\sqrt[8]{a^4b^3c-l^5m^2n+p^6q^2}$ pondremos $l^5m^2n=a^4b^3x_1$, $p^6q^2=a^4b^3x_2$, calculando x_1 y x_2 como se indica en I y resultará $x=\sqrt[8]{a^4b^3(c-x_1+x_2)}=\sqrt[8]{a^4b^3x_3}$, que se calcula como antes.

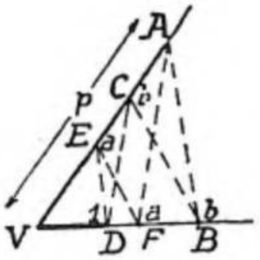
Si se trata de una *suma pitagórica*, es decir, de la raíz cuadrada de una suma algebraica de cuadrados, la aplicación directa del *teorema* de Pitágoras simplifica la construcción. Así, por ejemplo, $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}$ se construirá haciendo sucesivamente $x_1=\sqrt{a^2+b^2}$, $x_2=\sqrt{x_1^2-c^2}$, $x=\sqrt{x_2^2-d^2}$ mediante tres triángulos rectángulos.

Combinando estas construcciones resulta en definitiva la conclusión:

Es posible la construcción con regla y compás de expresiones segmentarias algebraicas homogéneas de primer grado racionales o irracionales con radicales cuyo índice sea una potencia de 2.

NOTA I. *Construcción de expresiones no homogéneas.*—Se pueden asimismo construir expresiones algebraicas, racionales o irracionales con radicales de índice 2^n, *no homogéneas ni de primer grado*, homogeneizándolas previamente o reduciendo su grado al primero mediante factores o divisores iguales al segmento unidad. Ocurre entonces que *el segmento resultado dependerá del segmento unidad elegido*, mientras que en los casos antes expuestos este resultado depende exclusivamente de los datos.

NOTA II. *Sobre el producto geométrico de segmentos. Teorema de Pascal.*—En particular el producto p de dos segmentos a, b puede construirse eligiendo un segmento unidad 1 y construyendo p como cuarto proporcional entre 1, a y b, $p:a=b:1$, $p=ab:1$. La figura indica la construcción.



El segmento así obtenido que depende de la unidad elegida (como acontece con la medida), pero que, en virtud de lo dicho en lecc. 19, § 3, no depende del ángulo utilizado para la construcción (propiedad uniforme), es adoptado en Geometría *pura* como *definición* de producto de segmentos, con objeto de eludir el concepto de medida y de establecer las propiedades métricas de las figuras al margen de la Aritmética. Claro es que para poder operar con productos de segmentos mediante las reglas del Algebra, es preciso demostrar que el producto así definido tiene las mismas propiedades, conmutativa, asociativa y distributiva que el producto de números. Esto se consigue mediante el teorema de Pascal (*), que puede enunciarse así (véase figura):

Si ABCDEFA *es una línea hexagonal cerrada de vértices impares* ACE *situados sobre una recta y los pares* BDF *sobre otra secante de aquélla, de tal modo que dos pares de lados opuestos* AB *y* DE (1.° y 4.°), BC *y* EF (2.° y 5.°) *son paralelos, son también paralelos los lados restantes* CD *y* FA

La demostración de este teorema sin hacer uso de la noción de medida es bastante laboriosa y puede verse expuesta en *Hilbert:* «Grundlagen der Geometrie». Una demostración mucho más breve, debida a *Schur*, para el caso de ser perpendiculares las dos rectas que contienen los vértices del hexágono, puede verse en *Halsted:* «Géométrie rationelle» (traducción francesa de Barbarin. París, 1911).

Mediante el recurso de la proporcionalidad la demostración es inmediata ya que de la hipótesis resulta:

$$\left.\begin{array}{l} VD:VB=VE:VA \\ VB:VF=VC:VE \end{array}\right\} \text{ y multiplicando, } \qquad VD:VF=VC:VA$$

que prueba la tesis.

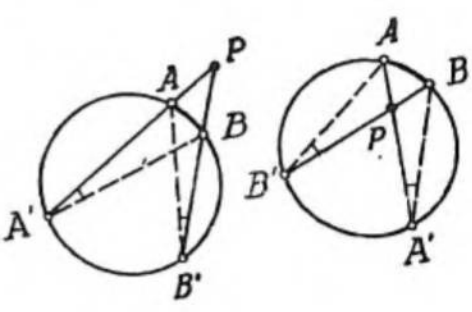
Apliquemos el teorema a los puntos A, B, C, D, E, F, definidos por $VB=b$, $VF=a$, $VD=1$ sobre una recta y $VE=a$, $VC=b$, $VA=p=ab:1$ sobre la otra. Se tiene EF y BC paralelos (perpendiculares a la bisectriz); por tanto si BA es paralela a DE (es decir, si $p:a=b:1$) es también FA paralela a CD y, por tanto, $p:b=a:1$, lo que prueba la permutabilidad de los factores del producto. Análogamente se demuestran las propiedades asociativa y distributiva.

(*) Ya conocido de Pappus (siglo IV) y probablemente de Euclides.

LECCIÓN 23.—RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

1. Potencia de un punto respecto de una circunferencia.—*Si desde un punto del plano de una circunferencia se trazan secantes a la misma, el producto de distancias de dicho punto a los de intersección de cada secante es una constante.*

Sean en efecto, A, A' y B, B' los respectivos puntos de intersección de dos secantes por P. Tanto si este punto es exterior como interior, las rectas $A'B$ y AB' son antiparalelas respecto de dichas secantes por ser iguales los ángulos inscritos $AA'B$ y $AB'B$ que abarcan el mismo arco AB. En consecuencia: $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$, y lo mismo demostraríamos con otra secante cualquiera.



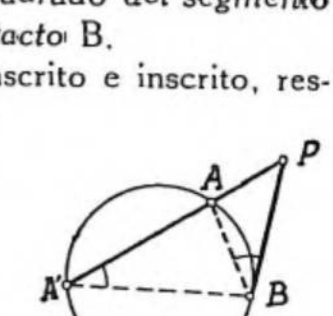
Si P pertenece a la circunferencia, el teorema es evidente por ser nulo el producto en cuestión.

Análogamente a lo dicho para el cociente, si consideramos ahora segmentos *orientados* será *positivo* el producto de distancias de un punto P de una recta a dos A, A' de la misma cuando P *no separa* dichos puntos, y *negativo* cuando *los separa*, con lo que el producto de distancias del enunciado es constante en valor y *signo*.

Definición.—El producto constante (con su signo) de las distancias de un punto P a los dos de intersección de toda secante que pasa por él a una circunferencia, se llama *potencia* del punto respecto de la circunferencia.

Si el punto P es exterior *la potencia es también el cuadrado del segmento* PB *de tangente comprendido entre* P *y el punto de contacto* B.

Pues la igualdad de los ángulos ABP y $AA'B$ (semiinscrito e inscrito, respectivamente) prueba el antiparalelismo de AB y BA' respecto de PB y PA', de donde $PB^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PA'}$ Por consiguiente:



El segmento de tangente entre un punto y una circunferencia es media proporcional entre los segmentos de una secante cualquiera comprendidos entre dicho punto y los de intersección.

2. Condición para que cuatro puntos sean concíclicos.—La propiedad que define la potencia puede enunciarse así:

Si dos pares de puntos AA' *y* BB' *situados en dos rectas secantes en* P, *son concíclicos, es decir, pertenecen a una circunferencia, se verifica*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$$

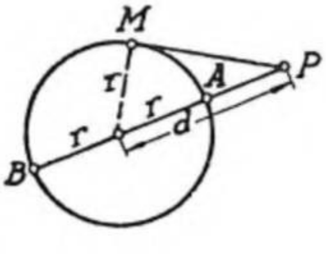
Recíprocamente: *Si dos pares de puntos AA′ y BB′ situados en dos rectas secantes en P verifican la igualdad* $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}$ *en valor y signo los cuatro puntos son concíclicos.* En efecto, la circunferencia que pasa por A, A', B corta a la recta BB' en un punto B'' distinto de B, tal que

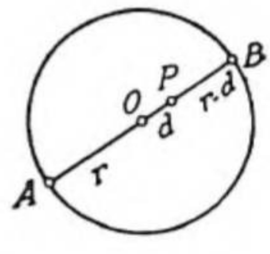
$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB''}$$

(por el teorema directo). Por tanto, es en valor y signo $PB'=PB''$, es decir, B'' coincide con B'.

De otro modo: Las rectas AB' y BA' son antiparalelas respecto de PA y PB (lec. 22, § 2.° recíproco), de donde $\sphericalangle AA'B=\sphericalangle AB'B$, lo que prueba que A' y B' están en un mismo arco capaz de extremos en A y B.

3. Expresión de la potencia.—Sea d la distancia del punto P al centro, r el radio. Considerando la secante diametral AB que pasa por P, se tendrá, en valor absoluto:





P exterior

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d+r)(d-r)=d^2-r^2$$

P interior

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(r+d)(r-d)=r^2-d^2$$

En el primer caso el producto es positivo como d^2-r^2, mientras en el segundo es negativo y debe, por tanto, igualarse también a d^2-r^2. En ambos casos se tiene, pues,

$$\boxed{\text{Potencia}=d^2-r^2}$$

4. Eje radical de dos circunferencias.—Supongamos dos circunferencias de radios r y r' y un punto P a distancias d y d' de sus centros respectivos. Si P tiene igual potencia respecto de ambas circunferencias, se tendrá:

$$d^2-r^2=d'^2-r'^2 \quad [1] \qquad \text{y por tanto} \qquad d^2-d'^2=r^2-r'^2 \quad [2]$$

Recíprocamente, todo punto P que cumpla [2] cumple [1] y tiene igual potencia respecto de ambas circunferencias.

Pero todos los puntos que cumplen [2] tienen constante $(r^2-r'^2)$ la diferencia de cuadrados de sus distancias a los centros de las circunferencias, y por tanto, su lugar será una recta perpendicular a la recta que los une. (Lección anterior, § 8.) En resumen:

El lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias es una recta perpendicular a la que une los centros. Se llama *eje radical* de las dos circunferencias.

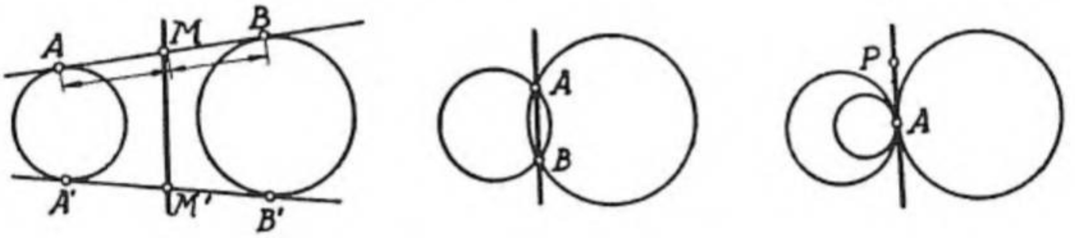
Su obtención es inmediata si las circunferencias son exteriores secantes o tangentes:

Si las circunferencias son exteriores, el eje radical debe pasar por los puntos medios M y M' de los segmentos de tangente común comprendidos entre los puntos de contacto AB y $A'B'$, puntos que tienen la misma potencia

$$\overline{MA}^2=\overline{MB}^2 \qquad \overline{M'A'}^2=\overline{M'B'}^2$$

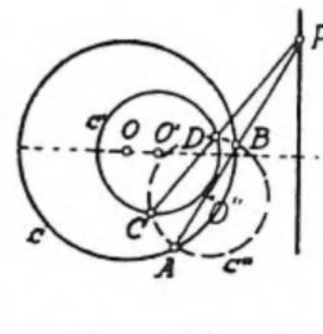
Si las circunferencias son secantes el eje radical es evidentemente la recta que pasa por los puntos de intersección A, B, de potencia nula en ambos.

Si las circunferencias son tangentes (exterior o interiormente) su tangente



común es el eje radical, puesto que la potencia de cualquiera de sus puntos se medirá por el cuadrado del mismo segmento PA de tangente en ambas.

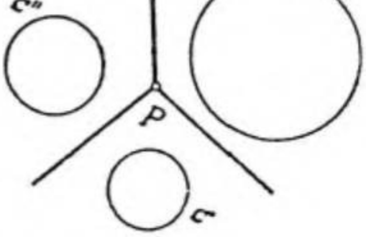
Supongamos ahora una de las circunferencias interior a la otra, pero no concéntrica con ella; tracemos otra circunferencia c'' de centro O'' no alineado con los O y O' de las circunferencias dadas c y c', y que sea secante de ambas. Los dos ejes radicales AB (de c y c'') y CD (de c'' y c') se cortan, pues si fuesen paralelos, la mediatriz de AB lo sería también de CD y pasaría a la vez por O, O' y O'', contra lo supuesto. El punto P de intersección tiene la misma potencia $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=$ $=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ respecto de c y c', es decir, pertenece al eje radical buscado, que será la perpendicular por P a OO'



Si las circunferencias fuesen concéntricas ($r \neq r'$) desde cualquier punto del plano sería $d=d'$ y no podría verificarse $d^2-d'^2=$ $=r^2-r'^2 \neq 0$, es decir, no existe eje radical.

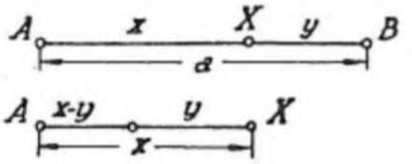
5. Centro radical de tres circunferencias.— El punto P de la construcción anterior tiene igual potencia respecto de c, c' y c'' El razonamiento que ha servido para obtenerle es general:

Dadas tres circunferencias cualesquiera c, c', c'' de centros no alineados los ejes radicales de c, c'' y c', c'', se cortan en un punto P que por pertenecer a ambos es punto de igual potencia respecto de las tres circunferencias, luego pertenece al eje radical de c y c'



Si los centros de tres circunferencias no están alineados los ejes radicales de las mismas tomadas dos a dos, se cortan en un punto, único del plano que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias y se llama centro radical de las mismas

6. Sección áurea de un segmento.—Se dice que un punto X divide a un segmento AB en *media y extrema razón* cuando la parte mayor AX es media proporcional entre el segmento total AB y la parte menor XB; es decir, llamando a al segmento, x a la parte mayor e y a la menor, cuando se verifica la siguiente proporción continua:



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \qquad [1]$$

La parte mayor x recibe el nombre de *segmento áureo* del segmento total AB.

7. Propiedad de la sección áurea.—Si se verifica la proporción anterior, se verifica también esta otra:

$$\frac{x}{y} = \frac{a-x}{x-y},$$

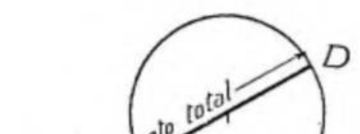
y como $a-x=y$,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y} \qquad [2]$$

Esta proporción se interpreta del mismo modo que la [1]. Si llevamos y sobre x, el segmento restante es $x-y$, y la proporción nos dice, por lo tanto, que y es segmento áureo de x.

La parte menor de un segmento dividido en media y extrema razón es, pues, segmento áureo de la parte mayor.

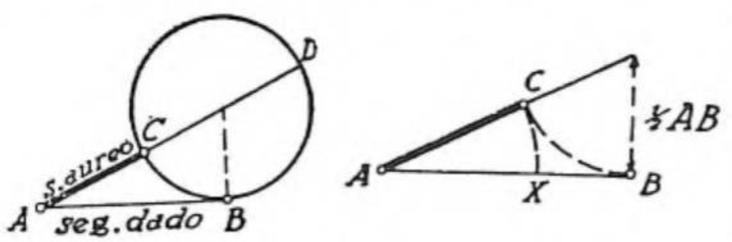
8. Construcción de un segmento conocido su segmento áureo.—La noción de potencia permite construir fácilmente un segmento, conocido su segmento áureo AB.



Basta trazar una circunferencia de diámetro igual a AB que sea tangente a AB en un extremo B; unir el centro con el otro extremo A, y el segmento AD (mayor de los determinados por el punto A y los C y D de intersección) es el pedido.

En efecto, la potencia de A será $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$, lo que prueba que, de las dos partes AC y CD en que está dividido el segmento AD, la mayor $CD = AB$ es media proporcional entre el segmento total AD y la menor AC.

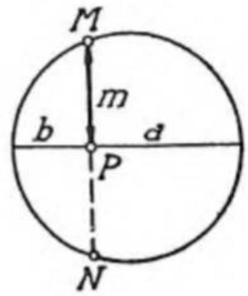
9. Construcción del segmento áureo de un segmento dado.—En virtud de lo dicho antes, la parte menor AC es el segmento áureo de la mayor AB; luego la misma figura sirve para hallar la sección áurea de un segmento dado AB

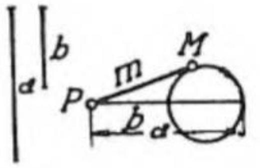


La construcción, reducida a sus términos más sencillos, consiste en *dibujar un triángulo rectángulo que tenga por catetos el segmento dado y su mitad y restar de la hipotenusa el cateto menor*

10. Construcción de medias geométricas.—La noción de potencia conduce también a construcciones sencillas de la media geométrica de dos segmentos dados a y b.

Llevémosles sobre una recta a distinto lado de un punto P, y constrúyase la circunferencia de diámetro $a+b$. La cuerda MN perpendicular por P, queda dividida por dicho punto en dos segmentos iguales, y se tendrá, en valor absoluto





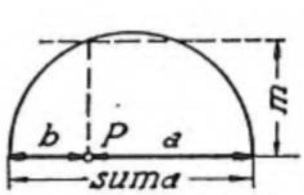
$$\overline{PM}^2=\overline{PM}\,.\,\overline{PN}=a\,.\,b \text{ (potencia de } P\text{)}$$

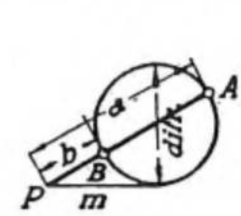
Llevemos ahora los segmentos a un mismo lado de P y tracemos la tangente PM a la circunferencia de diámetro $a-b$ (supuesto $a>b$). Se tendrá

$$\overline{PM}^2=a\quad b \text{ (potencia de } P\text{)}$$

En ambas construcciones PM es la media geométrica buscada. La primera construcción coincide con la expuesta en (lecc. 22, § 4).

11. Construcción de dos segmentos, conocido su producto y su suma o diferencia.—Dar el producto p de dos segmentos equivale a dar su media geométrica $m=\sqrt{p}$. Si se da además la suma, se conoce el diámetro de la circunferencia de la primera construcción anterior, que se completa fácilmente como indica la figura.





Si se da la diferencia de los segmentos, se conoce el diámetro de la circunferencia de la construcción segunda, y bastará construir en el extremo de un segmento$=m$ una circunferencia tangente cuyo diámetro sea la diferencia dada. La secante diametral que pasa por el otro extremo determina los dos segmentos a y b buscados.

12. Resolución geométrica de la ecuación de segundo grado.—Dividiendo los dos miembros de una ecuación de segundo grado en x por el coeficiente de x^2, queda en la forma

$$x^2 \pm qx+p=0 \quad \text{o bien} \quad x^2 \pm qx-p=0$$

En el primer caso las raíces son del mismo signo por ser positivo su producto $+p$; el producto de sus valores absolutos es p, y la suma de ellos q. Construídas estas raíces con una unidad conveniente, mediante la construcción anterior, el signo de q indicará el signo de ellas.

En el segundo caso las raíces son de signos contrarios, por ser negativo su producto $-p$. El producto de sus valores absolutos es p y su diferencia es q, con lo que pueden construirse, de acuerdo con el párrafo anterior. El signo de q indica cuál es el signo del segmento (raíz) mayor.

13. Ecuación de la sección áurea.—Caso particular de la construcción segunda es la construcción de la sección áurea de un segmento m, en la que la diferencia de segmentos buscados (diámetro) es igual a la media geométrica m (tangente). Es decir: la diferencia de raíces es m, el producto es m^2, la solución buscada es la raíz de menor valor absoluto PB.

Ecuación $\quad x^2+mx-m^2=0; \quad$ Segmento áureo de $m \quad x=m\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

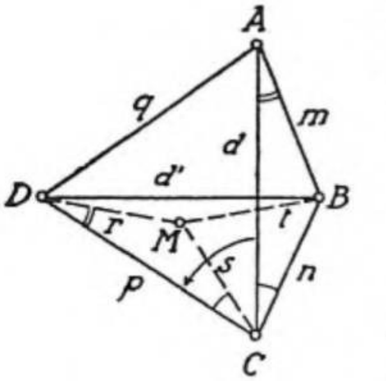
A la misma ecuación se llega expresando que el segmento áureo de x buscado es medio proporcional entre el segmento dado m y $m-x$; $x^2=m(m-x)$.

Hemos dicho antes que el residuo $r_1=m-x$ que queda al llevar sobre m su segmento áureo x, es a su vez segmento áureo de éste. Al llevar, pues, r_1 sobre x el nuevo residuo r_2 será a su vez el segmento áureo de r_1 y así sucesivamente. Como cada segmento áureo cabe *una sola vez* en el anterior y siempre deja residuo, se comprende que la medida $\dfrac{x}{m}$ del segmento áureo x tomando el dado m como unidad sea irracional (lec. 17, § 8) y tenga por desarrollo en fracción continua

$$\frac{x}{m}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\ldots}}}$$

Este es, pues, el desarrollo del irracional cuadrático $(\sqrt{5}-1):2$, como puede comprobarse algebraicamente.

14. Teorema de Ptolomeo.—Sea $ABCD$ un cuadrilátero, cuyos lados consecutivos designamos abreviadamente (v. fig.) por m, n, p, q. Sean d y d las diagonales AC y BD. Construyamos sobre DC un triángulo DMC directamente semejante al ABC, para lo cual basta aplicarle un giro y una homotecia alrededor de C, o construir los ángulos directamente iguales $\sphericalangle MDC=\sphericalangle BAC$, y $\sphericalangle DCM=\sphericalangle ACB$. Se tendrá



$$\frac{m}{r}=\frac{n}{s}=\frac{d}{p} \quad \text{de donde} \quad mp=dr$$

y como resulta $\sphericalangle ns=\sphericalangle dp$ y los segmentos que los forman son proporcionales, los triángulos BCM y ACD son también semejantes y por tanto, $\dfrac{n}{d}=\dfrac{t}{q}$, de donde $nq=dt$, igualdad que sumada con la anterior da

$$mp+nq=d(r+t)\geqslant d\,.\,d'$$

La suma de productos de lados opuestos de todo cuadrilátero es igual o mayor que el producto de las dos diagonales (*). Solamente es igual cuando M

(*) Aun cuando en la figura se ha supuesto convexo el cuadrilátero, la demostración es aplicable igualmente a un cuadrilátero cualquiera.

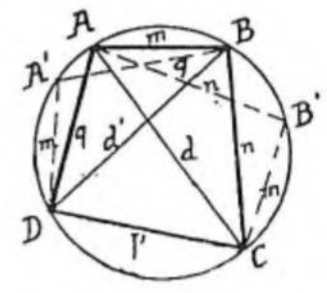
está alineado con D y B y *situado entre ambos*, es decir. cuando son directamente iguales los ángulos $\sphericalangle BDC = \sphericalangle MDC = \sphericalangle BAC$, así como los $\sphericalangle DBC = \sphericalangle MBC = \sphericalangle DAC$; pero la igualdad directa de los ángulos BDC y BAC, así como la de los DBC y DAC implica que el cuadrilátero $ABCD$ sea inscriptible y convexo (no cruzado) y recíprocamente; por tanto:

La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea convexo e inscriptible es que la suma de productos de los pares de lados opuestos sea igual al producto de las diagonales

$$d \cdot d' = mp + nq \qquad [1]$$

15. Cálculo de las diagonales de un cuadrilátero inscriptible.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscriptible. En el arco ABC subtendido por la diagonal d permutemos los arcos de cuerdas m y n; obtenemos así un nuevo cuadilátero inscriptible $AB'CD$ en el que $d \cdot \overline{DB'} = mq + pn$. Permutando análogamente las cuerdas m y q en el arco BAD subtendido por d', formamos otro cuadrilátero inscriptible $A'BCD$ en el que $d' \cdot \overline{A'C} = mn + pq$.



Pero $DB' = A'C$ por subtender arcos iguales a la suma de los subtendidos por m y p Dividiendo las dos igualdades obtenidas resulta

$$\frac{d}{d'} = \frac{mq + pn}{mn + pq} \qquad [2]$$

La razón de las diagonales de un cuadrilátero inscriptible es igual a la que existe entre las sumas de productos de los pares de lados concurrentes en sus vértices respectivos.

Las relaciones [1] (del párrafo anterior) y [2] permiten calcular las diagonales d, d' de un cuadrilátero incriptible, en función de los lados. Multiplicándolas se tiene

$$d^2 = \frac{(mp + nq)(mq + np)}{mn + pq}, \quad \text{y dividiendo [1] por [2]:} \quad d'^2 = \frac{(mp + nq)(mn + pq)}{mq + pn}$$

de donde se deducen d y d'

16. Aplicación del teorema de Ptolomeo al cálculo de cuerdas.

Ptolomeo (siglo II) demostró la relación [1] en el libro primero de su famoso tratado de astronomía (Almagesto) como lema para el cálculo de cuerdas de una circunferencia, gracias al cual, construyó la tabla de cuerdas más antigua que conserva la historia de la matemática. Sus cálculos partieron de las cuerdas de 60° (hexágono) y 72° (pentágono) y por combinaciones de suma, resta y bisección llegó a tabular cuerdas de ángulos variando de medio en medio grado

Sin dificultad demostrará el lector, aplicando [1] al cuadrilátero inscriptible definido por dos cuerdas con un vértice común y el punto diametralmente opuesto, que

$$\text{cuerda } (\alpha+\beta) = [\text{cuerda } (\alpha) \cdot \text{cuerda } (180^\circ-\beta) + \text{cuerda } (\beta) \text{ cuerda } (180^\circ-\alpha)] : \text{diám.}$$

$$\text{cuerda } (\alpha-\beta) = [\text{cuerda } (\alpha) \cdot \text{cuerda } (180^\circ-\beta) - \text{cuerda } (\beta) \text{ cuerda } (180^\circ-\alpha)] : \text{diám.}$$

donde
$$\text{cuerda } (180^\circ-\alpha) = \sqrt{d^2 - \text{cuerda}^2(\alpha)}$$

Estas relaciones permiten, pues, *calcular*, como hizo Ptolomeo, la cuerda de $\alpha+\beta$ y la de $\alpha-\beta$ mediante las cuerdas de α y de β.

V. Ejercicios al final del capítulo.

LECCIÓN 24.—RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO

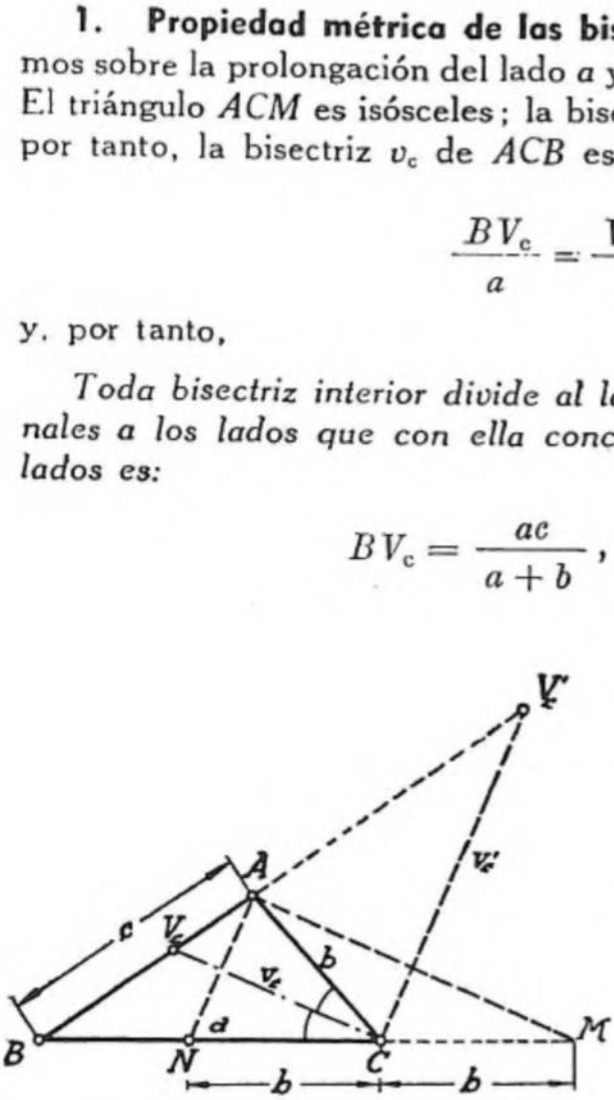
1. Propiedad métrica de las bisectrices.—Sea el triángulo ABC. Llevemos sobre la prolongación del lado a y a continuación de C, el segmento $CM=b$. El triángulo ACM es isósceles; la bisectriz v'_c es perpendicular a la base AM y, por tanto, la bisectriz v_c de ACB es paralela a AM, de donde (Thales)

$$\frac{BV_c}{a}=\frac{V_cA}{b}=\frac{c}{a+b}$$

y, por tanto,

Toda bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados que con ella concurren, cuya expresión en función de los lados es:

$$BV_c=\frac{ac}{a+b},\qquad V_cA=\frac{bc}{a+b}$$



Llevemos sobre a a partir de C el segmento $CN=b$. AN será ahora paralela a la bisectriz exterior v'_c y se tendrá

$$\frac{BV'_c}{a}=\frac{AV'_c}{b}=\frac{c}{a-b}$$

de donde

Si una bisectriz exterior de un triángulo corta al lado opuesto, las distancias de su pie a los extremos de dicho lado son proporcionales a los lados concurrentes con la bisectriz y que pasan por ellos, y su expresión en función de los lados es:

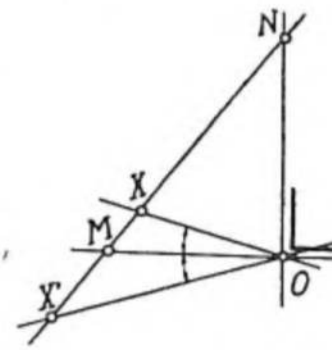
$$BV'_c=\frac{ac}{a-b},\qquad AV'_c=\frac{bc}{a-b}$$

2. Nuevas construcciones de cuaternas armónicas.—De lo anterior se desprende, teniendo en cuenta los signos

$$\frac{V'_cA}{V'_cB}=-\frac{V_cA}{V_cB}=\frac{b}{a},\qquad \text{de donde:}$$

Las intersecciones de las bisectrices de un ángulo de un triángulo y de su adyacente, con el lado opuesto, están armónicamente separadas por los vértices de dicho lado. De otro modo:

Cortando dos rectas y las bisectrices de los ángulos que forman por una secante cualquiera de las cuatro, se obtiene una cuaterna armónica

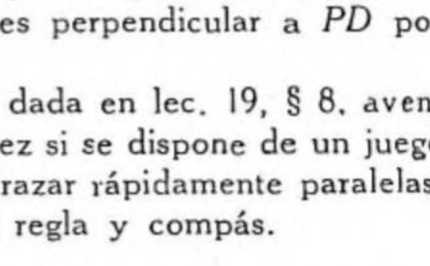


Esta propiedad permite construir el punto X' armónicamente separado de X por M y N, sin más que *hacer pasar por* M *y* N *los lados de un ángulo recto* MON *y trazar luego la simétrica* OX' *de* OX *respecto de uno de dichos lados* (que lo es también respecto del otro).

El mismo resultado se obtiene trazando una circunferencia cualquiera por MN, uniendo con X uno de los extremos D del diámetro perpendicular, y proyectando desde el otro extremo C el otro punto P de intersección de XD con la circunferencia. En efecto, PD es bisectriz de $\sphericalangle MPN$ por la igualdad de los arcos MD y DN, y PC es perpendicular a PD por ser CD diámetro.

La construcción dada en lec. 19, § 8, aventaja a ésta en rapidez si se dispone de un juego de escuadras para trazar rápidamente paralelas, y ésta aventaja a aquélla si sólo se dispone de regla y compás.

3. Lugar geométrico de puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante.—Si suponemos fijos los vértices A y B del triángulo ABC, y variable C de tal modo que la razón $a:b$ sea constante, los pies V_c y V'_c de las bisectrices por C serán también fijos, pues son los únicos puntos de la recta AB cuya razón de distancias a los A y B es $a:b$. Y como dichas bisectrices son constantemente perpendiculares entre sí, los vértices C están en la circunferencia de diámetro $V_cV'_c$.

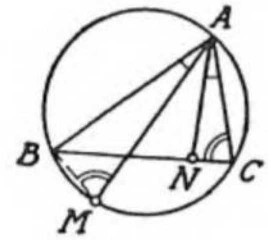


Recíprocamente, la razón de distancias de todo punto C de dicha circunferencia a A y B es $a:b$. Pues la recta simétrica de CA respecto de CV_c cortará a $V_cV'_c$ en el único punto B armónicamente separado de A por V_c y V'_c; es decir, CV_c es bisectriz de ACB y, por tanto, $CA:CB=V_cA:V_cB$.

El lugar geométrico de los puntos de un plano cuya razón de distancias a dos puntos fijos A *y* B *es un valor dado (distinto de la unidad), es una circunferencia cuyo diámetro está determinado por los puntos* V_c *y* V'_c *de la recta* AB *cuya razón de distancias a los* A *y* B *es el valor dado.*

Si la razón de distancias fuera la unidad, las distancias A y B serían iguales y el lugar sería la mediatriz de AB

4. Isogonales.—Llámanse *isogonales* respecto de dos lados de un triángulo dos semirrectas que partiendo del vértice común forman ángulos iguales y de opuesto sentido con dichos lados. Así, en la figura $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$ y las semirrectas AM y AN son isogonales respecto de los lados AB y AC

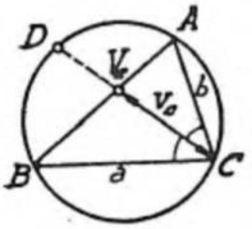


Los ángulos inscritos BAM y BCA son iguales y, por tanto, los triángulos BMA y NCA son semejantes, por tener dos ángulos respectivamente iguales. De donde

$$AB : AM = AN : AC \quad \text{y, por tanto,} \quad \overline{AB} \,.\, \overline{AC} = \overline{AM} \,.\, \overline{AN}$$

El producto de dos lados de un triángulo es igual al de los segmentos de dos isogonales concurrentes con ellos y limitados respectivamente por el lado opuesto y por la circunferencia circunscrita.

5. Cálculo de las bisectrices en función de los lados.—Toda bisectriz v_c de un triángulo es isogonal de sí misma; si D es su punto de intersección con la circunferencia circunscrita, se tendrá por el teorema anterior



$$ab = v_c \cdot \overline{CD} = v_c\,(v_c + \overline{V_c D}) = v_c^2 + v_c \cdot \overline{V_c D}$$

El segundo sumando es en valor absoluto la potencia de V_c respecto de la circunferencia circunscrita y puede sustituirse por el producto $BV_c \,.\, V_cA$

$$ab = v_c^2 + \overline{BV_c} \cdot \overline{V_c A}$$

El producto de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado de la bisectriz concurrente con ellos más el producto de los segmentos en que divide al lado opuesto.

Estos segmentos se han calculado en función de los lados en § 1. Sustituyendo en la relación anterior resulta

$$ab = v_c^2 + \frac{abc^2}{(a+b^2)}$$

de donde

$$v_c^2 = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\,\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2} = ab\,\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{(a+b)^2}$$

El perímetro $a+b+c$ se suele designar por $2p$, es decir, por p el semiperímetro, con lo que

$$a+b+c=2p \qquad a+b-c=2p-2c=2(p-c)$$

y análogamente

$$a-b+c=2(p-b) \qquad -a+b+c=2(p-a)$$

Con esta notación resulta

$$v_c^2 = ab\,\frac{4\,p\,(p-c)}{(a+b)^2} \qquad v_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp\,(p-c)}$$

y, análogamente,

$$v_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)} \qquad v_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp\,(p-b)}$$

6. Cálculo de las medianas.—La relación

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\,m_c^2$$

demostrada en el § 7 de la lección 22, liga los cuadrados de los tres lados con el cuadrado de una mediana y permite calcular ésta en función de aquéllos:

$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

y, análogamente,

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \qquad m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

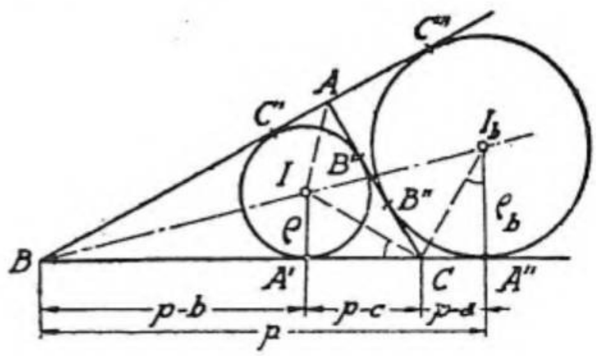
7. Segmentos determinados en los lados por los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscrita.—Los tres puntos de contacto $A'B'C'$ de la circunferencia inscrita en un triángulo ABC, dividen a sus lados en seis segmentos cuya suma es el perímetro $2p$. Como son iguales los pares de segmentos concurrentes en cada vértice, tres de ellos no concurrentes sumarán el semiperímetro p.

Así, tenemos en la figura $p = BC' + AC' + CA' = c + CA'$

de donde $CA' = CB' = p - c$;

y, análogamente,

$AC' = AB' = p - a$; $\qquad BA' = BC' = p - b$



Considerando la circunferencia exinscrita tangente al lado AC en B'' y si A'' y C'' son los puntos de contacto con las rectas AB y BC, se tendrá análogamente

$BC'' = BA''$ o sea $BA + AB'' = BC + CB''$

y como la suma de ambos miembros es el perímetro, cada uno de ellos vale p

$$BA'' = BC'' = p \qquad \text{de donde} \qquad CB'' = CA'' = p - a$$

y análogamente los demás

De la misma figura se desprende $C'C''=A'A''=p-(p-b)=b$, es decir: *La distancia entre los puntos de contacto de la circunferencia inscrita y de una exinscrita con los lados del ángulo que comprende a ambas es igual al lado opuesto a dicho ángulo.*

Análogamente, $B'B''=CB'-CB''=(p-c)-(p-a)=a-c$, resultado fácil de traducir al lenguaje vulgar.

8. Radios de las circunferencias inscrita y exinscritas.—Los triángulos rectángulos IBA' y I_bBA'' de la figura anterior son semejantes; de donde llamando ρ al radio de la circunferencia inscrita y ρ_b al de la exinscrita de centro I_b,

$$\frac{\rho}{\rho_b}=\frac{p-b}{p} \qquad [1]$$

Los triángulos rectángulos $IA'C$ y $CA''I_b$ también son semejantes por tener $\sphericalangle ICA'=\sphericalangle CI_bA''$ (lados perpendiculares-; luego

$$\frac{\rho}{p-c}=\frac{p-a}{\rho_b} \quad \text{de donde} \quad \rho\rho_b=(p-a)(p-c) \qquad [2]$$

Resolvamos el sistema [1] y [2] para obtener ρ y ρ_b. Multiplicando [1] y [2] resulta

$$\rho^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \qquad \rho=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad [3]$$

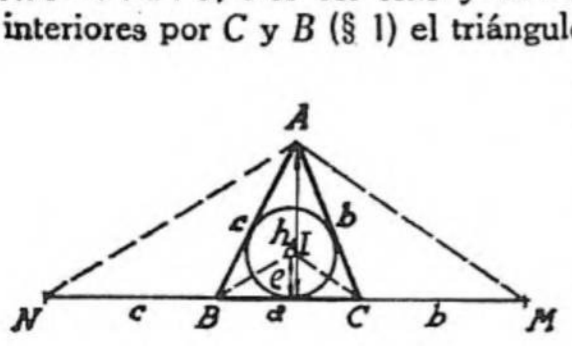
Dividiendo [2] por [1] resulta

$$\rho_b^2=\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b} \qquad \rho_b=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} \qquad [4]$$

y análogamente se obtienen

$$\rho_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \qquad \rho_c=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} \qquad [4]$$

9. Expresión de las alturas en función de los lados.—Llevando c y b respectivamente en las prolongaciones de a por sus extremos B y C obtenemos $NM=c+a+b$. Por ser AM y AN respectivamente paralelas a las bisectrices interiores por C y B (§ 1) el triángulo ANM es semejante al IBC; y, por tanto, sus alturas h_a y ρ son proporcionales a sus respectivas bases $MN=2p$ y $BC=a$



$$\frac{h_a}{\rho}=\frac{2p}{a} \quad \text{de donde} \quad h_a=\frac{2p}{a}\rho \qquad [5]$$

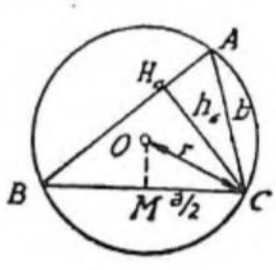
y sustituyendo ρ por su expresión [3]

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad [6]$$

y análogamente

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad [6]$$

10. Radio de la circunferencia circunscrita.—El ángulo BAC del triángulo es mitad del central BOC y, por tanto, igual al MOC limitado por OC y el diámetro perpendicular a BC. De aquí resulta la semejanza del triángulo rectángulo MOC con el H_cAC. Por tanto:



$$\frac{r}{a/2} = \frac{b}{h_c}; \quad \text{de donde} \quad r = \frac{ab}{2h_c}$$

y, sustituyendo h_c por su expresión [6] en función de los lados,

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

EJERCICIOS

(relativos a todo el Capítulo VII)

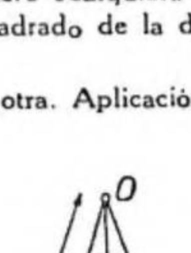
1. Demostrar geométricamente que la media geométrica es menor que la media aritmética.

2. Descomponer un segmento en dos cuyos cuadrados sean proporcionales a dos segmentos dados.

3. Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados.

4. Demostrar que la suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más el cuádruplo del cuadrado de la distancia entre los puntos medios de éstas.

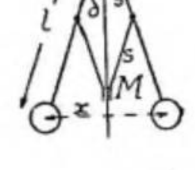
5. Dados los cuatro lados de un cuadrilátero y una diagonal, calcular la otra. Aplicación: Lados $a=5$, $b=7$, $c=6$, $d=8$, diagonal $e=8$ (concurrente con a y b).



6. Expresar la distancia x entre los centros de las esferas del regulador de Watt de la figura, en función de la distancia δ entre el manguito M y la articulación O. Se suponen las dimensiones l y s conocidas.

7. Calcular las longitudes de las barras de la armadura de marquesina de la figura.

8. El capitán de un buque, situado en el puente a 12 metros sobre el nivel del mar, ve un faro de 30 m. de altura sobre dicho nivel asomando sobre el agua (supuesta en calma). Calcular la distancia que le separa del faro. (Se supondrá la tierra esférica, de radio correspondiente a la definición de metro.)



9. Dos arcos de circunferencia tangentes e iguales entre sí, de 100 metros de radio, enlazan los ejes de dos vías paralelas separados entre sí 6 metros. Calcular la distancia entre los extremos de dichos arcos.

10. Calcular el radio conocida la cuerda y la flecha (distancia entre los puntos medios del arco y de la cuerda) de un segmento circular.

11. Llámase *media cuadrática* de n cantidades a la raíz cuadrada del promedio de sus cuadrados. Dése una construcción gráfica para hallar la media cuadrática de varios segmentos dados.

12. Demostrar que el producto de los segmentos en que cada altura de un triángulo queda dividida por el ortocentro es igual en las tres alturas.

13. Determinar sobre el lado BC de un triángulo ABC un punto E tal que $\overline{AE}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{EC}$.

14. Si dos circunferencias son tangentes exteriormente en A, y los puntos de contacto de una tangente exterior son B y C, demostrar que el triángulo BAC es rectángulo en A y calcular la altura sobre la hipotenusa de dicho triángulo en función de los radios.

15. Construir tres circunferencias tangentes entre sí dos a dos en tres puntos dados no alineados.

16. Aplicar el teorema de Ptolomeo al paralelogramo y al rectángulo.

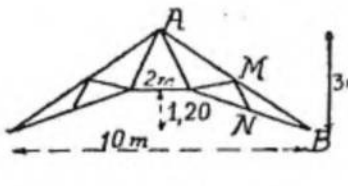
17. Calcular las diagonales de un trapecio isósceles de lados conocidos.

18. A, B, C son los vértices de un triángulo equilátero. Hallar el lugar geométrico de los puntos que verifican la condición $PA=PB+PC$.

19. Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo sus lados.

20. Deducir la fórmula § 10, lec. 24, como consecuencia del teorema de las isogonales

21. Dadas las tres medianas de un triángulo, calcular los lados.



22. Calcular las longitudes de las barras de la armadura de la figura, sabiendo que M y N son puntos medios de las que concurren en B (y lo mismo sus simétricos).

23. Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Sean ME y MF las bisectrices de los ángulos AMB y AMC; E y F los puntos de intersección de éstas con AB y AC, respectivamente. Demostrar que EF es paralela a BC.

24. Sean M, N, P los puntos medios de los lados BC, AC y AB de un triángulo ABC. La bisectriz de PMN corta a PN en Q, centro de gravedad del conjunto de los segmentos AB y AC. Demostración.

Aplicación a la determinación del c. d. g. del perímetro de un triángulo (incentro de MNP).

25. Aplicar las fórmulas que dan ρ y ρ_a a un triángulo rectángulo en A.

26. La suma de los cuadrados de las tres medianas es igual a los tres cuartos de la suma de los cuadrados de los lados.

27. Si G es el baricentro de ABC se verifica

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3\,(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)$$

28. Supongamos una circunferencia interior a un ángulo BAC y tangente a sus lados AB y AC. Tracemos una tercera tangente BC que separe el vértice A de la circunferencia. Demostrar que: 1.º El perímetro del triángulo limitado por estas tres rectas es constante.

2.º El ángulo bajo el que se ve el lado de este triángulo opuesto al vértice A desde el centro de la circunferencia es constante. Valor de dicho ángulo.

29. Lugar de los puntos desde los cuales se ven dos circunferencias bajo ángulos iguales.

30. Construir un triángulo conociendo a, h_a, y $b:c$.

31. Idem dados $2p$, $\sphericalangle A$, a.

32. Idem dados $2p$, $\sphericalangle A$ y ρ.

33. Idem dados, a, ρ, ρ_a.

34. Construir un triángulo isósceles dados el radio de la circunferencia inscrita y la altura sobre uno de los lados iguales.

35. Trazar por un punto P una recta que limite con otras dos dadas, un triángulo de perímetro dado.

NOTA.—Los cálculos sustituyen con ventaja a las construcciones cuando se requiere una cierta exactitud en los resultados. Pero también sirven en ocasiones para hallar indirectamente la construcción que da uno o varios segmentos cuando resulte más fácil calcularlos; pues basta *construir a posteriori* las fórmulas que los determinan. Ejemplos:

36. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados A, B, y que intercepte en una recta dada r un segmento dado s. (Si P es la intersección de r con la recta AB se reduce fácilmente a la determinación de dos segmentos de producto$=PA\,.\,PB$ y diferencia$=s$.)

37. Situar entre una circunferencia y su tangente en un punto A un segmento de longitud dada s alineado con A' diametralmente opuesto a A. (Adóptese como incógnita la cuerda alineada con s; calcúlese y constrúyase.)

38. Situar entre un arco y su cuerda un segmento de longitud dada s alineado con el punto medio del arco restante.

39. Construir un triángulo dados a, r, v_a.

40. Aplicar el teorema de Stewart al cálculo de $v_a v_b v_c$.

Capítulo VIII.—INVERSION Y POLARIDAD EN EL CIRCULO

LECCIÓN 25.—HACES DE CIRCUNFERENCIAS

1. Nuevas propiedades métricas de la cuaterna armónica.—Hemos dicho en la lección anterior que para construir el conjugado armónico de un punto C respecto de otros dos A y B bastaba hacer pasar por A y B los lados de un ángulo recto AMB y hallar la intersección de la recta AB con la simétrica MD de MC respecto de un lado MB.

Si O es el punto medio de AB o sea, el circuncentro de AMB, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \sphericalangle OMB = \sphericalangle OBM & [1] \\ \sphericalangle BMC = \sphericalangle BMD & [2] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{de donde, restando y recordando (lec. 10, § 7)} \\ \text{resulta} \quad \sphericalangle OMC = \sphericalangle MDO \quad [3] \end{array}$$

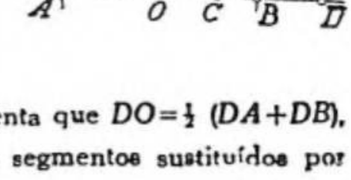
Lo que indica que MC y MD son antiparalelas respecto de los lados del ángulo MOD y, por tanto,

$$\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 \qquad [4]$$

Recíprocamente, si se verifica [4], las rectas MC y MD son antiparalelas, y la igualdad [3] restada de [1] implica la [2]; lo que demuestra que C y D están armónicamente separados por A y B. Por tanto:

Para que A *y* B *estén armónicamente separados por* C *y* D *es condición necesaria y suficiente que la mitad del segmento determinado por uno de estos pares sea media geométrica entre las distancias de su punto medio al otro par.*

Esta propiedad permite construir conjugados armónicos construyendo terceras proporcionales. Así el punto D conjugado armónico del C respecto de A y B puede construirse como indica la figura, o sea, levantando la perpendicular por C hasta cortar a la circunferencia de diámetro AB en N y trazando por N la perpendicular ND a ON (tangente). La misma figura da la construcción de C conocido D. En efecto, se tiene $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = \overline{ON}^2 = \overline{OA}^2$ (Lecc. 22, §.)



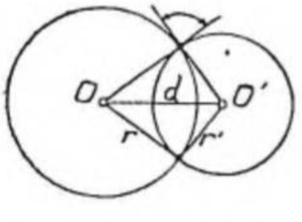
También se verifica $\overline{DC} \cdot DO = \overline{DN}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DB}$; y teniendo en cuenta que $DO = \frac{1}{2}(DA + DB)$, dividiendo por el producto $\overline{DA} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DC}$ resulta (considerando los segmentos sustituídos por sus medidas con una misma unidad, v. lec. 22, § 1):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}\right) = \frac{1}{DC}$$

Cuando la inversa de un número es media aritmética entre las inversas de otros dos se dice que este número es la *media armónica* entre aquellos dos. Diremos, pues:

La distancia entre todo par de puntos C y D armónicamente separados por A y B es media armónica entre las distancias del punto exterior D a los A y B

2. Circunferencias ortogonales.—Dos circunferencias se llaman *ortogonales* cuando se cortan de tal modo que las tangentes en cada uno de los puntos de intersección son perpendiculares entre sí. La simetría de ambas circunferencias respecto de la recta que une los centros indica que esta condición se cumple simultáneamente para ambos puntos de intersección.



Dos circunferencias ortogonales cumplen las siguientes condiciones y, recíprocamente, si las cumplen son ortogonales:

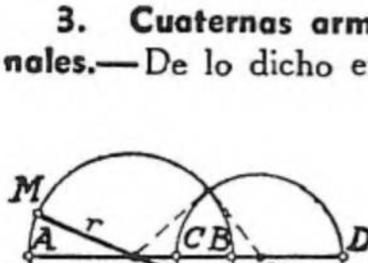
I. *Los radios de una y otra circunferencia correspondientes a cada punto de intersección son perpendiculares entre sí.* O lo que es lo mismo, *la tangente a cada circunferencia en cada punto de intersección pasa por el centro de la otra.* Esto exige naturalmente que el centro de cada una sea exterior a la otra.

II. *Si* d *es la distancia entre los centros y* r *y* r′ *son los radios se verifica* $d^2 = r^2 + r'^2$; pues esta relación sólo se cumple cuando es rectángulo el triángulo formado por los dos centros y un punto de intersección.

III. *La potencia del centro de cada circunferencia respecto de la otra es el cuadrado de su propio radio* (v. lec. 23, §§ 1 y 2). Pues si $d^2 = r^2 + r'^2$ se desprende $d^2 - r^2 = r'^2$ así como $d^2 - r'^2 = r^2$; y recíprocamente, cualquiera de estas igualdades implica la II.

La equivalencia de estas condiciones con la ortogonalidad indica que son también equivalentes entre sí.

3. Cuaternas armónicas determinadas por dos circunferencias ortogonales.—De lo dicho en el párrafo anterior se desprende que:



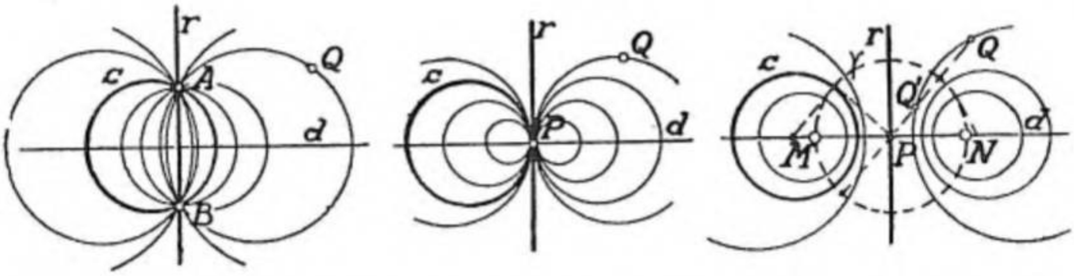
Si una recta r *corta a dos circunferencias ortogonales y pasa por el centro* O *de una de ellas, las intersecciones forman una cuaterna armónica.* En efecto (v. figura), la potencia de dicho centro O respecto de la circunferencia O' es, en virtud de la ortogonalidad (§ 2, III), $\overline{ON} \cdot \overline{OQ} = \overline{OM}^2$, lo que prueba (§ 1) que la cuaterna $MNPQ$ es armónica.

En particular: *Los diámetros alineados* AB *y* CD (*v. fig.*) *de dos circunferencias ortogonales se dividen armónicamente.*

Recíprocamente: *Toda circunferencia que pasa por dos puntos* NQ *armónicamente separados por otros dos* MP, *es ortogonal a la circunferencia de diámetro* MP. Puesto que la potencia de O respecto de aquélla es $\overline{ON} \cdot \overline{OQ} = \overline{OM}^2$

4. Haz de circunferencias.—Dadas dos circunferencias, hemos aprendido en la lección 23 a hallar su eje radical. Recíprocamente, dada una circunferencia c y una recta r de su plano, podemos proponernos hallar todas las circunferencias que tengan con c el mismo eje radical r. Llamaremos a su conjunto incluída c, *haz de circunferencias*.

Sea d la recta diametral perpendicular a r. Si r corta a c todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B de intersección cumplirán la condición



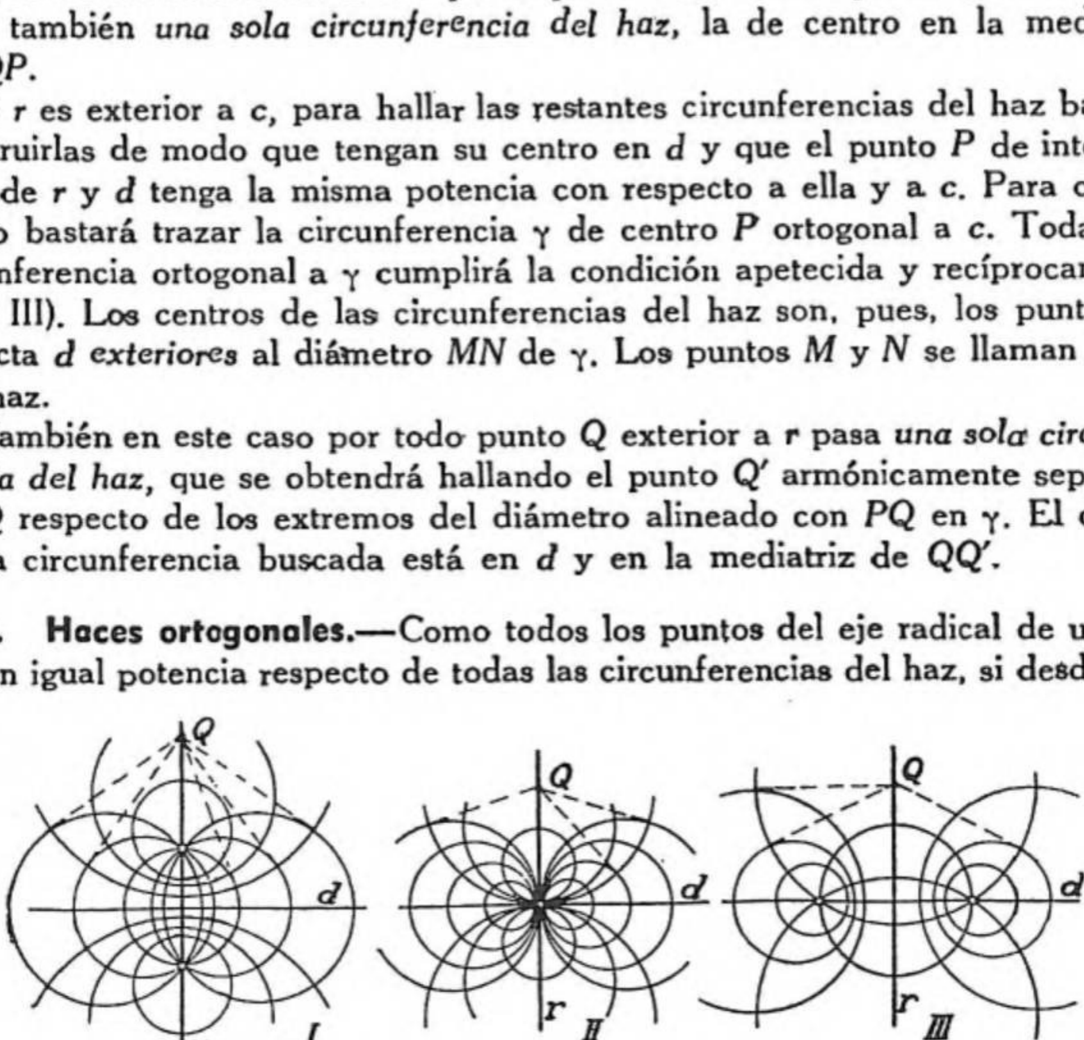
deseada. Todo punto de d es, pues, centro de una de tales circunferencias. Por todo punto Q del plano exterior a r, pasa *una circunferencia y sólo una del haz*, la que pase por A, B y Q.

Si r es tangente a c en P, toda otra circunferencia tangente a r en el mismo punto P es circunferencia del haz. Los centros de estas circunferencias son, pues, todos los de la recta d excepto el punto P. Por todo punto Q exterior a r pasa también *una sola circunferencia del haz*, la de centro en la mediatriz de QP.

Si r es exterior a c, para hallar las restantes circunferencias del haz bastará construirlas de modo que tengan su centro en d y que el punto P de intersección de r y d tenga la misma potencia con respecto a ella y a c. Para conseguirlo bastará trazar la circunferencia γ de centro P ortogonal a c. Toda otra circunferencia ortogonal a γ cumplirá la condición apetecida y recíprocamente (§ 2, III). Los centros de las circunferencias del haz son, pues, los puntos de la recta d *exteriores* al diámetro MN de γ. Los puntos M y N se llaman *polos* del haz.

También en este caso por todo punto Q exterior a r pasa *una sola circunferencia del haz*, que se obtendrá hallando el punto Q' armónicamente separado de Q respecto de los extremos del diámetro alineado con PQ en γ. El centro de la circunferencia buscada está en d y en la mediatriz de QQ'.

5. Haces ortogonales.—Como todos los puntos del eje radical de un haz tienen igual potencia respecto de todas las circunferencias del haz, si desde uno



cualquiera Q de dichos puntos que sea exterior a todas ellas, trazamos las tangentes a las mismas, todos los segmentos de dichas tangentes comprendidos entre Q y los puntos de contacto son iguales, es decir, son radios de una circunferencia de centro Q ortogonal a todas las circunferencias del haz (§ 2).

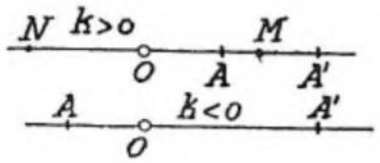
Todo punto del eje radical de un haz de circunferencias, exterior a todas las circunferencias del haz, es centro de una circunferencia ortogonal a todas ellas.

A su vez toda circunferencia del haz dado H es ortogonal a todas las circunferencias así construídas, y por consiguiente su centro es punto de igual potencia respecto de todas ellas (§2, III). De donde resulta que la recta d de los centros de H es eje radical común a todas las circunferencias ortogonales y, por tanto:

Todas las circunferencias ortogonales a las circunferencias de un haz constituyen a su vez otro haz cuyo eje d *es la línea de centros del primero, y cuya línea de centros* r *es el eje del primero.*

Si el primer haz tiene polos *todas las circunferencias del segundo pasan por ellos*, puesto que pertenecen a la circunferencia ortogonal cuyo centro es el punto de intersección de r y d (v. fig. III). Lo recíproco ocurre si el primer haz pasa por dos puntos fijos; éstos son los polos del segundo (fig. I). Finalmente si un haz es tangente también lo es el haz ortogonal (fig. II).

6. Inversión en la recta. Involución rectilínea.—Elijamos un punto fijo O de una recta y hagamos corresponder a todo otro de sus puntos A otro A' de la misma tal que el producto de distancias al punto fijo O, con sus signos, sea una constante; es decir: $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$. Llamaremos a esta correspondencia *inversión de centro* O, y a la constante k, *potencia* de la inversión.



Si $k>0$, todo par de puntos homólogos A y A' están a un mismo lado de O, y existen dos puntos M y N tales que $OM = +\sqrt{k}$, $NO = -\sqrt{k}$ llamados *dobles*, por ser homólogos de sí mismos, ya que $\overline{OM} \cdot \overline{OM} = \overline{ON} \cdot \overline{ON} = k$.

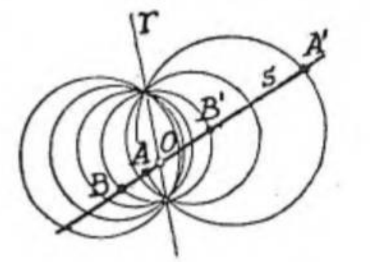
En este caso el valor $r = \sqrt{k}$ se llama *radio* de la inversión.

Si $k<0$ los pares de puntos homólogos A y A' están a distinto lado de O y no existen puntos dobles. Toda inversión de potencia negativa puede obtenerse como producto de una inversión de potecia positiva por la simetría respecto del centro.

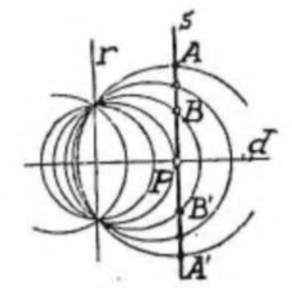
En virtud de § 1 en toda inversión de potencia positiva se verifica: *Todo par de puntos homólogos están armónicamente separados por los puntos dobles* M *y* N. Puesto que se cumple $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OM}^2 = k$.

Esta correspondencia puntual se llama también *involución*, por corresponderse los puntos homólogos doblemente; es decir, si A tiene por homólogo A', también A' considerado como de la primera figura tiene por homólogo A, y por consiguiente el producto de la transformación por sí misma es la identidad. Obsérvese que tal cosa no ocurre con la homotecia. En cambio la *simetría* respecto de un punto es una correspondencia *involutiva* sin ser inversión.

7. Involución de puntos obtenida como sección de un haz.—*Al cortar las circunferencias de un haz por una recta no paralela al eje radical, los pares de puntos de intersección son puntos homólogos de una involución, cuyo centro es la intersección de la recta con el eje radical del haz.*

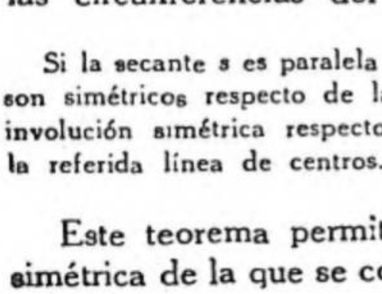


En efecto, si AA', BB', ... son los pares de intersecciones de la recta dada s con circunferencias del haz y O es la intersección de s con el eje radical r se verificará $\overline{OA}\ \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} =$ constante por ser una misma la potencia del punto O respecto de todas las circunferencias del haz.



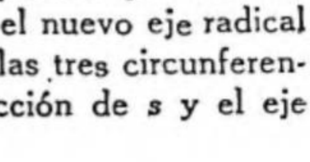
Si la secante s es paralela al eje, los pares de puntos de intersección son simétricos respecto de la línea de centros del haz y resulta una involución simétrica respecto del punto P de intersección de s con la referida línea de centros.

Este teorema permite construir el centro de una involución rectilínea no simétrica de la que se conocen dos pares de puntos homólogos AA' y BB', pues bastará trazar una circunferencia por cada par y hallar el eje radical de ambas circunferencias c, c'. La intersección O de dicho eje con la recta dada s es el centro buscado.



Este centro es único, pues al sustituir, por ejemplo, la circunferencia c' que pasa por BB' por otra c'', el punto de intersección de s con el nuevo eje radical de c y c'' es el centro radical de las tres circunferencias c, c' y c'' y por consiguiente coincide con la intersección de s y el eje radical anterior.

Nota. ECUACIÓN DE LOS FOCOS CONJUGADOS EN LOS ESPEJOS ESFÉRICOS



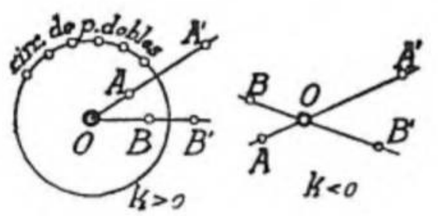
Un rayo luminoso que parte de un punto A del eje de un espejo esférico de centro O incidiendo sobre éste forma con el radio en el punto de incidencia P un ángulo igual al que forma el rayo reflejado. Por tanto se tendrá $PA : PB = AO : OB$. Al tender P al punto central C del espejo la razón de distancias $PA : PB$ tiende a $CA : CB$ y, por tanto, el punto B tiende a cumplir la condición $CA : CB = AO : OB$, que define el *punto* B *armónicamente separado del* A *por* O *y* C. *Si la abertura del espejo es muy pequeña comparada con el radio de la esfera* se puede admitir aproximadamente que todos los rayos reflejados pasan por dicho punto B, y en virtud de § 1, se tendrá ($OC =$ radio r)

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{2}{r} \quad \text{ecuación de los focos conjugados empleada en Física}$$

V. Ejercicios al final del capítulo.

LECCIÓN 26.—LA INVERSIÓN EN EL PLANO

1. Definición de la inversión.—Fijado un punto O del plano, transformemos todo otro punto A en otro A', situado en la recta OA, tal que $OA \cdot OA' = k$ (constante no nula). Definimos así una correspondencia puntual llamada *inversión;* la constante k se llama *potencia de la inversión* y el punto O *centro de inversión*. Toda inversión queda, pues, definida por el centro y la potencia o por el centro y un par de puntos homólogos. Cada par de puntos homólogos está alineado con el centro y el producto de sus distancias al mismo (con sus signos) es la potencia de inversión. Si esta potencia k es positiva los pares de puntos homólogos están a un mismo lado del centro O, y todos los puntos de la circunferencia de radio $r = \sqrt{k}$ son dobles (homólogos de sí mismos en esta correspondencia), por ser $r \cdot r = k$. Si la potencia es negativa $-k'$ los puntos homólogos están a distinto lado de O y no existen elementos dobles. Sustituyendo en este caso cada uno de los puntos A' por su simétrico A'' respecto de O, se tendrá $OA \cdot OA'' = +k'$, es decir, A y A'' son homólogos en la inversión de potencia positiva $+k'$.



Toda inversión de potencia negativa $-k'$ *puede obtenerse como producto de la inversión de potencia positiva* $+k'$ *por la simetría respecto del centro.*

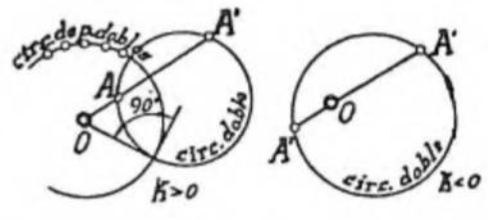
Tanto si la inversión es de potencia positiva como negativa, los puntos homólogos se corresponden doblemente, es decir, si A tiene por homólogo A', el punto A' considerado como de la primera figura tiene también por homólogo A, por definición. Al efectuar, pues, el producto de una inversión por sí misma, se vuelve a obtener la figura primitiva, lo que se expresa diciendo: *La inversión es una transformación involutiva.*

2. Figuras homólogas de sí mismas en la inversión.— Además de los puntos de la circunferencia de radio $r = \sqrt{k}$ (cuando $k > 0$) existen en toda inversión rectas y circunferencias homólogas de sí mismas sin ser dobles aisladamente sus puntos. Así, de la definición se desprende:

Las rectas que pasan por el centro son dobles. Las pares de puntos homólogos en dichas rectas forman una involución, cuyos puntos dobles son los de intersección de dicha recta en la circunferencia de puntos dobles cuando existe.

Toda circunferencia respecto de la cual el centro de inversión tenga po-

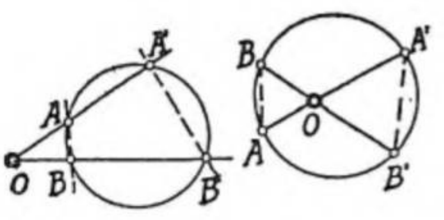
tencia k *igual a la potencia de inversión se transforma en sí misma.* En efecto, todo par de puntos A, A' de dicha circunferencia alineados con O, verifica $OA \cdot OA' = k$ y, por tanto, son homólogos en la inversión.



Corolario I.—*Toda circunferencia que pase por dos puntos homólogos en la inversión es doble.*

II.—*Cuando la potencia de inversión es positiva, todas las circunferencias ortogonales a la circunferencia de puntos dobles, son homólogas de sí mismas y recíprocamente.* Puesto que la potencia del centro respecto de ellas es $r^2 = k$.

3. Propiedades de figuras inversas.—Consideremos dos pares de puntos homólogos A, A' y B, B' no alineados. La relación métrica $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ nos dice que A, A', B, B' son concíclicos (lección 23, § 2) y también que las rectas AB y $A'B'$ son antiparalelas respecto de OA y OB (lec. 22, § 1).



Enunciaremos, pues:

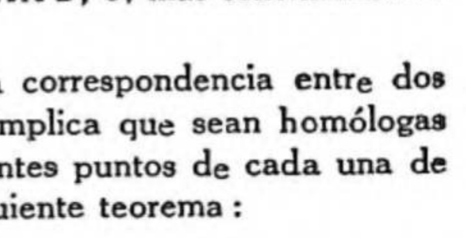
I. *Dos pares de puntos homólogos no alineados están en una circunferencia doble.*

II. *La recta que une dos puntos* AB *no alineados con el centro y la que une sus homólogos* A'B', *son antiparalelas respecto de* OA *y* OB.

Definida, pues, la inversión por el centro O y por un par de puntos homólogos A, A', el homólogo B' de otro punto B se puede hallar por intersección de la recta OB con la circunferencia que pasa por $AA'B$, o, más sencillamente, con la recta $A'B'$, antiparalela de AB.

Es conveniente recalcar al principiante que la correspondencia entre dos pares de puntos no alineados A, A' y B, B' no implica que sean homólogas las rectas AB y $A'B'$. Los homólogos de los restantes puntos de cada una de las rectas no están en la otra, como prueba el siguiente teorema:

III. *La figura inversa de una recta* r *que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por él,* y recíprocamente. *La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él.*



Sea, en efecto M el pie de la perpendicular a r por O y M' su homólogo. Consideremos otro punto P cualquiera de r y su homólogo P' Por lo que acabamos de probar, PM y $P'M'$ son antiparalelas respecto de OP y OM; luego, por ser recto el ángulo OMP también lo es el $M'P'O$, lo que indica que P' está en la circunferencia de diámetro OM'.

Recíprocamente, todo punto P' de esta circunferencia unido con M' determina un ángulo recto $OP'M'$, y el antiparalelismo de PM y $P'M'$ prueba que también OMP es recto, luego P está en la perpendicular a OM.

Por ser el diámetro de la circunferencia, que pasa por el centro de inversión, perpendicular a la recta, resulta: *La tangente a la circunferencia en el centro de inversión es paralela a la recta homóloga de dicha circunferencia.*

De lo anterior se desprende:

Dadas una recta y una circunferencia no tangentes, podemos considerarlas inversas una de otra en dos inversiones cuyos centros son los extremos del diámetro perpendicular a la recta. En el caso de ser la recta y la circunferencia tangentes serán inversas en una sola inversión, cuyo centro es el punto diametralmente opuesto al punto de contacto.

4. Circunferencias inversas.— Consideremos, finalmente, una circunferencia c que no pase por el centro de inversión O, y en ella dos puntos A y B alineados con dicho centro. Sean A' y B' sus homólogos. Se tendrá:

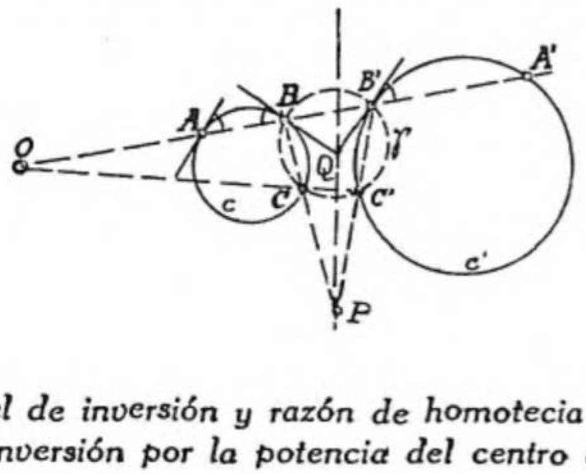
$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = k \qquad [1]$$

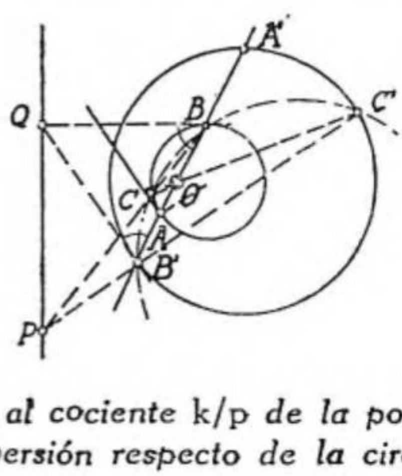
Designemos por $p = OA \,.\, OB$ la potencia de O respecto de c. Dividiendo [1] por p tendremos

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{k}{p} \qquad [2]$$

lo que prueba que A' es homólogo de B y B' homólogo de A en la homotecia de centro O y razón k/p. Como lo mismo podemos repetir para otro par de puntos alineados con O, podemos enunciar:

La figura inversa P *de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia homotética de ésta con centro de homotecia*





en el de inversión y razón de homotecia igual al cociente k/p *de la potencia de inversión por la potencia del centro de inversión respecto de la circunferencia.*

Si ambas potencias son iguales, la razón de homotecia es la unidad y la circunferencia inversa es ella misma, según se ha demostrado ya (§ 2).

Recíprocamente, de [2] resulta [1] multiplicando por p y, por tanto:

Dos circunferencias homotéticas respecto de un centro O (no situado en ellas) son también inversas entre sí respecto del mismo centro, si se hacen *corresponder los pares de puntos de cada circunferencia alineados con* O, *con los homotéticos permutados.* Los puntos así correspondientes en la inversión se suelen llamar *antihomólogos* en la homotecia.

Dos circunferencias no concéntricas ni tangentes son, pues, inversas entre sí respecto de dos centros de inversión que coinciden con los de homotecia. Si las circunferencias son tangentes, el punto de tangencia es centro de homotecia (lec. 21, § 3), pero no *de inversión* (en virtud del párrafo anterior III).

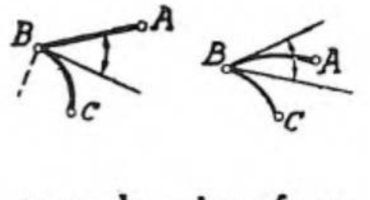
5. Propiedades de las circunferencias inversas.—I. *La recta que une un par de puntos* BC *de una circunferencia* c *que no pasa por el centro de inversión y la que une sus homólogos* C′B′ *en la circunferencia inversa,* c′, *se cortan en el eje radical de ambas circunferencias, o son paralelas a él.*

En efecto, los puntos B, C, B', C' pertenecen a una circunferencia γ doble en la inversión. Las rectas BC y $B'C'$ son los ejes radicales de γc y γc′; luego, si estas rectas se cortan, el punto P de intersección es el centro radical de c, c′ γ, y, por tanto, está en el eje radical de c y c′. Si ambas rectas son paralelas, los tres centros de γ, c y c′ están en una perpendicular común a ellas y el eje radical de c y c′ es paralelo a las mismas.

II. *Las tangentes en dos puntos homólogos* B *y* B′ *de dos circunferencias inversas forman ángulos iguales con la recta que los une y, si se cortan, el punto de intersección está en el eje radical de ambas circunferencias* (v. figura anterior).

Sean B y B' homólogos en la inversión de centro O; sea A el homólogo de B' en la homotecia de igual centro. Las tangentes a una y otra circunferencia en A y B' son paralelas y, por tanto, forman ángulos iguales con la secante común AB'. Pero la tangente en B a c forma con la cuerda AB ángulos iguales a los que forma la tangente en A; de donde $\sphericalangle QBB' = \sphericalangle BB'Q$. De aquí resulta $QB = QB'$ y, por consiguiente, Q tiene igual potencia respecto de c y de c′, es decir, pertenece al eje radical de ambas circunferencias.

6. Conservación de ángulos en la inversión.—Si un segmento AB y un arco de circunferencia BC, tienen un extremo común B, llamaremos ángulo del segmento con el arco al ángulo que forma dicho segmento con la semirrecta tangente al arco en B, situada del mismo lado que él respecto del radio. Si dos arcos AB y BC tienen un extremo común B, llamaremos ángulo de dichos arcos al que forman las semirrectas tangentes a dichos arcos en este punto.

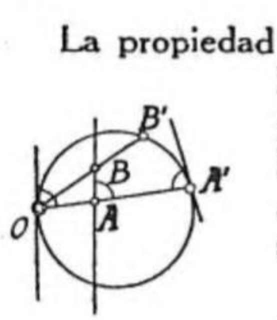


Cuando este ángulo es recto los arcos son *ortogonales* como las circunferencias (lec. 25, §2).

Los ángulos que forman dos arcos homólogos (o un segmento y un arco homólogos), AB *y* A′B′, *con el segmento* AA′ *que une los extremos homólogos, son iguales.*

Más concretamente: *El ángulo* A′AB *es igual y de opuesto sentido al* AA′B′.

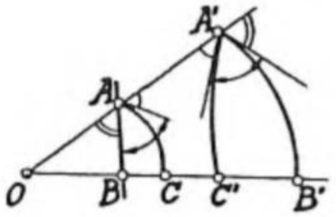
La propiedad para arcos homólogos es consecuencia del teorema anterior.



La propiedad para un segmento y un arco homólogos se desprende de la figura que forman la recta y la circunferencia homólogas, por ser iguales los ángulos que las tangentes en A' y O a dicha circunferencia forman con la cuerda OA' y ser la recta AB paralela a la tangente en O (§ 8).

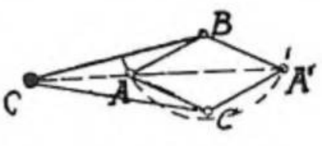
Por suma o resta de los ángulos a que se refiere la propiedad que acabamos de demostrar resulta:

El ángulo de dos segmentos o arcos concurrentes es igual al que forman sus homólogos en la inversión. Esta propiedad se expresa diciendo: *La inversión conserva los ángulos. La inversión es una transformación conforme.* (*).



Como quiera que en una inversión de potencia $\left\{\begin{array}{l}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{array}\right\}$ los segmentos homólogos de una recta doble tienen sentidos $\left\{\begin{array}{l}\text{opuestos}\\ \text{iguales}\end{array}\right\}$, correspondiéndose cada uno de los semiplanos limitados por esta recta $\left\{\begin{array}{l}\text{consigo mismo}\\ \text{con el opuesto}\end{array}\right\}$ vemos que: *La inversión invierte el sentido de los ángulos.*

7. Inversor de Peaucellier.— De la misma manera que el pantógrafo realiza mecánicamente la transformación de las figuras por homotecia, un sencillo mecanismo, ideado por Peaucellier, realiza la inversión. Consta en esencia de un rombo articulado $ABA'C$, en dos de cuyos extremos opuestos B y C se articulan a su vez dos segmentos iguales OB y OC, cuyo otro extremo O es un punto fijo del plano.



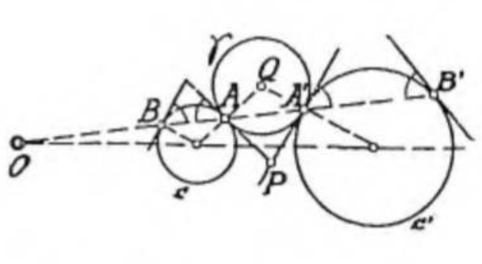
Demostremos que al describir el punto A una figura, el punto A' describe su inversa respecto del centro O, con una potencia de inversión igual a $OB^2 - BA^2$. En efecto, en toda posición del inversor los puntos A, A' y O están alineados por equidistar de B y C; además, el producto $OA \,.\, OA'$ es la potencia de O respecto de la circunferencia de centro B y radio BA, que es el valor *constante* $OB^2 - BA^2$.

Si el segmento $OB = OC$ es mayor que el lado del rombo, la inversión es de potencia positiva; en caso contrario, negativa.

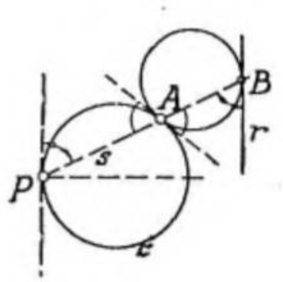
8. Rectas isogonales a dos circunferencias.—Hemos dicho (§ 5, II) que toda recta que une puntos correspondientes en dos circunferencias inversas forma ángulos iguales con las tangentes a ellas en dichos puntos, y se llama por esta razón *recta isogonal* de ambas circunferencias.

(*) No habiendo visto hasta ahora más líneas que la recta y la circunferencia, hemos circunscrito a ellas la propiedad, evitando por el momento dar el concepto general de curva y de tangente en un punto.

Recíprocamente, toda secante isogonal determina en ambas circunferencias cuatro puntos $ABA'B'$, cuyas tangentes son dos a dos paralelas. Los puntos de contacto de cada dos tangentes paralelas son puntos homólogos en una de las homotecias entre ambas circunferencias, puesto que sus radios son también paralelos. Haciendo corresponder dichos puntos permutados tendremos puntos homólogos en la inversión de igual centro. En resumen: I. *Toda recta isogonal a dos circunferencias es recta doble en una de las inversiones que las liga.* Las tangentes comunes pueden considerarse como isogonales que forman ángulo nulo, y tienen la misma propiedad.



Análogamente: II. *Toda recta* s *que forme ángulos iguales con una recta* r *y una circunferencia* c *dadas, pasa por uno de los extremos* P *del diámetro de* c *perpendicular a* r, *es decir, por el centro de una inversión que transforma* c *en* r.



Basta observar que si B es la intersección rs y A y P son los puntos de intersección de s con c, la tangente en uno de ellos P es paralela a r, por la igualdad de los ángulos de la hipótesis.

9. Circunferencias tangentes a dos.—Puesto que la recta que une puntos correspondientes A y A' de dos circunferencias inversas c y c′ forma ángulos iguales con las tangentes respectivas AP y $A'P$, también forma ángulos iguales con las normales AQ y $A'Q$, es decir, AQA' es isósceles y Q es centro de una circunferencia γ, tangente a c y c′, respectivamente, en A y A'.

Por todo par de puntos correspondientes en dos circunferencias inversas pasa una circunferencia tangente a éstas en dichos puntos. Se exceptúan los puntos de contacto de tangentes comunes. La demostración cae en defecto para los puntos situados en la recta de centros, en cuyo caso el teorema es evidente.

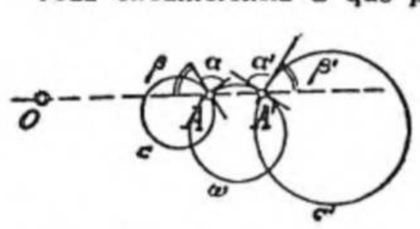
Recíprocamente: *Los puntos de contacto de toda circunferencia tangente a otras dos son puntos correspondientes en una de las inversiones que liga ambas circunferencias.* En efecto, la recta que une los puntos de contacto AA' es isogonal de ambas circunferencias por formar ángulos iguales con las tangentes AP y $A'P$. Por tanto, esta circunferencia tangente a dos homólogas es homóloga de sí misma en la inversión (§ 2, Corolario I).

Análogamente, del teorema II del párrafo anterior resulta:

Los puntos de contacto de toda circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia dadas son homólogos en una de las inversiones que transforman una en otra. De donde resulta que dicha circunferencia es homóloga de sí misma e invariante en la inversión.

10. Circunferencias isogonales a otras dos.

Toda circunferencia ω que pasa por dos puntos AA' correspondientes en circunferencias inversas, es doble en la inversión (§ 2), por consiguiente forma ángulos inversamente iguales con c y c' (§ 6) y se llama *circunferencia isogonal* de c y c'.



Recíprocamente, si ω es isogonal de c y c' podemos elegir dos puntos respectivos de intersección A y A' en los cuales dos semitangentes a arcos inmediatos en ω, c y c' formen ángulos inversamente iguales $\sphericalangle \omega c = \sphericalangle \omega c'$, es decir, $\alpha = \alpha'$ (v. fig.). Pero, por ser inversamente iguales los ángulos que la cuerda AA' forma con las tangentes a ω en sus extremos, serán también iguales inversamente los ángulos β y β' de dichas tangentes con c y c'. La recta AA' es, pues, isogonal de c y c' y, por consiguiente, A y A' son homólogos en una de las inversiones que relacionan ambas circunferencias. En résumen: *Toda circunferencia isogonal de dos circunferencias dadas es circunferencia doble en una de las inversiones que tansforman una en otra*, y recíprocamente: *toda circunferencia doble en alguna de estas inversiones es isogonal.*

Como, dadas dos circunferencias (no iguales, ni concéntricas, ni tangentes), existen dos inversiones que transforman una en otra, existen asimismo dos sistemas de circunferencias isogonales a dos dadas, uno para cada inversión. Por cada punto P del plano pasan infinitas circunferencias de cada sistema: todas las que pasan por dicho punto y su homólogo P' en la inversión. (Si el punto P es doble, todas las circunferencias tangentes en P a OP). Quedará determinada una de tales circunferencias en cada sistema dando, pues, dos puntos de ella no alineados con O. El ángulo de intersección no se supone dado. El problema es también determinado si se da el ángulo y un punto, pero puede tener varias soluciones (v. § siguiente).

Las circunferencias tangentes a dos pueden considerarse como caso particular de circunferencias isogonales que forman ángulo nulo.

11. Aplicaciones de la inversión.—La transformación por inversión permite resolver numerosos problemas geométricos de determinación de una circunferencia definida por condiciones de tangencia o por propiedades angulares, en problemas análogos relativos a una recta, eligiendo convenientemente la inversión que transforme la circunferencia deseada en recta.

EJEMPLO: *Trazar por un punto* P *una circunferencia tangente a otras dos* c_1 *y* c_2 *que no pasan por* P.

Solución.—Aplicando a c_1 y c_2 una inversión de centro P, estas circunferencias se transforman en otras (puede elegirse la inversión de modo que se conserve una de ellas, o las dos si P está en el eje radical de ambas). La circunferencia buscada se transformará en una de las rectas tangentes a las circunferencias transformadas; bastará, pues, hallar estas tangentes comunes (lección 14) y transformarlas en la inversión elegida.

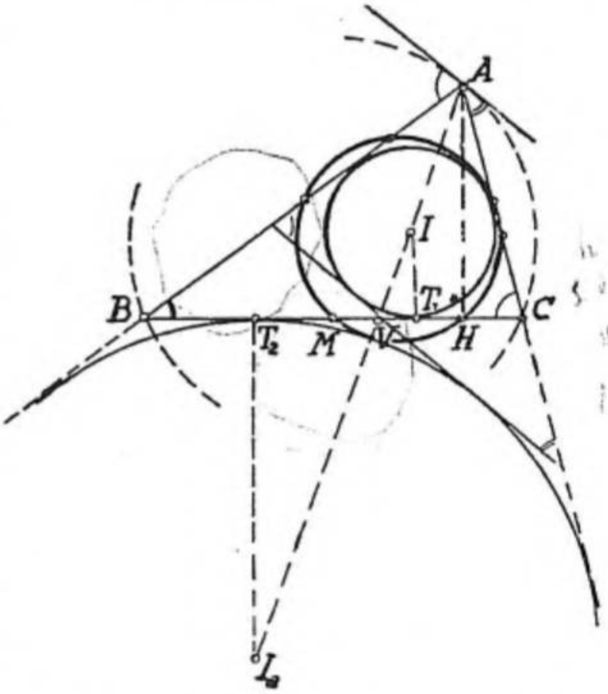
De modo análogo podemos tratar el problema: *Trazar por un punto* P *una circunferencia que forme un ángulo dado con otras dos dadas.*

En el capítulo XI, lección 35, veremos nuevos ejemplos de problemas resueltos por inversión.

Son numerosas las aplicaciones de la inversión a cuestiones de Análisis, Mecánica de flúidos, Electrotécnica, ..., en los que tiene especial interés hallar transformaciones puntuales del plano que conservan los ángulos.

La inversión se aplica, igualmente, en algunas demostraciones a las que imprime singular elegancia, como, por ejemplo, la siguiente del teorema de Feuerbach.

12. Teorema de Feuerbach.—Sea M el punto medio del lado BC de un triángulo y T_1 y T_2 los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscrita tangente a este lado. Recordando que $BT_2 = CT_1 = p - c$ resulta que M es también punto medio de T_2T_1.



Apliquemos a la circunferencia de Feuerbach la inversión de centro M y potencia $\overline{MT_1}^2 = \overline{MT_2}^2$, en la cual serán *inversas de sí mismas* (§ 2) la circunferencia inscrita y la exinscrita consideradas. Por pasar la circunferencia de Feuerbach por el centro de inversión M su homóloga será una recta paralela a la tangente en M a dicha circunferencia, o sea (lec. 21, § 4) paralela a la tangente en A a la circunferencia circunscrita y, por tanto, *antiparalela* al lado BC respecto de los lados AB y AC. Sólo resta hallar un punto de dicha recta.

Consideremos el centro V de homotecia negativa entre las dos circunferencias inscrita y exinscrita.

Obsérvese que la cuaterna I_aVIA formada por los centros de homotecia V y A y los centros I_aI es armónica (lec. 21, § 3) y se proyecta ortogonalmente según la cuaterna T_2VT_1H que es también armónica, por conservarse las razones en la proyección. Por lo tanto, $\overline{MV} \cdot \overline{MH} = \overline{MT_1}^2 = \overline{MT_2}^2$. Luego V es el homólogo de H en la referida inversión y la homóloga de la circunferencia de Feuerbach no es otra que la tangente interior a ambas circunferencias, distinta del lado BC, por ser antiparalela a dicho lado respecto de AB y AC.

Ahora bien, si una recta y una circunferencia son tangentes, sus inversas también lo serán, puesto que tendrán un punto común y uno sólo. Queda así demostrado que: *La circunferencia de Feuerbach es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las exinscritas.*

Con anterioridad a Feuerbach, distintos geómetras reconocieron la existencia de la circunferencia de los nueve puntos, entre ellos Poncelet y Brianchon.

A Feuerbach (en 1822) se debe, sin embargo, el descubrimiento de las notables propiedades de esta circunferencia, como las demostradas en lección 21, § 4, y este último teorema, uno de los más curiosos de la geometría del triángulo. La elegante demostración aquí expuesta se debe a Taylor (1875).

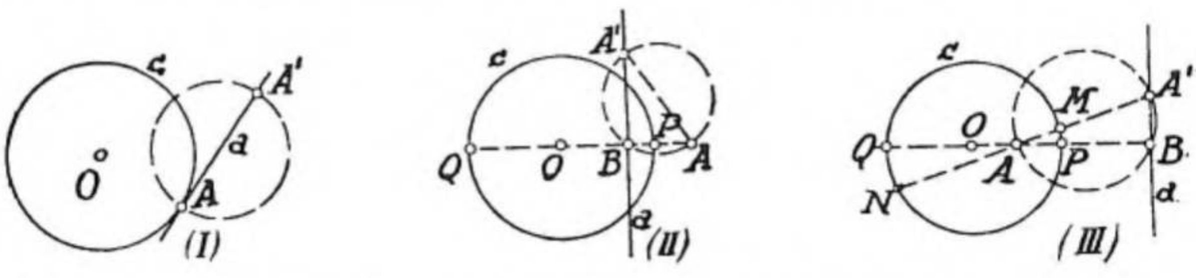
NOTA I. Si AB son dos puntos y $A'B'$ sus homólogos, demostrará el lector fácilmente que $A'B' = k \cdot AB/OA \cdot OB$ (k potencia de inversión).

NOTA II. *Deducción del teorema de Ptolomeo por inversión.*—Transformando por inversión los vértices del cuadrilátero convexo inscriptible $ABCD$ mediante una inversión de centro D se obtienen tres puntos alineados $A'B'C'$, entre los cuales se verifica evidentemente $A'C' = A'B' + B'C'$, que transformada expresando estos segmentos en función de las distancias entre los puntos homólogos (nota I) da el teorema de Ptolomeo.

LECCIÓN 27.—POLARIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA

1. Puntos conjugados respecto de una circunferencia.— Diremos que dos puntos A y A' son *conjugados* respecto de una circunferencia c cuando la circunferencia de diámetro AA' es ortogonal a c (*). En particular un punto cualquiera A de la circunferencia es conjugado con todos los de la tangente en A (fig. I).

Según esta definición y la propiedad de las circunferencias ortogonales establecida en la lección 25, § 3, si la recta AA' corta a c, los puntos M y N de intersección separan armónicamente A y A' (fig. III).



Dos puntos conjugados uno interior y otro exterior a una circunferencia están armónicamente separados por los de intersección de la recta que determinan, con la circunferencia.

2. Polar de un punto. Polo de una recta.—Llamaremos *polar* de un punto A *respecto de una circunferencia* c al *lugar geométrico de los puntos conjugados de* A *despecto de* c. En virtud de lo antes dicho:

I. *La polar de un punto de la circunferencia respecto de ella es la tangente en dicho punto.* Demostremos además que:

II. *La polar de un punto* A *no perteneciente a la circunferencia y distinto del centro, es una recta perpendicular a la que une* A *con el centro* O.

En efecto, sea B el punto armónicamente separado de A por los extremos P, Q del diámetro situado en la recta OA (figs. II y III). El punto B pertenece al lugar en virtud de lección 25, § 3. Por tanto, todo otro punto A' de la perpendicular BA' a la recta OA por B es también conjugado del A, puesto que la circunferencia de diámetro AA' pasa por B y, por tanto, es también ortogonal a c (lec. 25, § 3).

Recíprocamente: Si A' es conjugado de A, la circunferencia de diámetro AA' (ortogonal a c) cortará a OA en el punto B armónicamente separado del A por los P y Q; y como el ángulo $A'BA$ es recto, A' pertenece a la perpendicular BA' a OA por el punto B.

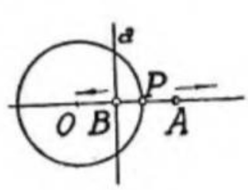
De lo anterior se desprende esta otra definición de polar:

(*) Adoptamos esta definición que hemos visto en *Deltheil, Caire:* «Géométrie», por la generalidad y sencillez de las deducciones a que conduce.

La polar de un punto A no perteneciente a la circunferencia es la recta que contiene todos los puntos armónicamente separados de A por los de intersección de las distintas secantes trazadas por A (*).

Para trazar la polar a de un punto A respecto de una circunferencia c que no pasa por él, bastará, pues, hallar el punto B armónicamente separado del A por los de intersección de c con la recta que une A con el centro y trazar por él la perpendicular a dicha recta. Si el punto es *interior* la polar será *exterior;* si el punto es exterior la polar será *secante*.

Recíprocamente : Si a es polar de A, este punto se llama *polo* de la recta a, y de lo anterior se desprende fácilmente que *a cada recta del plano corresponde un polo y uno solo* de inmediata construcción. Si la recta es tangente, el polo es el punto de contacto. Obsérvese que al acercarse una recta a al centro, su polo A se aleja de él, pues si OB es la distancia de O a la recta, por la propiedad (lec. 25, § 1) de la cuaterna armónica, deberá tenerse



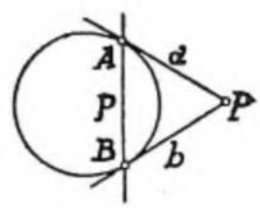
$$\overline{OB} \cdot \overline{OA} = \overline{OP}^2 \qquad OA = \frac{r^2}{OB}$$

Si la medida de OB tiende a cero, la de OA tiende a infinito. Convendremos en decir : *El polo de una recta diametral es el punto del infinito de la recta perpendicular.* (Más adelante justificaremos mejor este convenio.)

3. Polaridad recíproca.—La definición de puntos conjugados es recíproca : es decir, si A es conjugado de A', este punto lo es de A. De otro modo, si A' está en la polar de A, también A está en la polar de A'.

Si un punto está en una recta, su polar pasa por el polo de esta recta.

En particular : *La polar de un punto exterior a una circunferencia pasa por los puntos de contacto de las tangentes a ella trazadas por el punto.* Puesto que dichos puntos son los polos de las referidas tangentes.



4. Transformación por polares recíprocas.—Dada una circunferencia los teoremas y consideraciones anteriores permiten establecer una correspondencia biunívoca entre *los puntos y las rectas* de su plano, haciendo corresponder a cada punto A (distinto de O) su polar a y a cada recta su polo.

Esta correspondencia, llamada *polaridad* o *sistema polar* respecto de la circunferencia tiene, según se ha visto, la siguiente propiedad fundamental :

Si varios puntos «están en» *una recta* r, *sus polares* «pasan por» *el punto* R *polo de* r ; y recíprocamente : *A rectas* «concurrentes» *en un punto R corresponden polos* «alineados» *en la polar* r.

Con objeto de completar la correspondencia aun para el centro O y hacer que la propiedad establecida sea completamente general, convendremos en

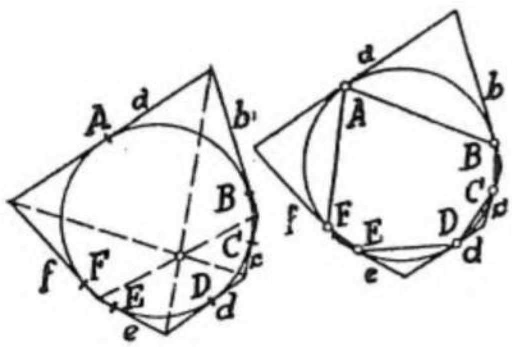
(*) Obsérvese que la definición habitual de polar como «lugar geométrico» de estos puntos no se verifica más que cuando A es interior, pues si A es exterior este lugar es sólo el *segmento* de polar interior.

considerar como polar del centro O *una hipotética recta impropia* (*o del infinito*) y ésta como *lugar de los puntos impropios del infinito* de las distintas rectas del plano.

Hasta aquí las transformaciones estudiadas entre figuras planas se han obtenido estableciendo correspondencias biunívocas entre sus puntos (movimientos, homotecias, semejanzas, inversión, ...) y en particular los movimientos y semejanzas (no la inversión) son transformaciones *lineales*, es decir, en las que a puntos alineados corresponden puntos también alineados.

La correspondencia anterior permite transformar también figuras planas sustituyendo *puntos* (polos) por *rectas* (polares) y recíprocamente, de tal modo que a *puntos alineados corresponden rectas concurrentes;* es decir, a varios elementos (puntos, rectas) ligados por las relaciones *de incidencia* «estar en» o «pasar por» corresponden elementos homólogos (rectas, puntos) ligados por la relación correlativa «pasar por», «estar en».

Esta notable correspondencia permite deducir de toda propiedad de una figura *relativa a relaciones de posición* otra correlativa en la figura transformada que se llama *figura polar recíproca* de la primera.

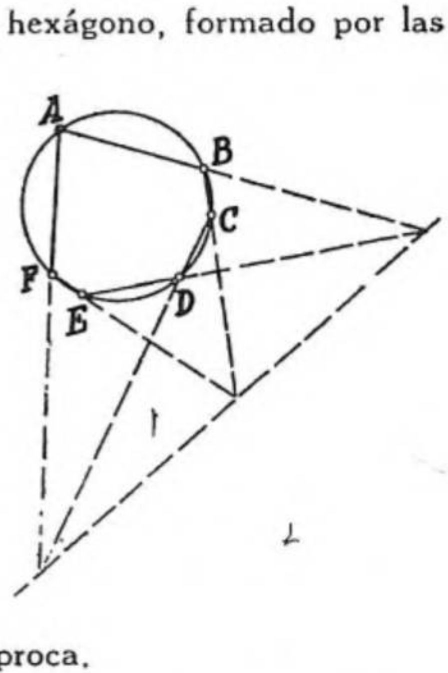


Uno de los ejemplos clásicos más sencillos lo constituyen los llamados teoremas de Pascal y de Brianchon, que demostraremos en el 2.° tomo.

Dice, por ejemplo, el teorema de Brianchon que

Las tres rectas que unen los pares de vértices opuestos de un hexágono circunscrito a una circunferencia concurren en un punto.

Si hallamos la figura polar recíproca de dicho hexágono, formado por las tangentes *a, b, c, d, e, f* y sus puntos de intersección, respecto de la circunferencia obtendremos el hexágono cuyos vértices son los puntos de contacto respectivos *A, B, C, D, E, F* y cuyos lados son los segmentos que los unen. Pues bien, en esta figura a los vértices opuestos (*ab*) y (*de*) del primer hexágono corresponden los lados opuestos *AB* y *DE* del hexágono inscrito y el teorema de Brianchon se traduce en el de Pascal:



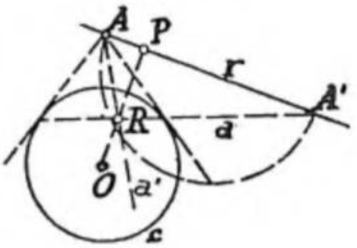
Los tres puntos de intersección de los pares de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia se cortan en puntos alineados.

Demostrado uno de los teoremas, queda demostrado el otro pasando a la figura polar recíproca.

Para admitir en toda su generalidad estos teoremas es preciso establecer ciertos convenios sobre puntos impropios o del infinito, lo que será hecho en el tomo II.

5. Involución de puntos conjugados en una recta.— Sea c una circunferencia y r una recta, no tangente, de su plano. Hagamos corresponder a todo punto A de ella su conjugado A' intersección de r con la polar a de A.

La circunferencia de diámetros AA' pertenece al haz ortogonal del haz definido por el eje r y la circunferencia c (lec. 25, § 5). Por lo tanto (lec. 25, § 7), los puntos A y A' intersección de r con las circunferencias de este haz se corresponden en una involución cuyo centro P es la intersección de r con la perpendicular por O. En resumen:



Los pares de puntos conjugados respecto de una circunferencia c *situados en una recta* r *de su plano, no tangente, forman una involución. Esta involución es común a todas las circunferencias del haz definido por* c *y* r. *El centro de la misma es el pie de la perpendicular bajada del centro de* c *a* r.

Los puntos *dobles* de esta involución (homólogos de sí mismos), si existen, son los de intersección de r y c, puesto que por ellos pasan sus polares (tangentes) respectivas.

Si la recta es tangente, no hay tal involución, puesto que todo punto de ella tiene por conjugado el de contacto.

6. Involución en el eje radical de dos circunferencias.—De lo que acabamos de demostrar resulta que: *En el eje radical de todo par de circunferencias no tangentes, existe una involución de puntos conjugados común a ambas.* Recíprocamente:

Si una recta r *es base de una involución de puntos conjugados común a dos circunferencias* c_1 *y* c_2 *no tangentes, esta recta es el eje radical de ambas.*

En efecto, toda circunferencia que tenga por diámetro el segmento definido por dos puntos conjugados AA' será, por hipótesis, ortogonal a c_1 y c_2 y, por tanto, pertenece al haz ortogonal al que definen c_1 y c_2; luego la recta r es el eje radical de c_1 y c_2 (Lec. 25, §5).

7. Rectas conjugadas. Triángulo autopolar.— Si proyectamos dos puntos conjugados A y A' (no alineados con el centro de una circunferencia) desde el polo R de la recta r que los contiene, obtenemos las polares a y a', cada una de las cuales pasa por el polo de la otra y que se llaman asimismo *rectas conjugadas* respecto de la circunferencia.

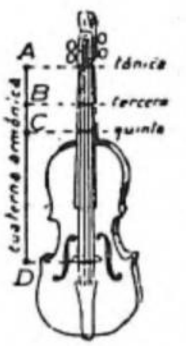
Por razones que justificaremos más adelante, se dice también que los pares de rectas conjugadas aa' que pasan por un punto, forman una *involución*.

Los tres puntos R, A y A' definen un triángulo en el cual cada una de las rectas r, a y a' que contienen los lados es *polar del vértice opuesto*, y se llama *triángulo autopolar*.

NOTAS Y EJERCICIOS (referentes a todo el Capítulo VIII)

1. Dos circunferencias de diámetros alineados AB y CD cuyos extremos se separan armónicamente, se cortan en M. ¿Cuánto valen los ángulos AMC, CMB y BMD?

2. Los armónicos sucesivos de un sonido fundamental, por ejemplo *do*, son: *do*, *do* (oct.ª), *sol*, *do* (2.ª oct.ª), *mi*, *sol*, *si*, *do* (3.ª oct.ª), ..., cuyos números de vibraciones son proporcionales a 1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... Como cada número es la media aritmética del anterior y del siguiente, su recíproco será media armónica entre los recíprocos de éstos y, por tanto, las longitudes de las cuerdas que vibran emitiendo dichos armónicos variarán de acuerdo con esta ley: *cada longitud es media armónica entre la anterior y la siguiente.*



Así, por ejemplo, los extremos de una cuerda libre de violín, viola, cello, y los puntos donde hay que apoyar el dedo para emitir la tercera y la quinta de su sonido forman una cuaterna armónica (do-mi-sol, sol-si-re, ...).

3. Demostrar geométricamente que: *La media geométrica de dos segmentos es también media geométrica entre la media aritmética y la media armónica de ellos.*

4. Trazar una circunferencia que sea tangente a una recta dada, en un punto dado, y que forme un ángulo dado con otra circunferencia dada.

5. Demostrar que en toda inversión de centro O y de potencia negativa $k=-r^2$ todas las circunferencias del haz que pasa por dos puntos homólogos A, A' cualesquiera, bisecan la circunferencia de centro O y radio r. Enunciar y demostrar el recíproco.

6. Trazar una circunferencia por dos puntos dados que biseque una circunferencia dada (Aplíquese lo anterior.)

7. Demostrar que dos figuras inversas de una tercera respecto de un mismo centro, son homotéticas entre sí, y expresar la razón de homotecia en función de las potencias de inversión.

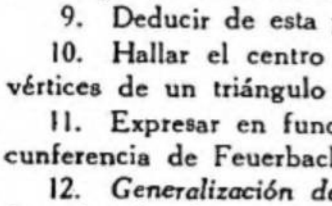
8. Atribuyendo un signo a los ángulos según su sentido, demostrar que si $A'B'C'$ son homólogos de ABC en una inversión, se verifica $\sphericalangle ABC + \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle AOC$

9. Deducir de esta propiedad cuál es la figura inversa de una circunferencia.

10. Hallar el centro de inversión que transforma tres puntos dados no alineados en los vértices de un triángulo equilátero (no prefijado).

11. Expresar en función de los lados de un triángulo las distancias del centro de la circunferencia de Feuerbach al incentro y a los exincentros.

12. *Generalización del teorema de Simson.*—Demostrar que: Los pies de las perpendiculares bajadas de un punto O a los lados de un triángulo ABC forman una figura semejante a la terna $A'B'C'$ de los puntos inversos de ABC en toda inversión de centro O. Deducir como corolario el teorema de Simson.



13. *Inversor de Hart.*—Construyamos un *cuadrilátero articulado* $ADBC$ formado por los lados iguales AD, BC de un trapecio isósceles $ABCD$ y por las diagonales AC y DB del mismo. Una paralela a la base AB corta en O a AD, en M y M' a dichas diagonales. Demostrar que si se fija O en el plano, al recorrer M una figura M' recorre una figura inversa respecto del centro O. Hallar la potencia de inversión.

14. Demostrar que la polar de un punto A respecto de una circunferencia de centro O y radio r es una figura inversa de la circunferencia de diámetro OA respecto del centro O y potencia r^2.

15. Trazar una circunferencia dado un punto de ella, otro punto fuera de ella y su polar.

16. *Teorema de Salmon.*—La razón de distancias de dos puntos cualesquiera del plano al centro de una circunferencia es igual a la que existe entre las distancias de cada uno de estos puntos a la polar del otro. Demostración.

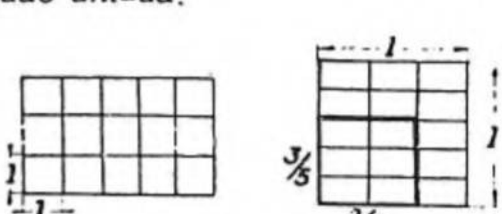
17. ¿Cuál es la figura polar recíproca de un polígono semirregular equiángulo (equilátero) respecto de la circunferencia circunscrita (inscrita)?

Capítulo IX.—EQUIVALENCIA Y AREAS

Lección 28.—Las áreas de los polígonos

1. Crítica del cálculo elemental de áreas.—El sistema métrico adopta como unidad de área la de un *cuadrado de lado unidad*.

Un rectángulo de lados de medida entera contiene tantos cuadrados unidad como indica el producto de sus dos dimensiones.

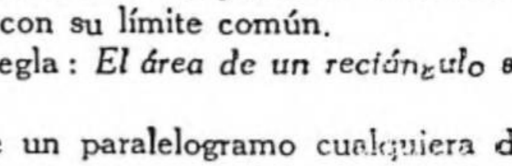


Si las medidas son fraccionarias, por ejemplo 3/5 y 2/3, el rectángulo contiene 3 . 2=6 restángulos de medidas 1/5 y 1/3, mientras el cuadrado unidad contiene 5 . 3=15 de ellos. Luego el rectángulo dado contiene seis quinceavas partes de la unidad, número que es el producto $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3}$ de sus dos dimensiones.

Si las medidas son irracionales, el rectángulo está constantemente comprendido entre los rectángulos de medidas racionales por exceso y por defecto que definen aquéllas. Su área debe estar asimismo comprendida constantemente entre ambos productos, coincidiendo con su límite común.

Estas consideraciones se traducen en la regla: *El área de un rectángulo se obtiene multiplicando sus dos dimensiones.*

Del área del rectángulo se pasa a la de un paralelogramo cualquiera de iguales base y altura, por adición y sustracción de un triángulo rectángulo, como indica la figura. La igualdad de las áreas así obtenidas justifica la regla: *El área de un paralelogramo se obtiene* también *multiplicando las medidas de la base y de la altura.*



Como todo triángulo completa con otro simétrico un paralelogramó de igual base y altura, resulta:

El área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

Finalmente: *Para obtener el área de un polígono, se descompone éste en triángulos y se suman las áreas de éstos.*

Tal es el procedimiento tradicional que se sigue en las Geometrías elementales para el cálculo de las áreas de figuras poligonales.

Ahora bien, obsérvese que en todo ese proceso se recurre a la descomposición de polígonos en *suma de otros* y se admiten tácitamente dos hechos fundamentales: *Elegido un polígono unidad*:

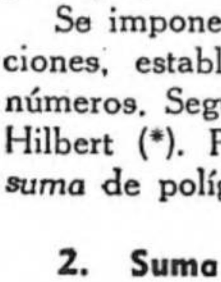
I. *A cada polígono o a polígonos iguales corresponde un número y sólo uno, que llamamos área.*

II. *Si un polígono es suma de dos, su área es también suma de las áreas de estos dos. A polígono mayor, corresponde área mayor.*

Ahora bien, estas proposiciones no son evidentes por sí, ni consecuencia inmediata de los axiomas establecidos. Medítese, por ejemplo, esta pregunta: «Cualquiera que sea el sistema de división de un polígono en triángulos, ¿por qué se obtiene siempre el mismo número al sumar las áreas de éstos?» y se comprenderá que su pretendida evidencia no es más que una petición de principio.

Se impone, pues, la necesidad de demostrar rigurosamente estas proposiciones, estableciendo cuidadosamente la correspondencia entre polígonos y números. Seguiremos, para ello, en líneas generales, el camino indicado por Hilbert (*). Pero antes comenzaremos por definir lo que se entiende por *suma* de polígonos.

2. Suma de polígonos.—Decimos que un polígono P es *suma* de otros varios Q, R, S o que se *descompone* en éstos, cuando P está formado por todos los puntos de Q, R, S sin que éstos tengan entre sí más puntos comunes que puntos de sus contornos. Estos puntos no se consideran repetidos en P. Esta suma tiene por definición los caracteres asociativo y conmutativo.



Escribiremos $P=Q+R+S$

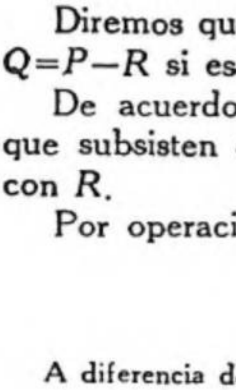
Diremos que un polígono Q es diferencia de otros dos P, R y escribiremos $Q=P-R$ si es $Q+R=P$.

De acuerdo con lo dicho, al restar el polígono R del P se sobrentiende que subsisten como pertenecientes a Q los puntos de su contorno comunes con R.

Por operaciones sucesivas se define una suma algebraica

$$P=Q-R+S-T-U$$

A diferencia de la suma de segmentos, la suma de dos polígonos no es, pues, un polígono único, sino que pueden existir infinitos polígonos suma de dos según la posición en que se yuxtaponen y aún *puede no existir polígono suma* por no ser posible yuxtaponer los sumandos. Tal ocurre, por ejemplo, con el recinto limitado por un pentágono regular estrellado y un decágono regular convexo de lado igual o mayor que la distancia ente dos vértices próximos del pentágono. (Se demuestra fácilmente.)

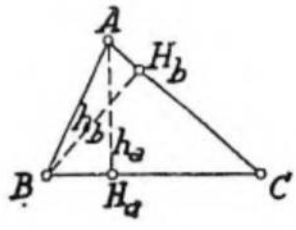


El símbolo $P+Q$ carece, pues, *por sí sólo* de significado; sólo adquiere sentido completo la igualdad $P+Q=R$.

Análogamente, $P-Q$ sólo tiene sentido si existe un polígono R tal que $P=Q+R$.

(*) Con la variante del concepto «producto de segmentos», que para *Hilbert* es otro segmento y en nuestra exposición es un *número*, y con alguna simplificación en las demostraciones.

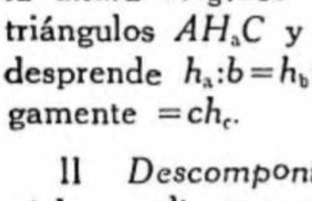
3. Teoría de las magnitudes poligonales.—ÁREA DEL TRIÁNGULO.—Elegida una unidad lineal de medida, hagamos corresponder a cada triángulo un número obtenido *multiplicando las medidas de un lado y su correspondiente altura y dividiendo por 2 el resultado*. Llamemos a este número *área* del triángulo y convengamos en asignarle el signo + si recorremos el contorno del triángulo en sentido positivo ABC y el signo − si lo hacemos en sentido negativo ACB. Designando el área del triángulo ABC con el símbolo $[ABC]$, convenimos, pues, en que $[ACB] = -[ABC]$. Si ABC están alineados, convendremos en poner $[ABC] = 0$. Demostremos ahora:



I. *El área del triángulo es independiente del lado y la altura elegidos* En efecto, de la semejanza de los triángulos AH_aC y BH_bC (con el ángulo común C) se desprende $h_a:b = h_b:a$: de donde $a\ h_a = b\ h_b$ y análogamente $= ch_c$.

II *Descomponiendo un triángulo en triángulos parciales mediante segmentos concurrentes en un vértice* A, *la suma de las áreas de estos triángulos recorridos en sentido positivo es igual al área de aquél recorrida en igual sentido.*

$$[ABM] + [AMN] + [ANC] = [ABC]$$

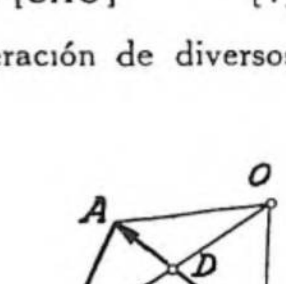


En efecto, tomando como altura común de estos triángulos h_a, ésta podrá sacarse factor común de la suma de las bases $BM + MN + NC = a$.

III *Si* O *en un punto del plano de* ABC *se verifica*

$$[ABC] = [ABO] + [BCO] + [CAO] \qquad [1]$$

La demostración geométrica completa exige la consideración de diversos casos según las posiciones de O respecto de los lados del triángulo. Por brevedad demostraremos sólo la propiedad para el caso O exterior al triángulo, pero interior a uno de sus ángulos (v. fig.). (Los restantes casos los demostrará el lector con igual facilidad.)



Por II se tiene

$$[BCD] + [DCO] = [BCO]$$
$$[BDA] + [ADO] = [ABO]$$

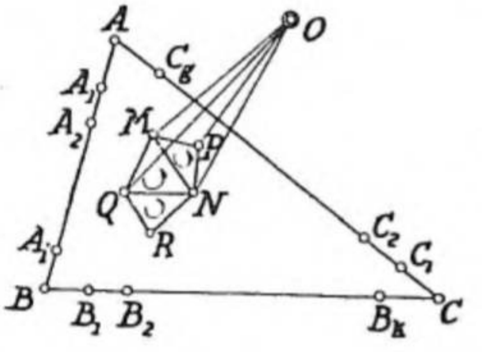
Sumando término a término los dos primeros miembros resulta

$$[ABC] + [ACO] = [BCO] + [ABO]$$

Pero $[ACO] = -[CAO]$ y transponiendo este término resulta [1].

IV. *Si se descompone de cualquier modo un triángulo en triángulos parciales, la suma de las áreas de éstos en sentido positivo es igual al área del triángulo total, recorrida en igual sentido.*

En efecto, sean MNP y MNQ dos triángulos contiguos en tal descomposición, con el lado común MN. Elegido un punto O del plano, expresemos cada una de sus áreas mediante las de los triángulos determinados con O. Se tendrá



$$[MNP] = [MNO] + [NPO] + [PMO]$$
$$[MQN] = [MQO] + [QNO] + [NMO]$$

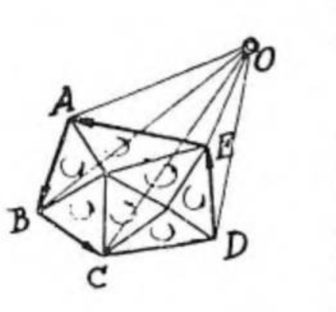
Al sumar, se anulan los términos de opuesto signo $[MNO]$ y $[NMO]$, es decir, *desaparece de la suma el área del triángulo definido por* O *y el lado común* MN (*). Al sumar ahora el área de otro triángulo contiguo

$$[QRN] = [QRO] + [RNO] + [NQO]$$

se destruirán análogamente en la suma $[QNO]$ y $[NQO]$, es decir, desaparecerá el triángulo definido por O y el nuevo lado común QN. Reiterando el proceso hasta sumar las áreas de *todos* los triángulos interiores desaparecerán en definitiva las áreas de todos los triángulos determinados por O y los segmentos de la red triangular interiores al triángulo dado ABC y sólo quedarán las sumas de los triángulos definidos por O y por los vértices de la red situados en los lados de dicho triángulo $A_1A_2, \dots, B_1B_2, \dots,$ es decir (v. fig.),

$$\begin{aligned} \text{Suma de triángulos parciales} \quad &= [AA_1O] + [A_1A_2O] + \dots + [A_iBO] \\ &+ [BB_1O] + [B_1B_2O] + \dots + [B_kCO] \\ &+ [CC_1O] + [C_1C_2O] + \dots + [C_gAO] \\ \text{y aplicando II y III} \quad &= [ABO] + [BCO] + [CAO] = [ABC] \end{aligned}$$

ÁREA DE UN POLÍGONO SIMPLE CUALQUIERA.—*Si se descompone un polígono simple en triángulos, la suma de las áreas de éstos, orientados en sentido positivo, es un número independiente de la forma de descomposición, y se llama* ÁREA DEL POLÍGONO (**).



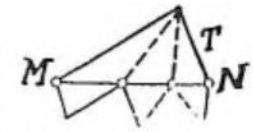
Para demostrarlo, no tenemos más que elegir un punto O del plano y repetir el razonamiento anterior. La suma de las áreas en cuestión será igual a la suma algebraica de los triángulos orientados que resultan de proyectar desde O los segmentos orientados del *contorno* del polígono. En la figura será esta suma

$$[ABO] + [BCO] + [CDO] + [DEO] + [EAO] \qquad [1]$$

De lo que resulta que es independiente del modo de división parcial en triángulos.

Pero si fijamos un modo de división y variamos el punto O, por ser la suma [1] igual a la de las áreas de los triángulos interiores, *será asimismo independiente del punto* O *elegido*. De modo que

(*) Si un lado MN de un triángulo T fuese común a varios otros, dividiríamos previamente T en triángulos parciales uniendo el vértice opuesto con los vértices de los triángulos contiguos situados entre M y N, lo cual no altera la suma, por II.



(**) Acerca de la posibilidad de esta descomposición, v. Nota al final de la lección

El área de un polígono simple de contorno ABCDE recorrido en sentido positivo es igual a la suma algebraica de las áreas de los triángulos ABO, BCO, ..., definidos por dichos lados y un punto O cualquiera del plano, con el signo que en ellos determinan el sentido de los referidos lados. Esta suma es independiente de O.

De la definición anterior resulta: *Polígonos congruentes tienen la misma área.*

ESCOLIO.—Suponiendo, en adelante, todos los polígonos orientados positivamente (*), hemos hecho así corresponder *a cada polígono y a todos sus congruentes un número único* llamado *área*, que tiene además la propiedad esencial:

Si un polígono es suma de dos, su área es suma de las áreas correspondientes a estos dos.

En efecto, descompuesto cada uno en triángulos, la suma de las áreas de éstos dan separadamente el área de cada polígono y en conjunto el área del polígona suma.

Si convenimos además en que un polígono positivo P es mayor que otro R cuando $P=R+S$ (positivo), resulta de lo dicho:

A polígono mayor corresponde área mayor.

Esta correspondencia entre números y polígonos es, pues, tal que a polígonos iguales corresponden áreas iguales; a polígonos ordenados (de mayor a menor) corresponden áreas ordenadas, y a un polígono suma de dos corresponde un área suma de las correspondientes a estos dos.

Hemos establecido así directamente la *medida de las magnitudes poligonales*. (V lec. 18, § 4.)

Sólo nos queda ya volver a la vía elemental para traducir esta medida en reglas prácticas.

4 Area del paralelogramo.— Puesto que todo paralelogramo se descompone, por una diagonal, en dos triángulos iguales de igual base y altura que la del paralelogramo, resulta:

El área del paralelogramo es igual al producto de las medidas de un lado y de su altura correspondiente. En particular: *El área del cuadrado es igual al cuadrado de la medida del lado. El área del cuadrado de lado unidad vale* UNO Lo que concuerda con el convenio del sistema métrico.

NOTA.—Toda la teoría de áreas aquí establecida subsistiría íntegramente si hubiésemos adoptado como definición del área del triángulo el producto de su base por su altura o este producto afectado de un coeficiente constante k cualquiera, ya que el valor de ésta no influiría en los razonamientos. Esta constante k quedará determinada en cuanto demos un valor convencional al

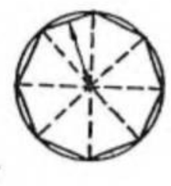
(*) En Geometría elemental interesan solamente las áreas *absolutas*; en cambio en las aplicaciones (Estática gráfica, Termodinámica, Electrotecnia, ...) tiene extrordinario interés la consideración de signo, por eso no hemos dudado en introducirlo ya aquí, aun cuando se prescinda de él en adelante.

área de una figura conocida, y éste es precisamente el convenio admitido en el sistema métrico de considerar como *unidad* de área el área del cuadrado de lado unidad, lo que exige $k=\frac{1}{2}$.

5. Area del trapecio.—Descomponiéndolo, asimismo, en triángulos por una diagonal y sacando factor común la altura, se obtiene fácilmente:

El área del trapecio es igual al producto de las medidas de la semisuma de sus bases por su altura.

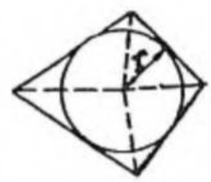
6. Area de un polígono.— I. *Si el polígono es regular,* lo más sencillo es descomponerlo en triángulos con vértice común en el centro. Tomando como bases de estos triángulos los lados, su altura común es la apotema y resulta:



El área del polígono regular es igual a la medida del semiperímetro por la apotema.

II. Más general, cuando se trate de un *polígono circunscriptible,* la descomposición en triángulos con vértice común en el centro de la circunferencia proporciona regla análoga a la del polígono regular:

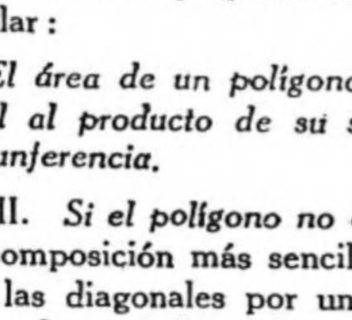
El área de un polígono circunscrito a una circunferencia es igual al producto de su semiperímetro por el radio de dicha circunferencia.



III. *Si el polígono no es circunscriptible pero es convexo,* la descomposición más sencilla en triángulos se logra trazando todas las diagonales por un vértice, y el área de cada triángulo se calculará tomando un lado cualquiera como base.

Pero el método más recomendable en la práctica es la descomposición en trapecios y triángulos por una diagonal y las perpendiculares a ellas trazadas por los vértices, como indica la figura.

EJEMPLO.—Con las medidas de los segmentos de la figura, indicadas en el cuadro, dispondremos el cálculo así:



Bases	Semisuma	Altura	Productos
0			
$g=15$	7,5	$a=4,5$	33,7
$j=10$	12,5	$b=21$	262,5
0	5	$c=8$	40
0			
$i=13$	6,5	$d=7$	45,5
$h=16,4$	14,7	$e=13$	191,1
0	8,2	$f=14$	114,8
	TOTAL.....		687,6 mm²

7. Otras expresiones del área del triángulo. Fórmula de Heron.— Todo triángulo es circunscriptible. Recordando (lec. 24, § 8) la expresión del radio del círculo inscrito y aplicando lo anterior, resulta el área del triángulo en función de los lados

$$\boxed{\text{Area del triángulo} = p\,\rho = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

donde a, b y c representan las medidas de los lados y p la del semiperímetro $\frac{1}{2}(a+b+c)$. Al mismo resultado se llega sustituyendo en $\frac{1}{2}a \cdot h_a$ la altura h_a por su valor en función de los lados, hallado en lección 24, § 9.

Esta es la fórmula descubierta por Heron de Alejandría en el siglo III de nuestra Era.

Proyectados los lados del triángulo, orientados positivamente, desde cada uno de los exincentros y aplicando lo dicho en § 3, III, obtendríamos análogamente

$$[ABC] = \frac{1}{2}\,\rho_a(b+c-a) = \rho_a(p-a) = \rho_b(p-b) = \rho_c(p-c) = \rho\,p$$

de donde

$$[ABC]^4 = \rho_a\,\rho_b\,\rho_c\,\rho\,[ABC]^2 \quad \text{es decir} \quad \boxed{[ABC]^2 = \rho\,\rho_a\,\rho_b\,\rho_c}$$

Por último, recordando la expresión del radio del círculo circunscrito

$$r = \frac{ab}{2h_c} \quad \text{de donde} \quad h_c = \frac{ab}{2\,r}$$

resulta también, sustituyendo en $\frac{1}{2}\,h_c\,c$,

$$\boxed{[ABC] = \frac{abc}{4\,r}}$$

8. Areas de polígonos semejantes.—Sean a y h base y altura de un triángulo, y sean a' y h' la base y altura homólogas en un triángulo semejante. Llamando r a la razón de semejanza, se tendrá

$$r = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

De donde la razón entre las áreas valdrá

$$\frac{a\;h}{a'\;h'} = r^2$$

La razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza

Descomponiendo dos polígonos semejantes en triángulos semejantes, la razón entre las áreas de cada uno de éstos será igualmente el cuadrado de la razón común de semejanza. Por tanto ésta será también la razón entre las sumas respectivas; de donde:

La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

9. Cambio de unidad lineal.— Si variamos la unidad de longitud u sustituyéndola por otra $u'=ku$, las nuevas medidas de longitud serán (lec. 18, § 8) las anteriores multiplicadas por $1/k$; de donde:

La razón entre las áreas de un mismo polígono medidas con unidades diferentes es el cuadrado de la razón inversa entre las unidades lineales.

EJEMPLO.—Una pulgada inglesa $=2{,}54$ cm.
Area en pulgadas $=$ Area en cm. : $2{,}54^2$.

NOTA

DESCOMPONIBILIDAD DE UN POLÍGONO EN TRIÁNGULOS

Hemos fundado la noción de área de un polígono cualquiea en su descomponibilidad en triángulos. Tanto si el polígono es convexo como si no lo es, ello resulta de la existencia en todo polígono de *una diagonal interior*, lo que se demostró (lección 3.ª) al demostrar el teorema de Jordan. Esta diagonal divide al polígono en dos de menor número de lados, cada uno de los cuales tiene a su vez una diagonal interior. Reiterando el proceso podemos llegar a la descomposición en triángulos deseada.

EJERCICIOS

1. Expresar el área de un rombo y de un romboide en función de sus diagonales.

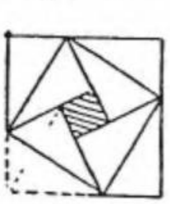
2. Construir un rombo de perímetro y área dados.

3. Una paralela a un lado de un triángulo divide los otros dos lados en la razón $m:n$ ¿Cuál es la razón entre las áreas del triángulo y del trapecio en que queda dividido?

4. Dividir un triángulo en dos de igual área mediante una recta que pase por un punto prefijado en su contorno.

5. Expresar el área de un cuadrilátero en función de sus lados y una diagonal.

6. Demostrar que el área de un trapecio es igual al producto de uno de sus lados no básicos por la distancia de su recta al punto medio del otro; y también al producto de la distancia entre los puntos medios de sus diagonales por la que existe entre la paralela media y el punto en que se cortan las prolongaciones de los lados.



7. Un solar en forma de trapecio tiene su base mayor de fachada. Dividirlo en dos de igual área y de igual fachada. Idem si las fachadas han de estar en la razón $m:n$ y las áreas en la razón $p:q$.

8. Doblar las puntas de un cuadrado en la forma que indica la figura, de tal modo que el cuadrado que queda en el centro tenga por área $1/n$ del área del cuadrado primero.

LECCIÓN 29.—EQUIVALENCIAS DE POLÍGONOS

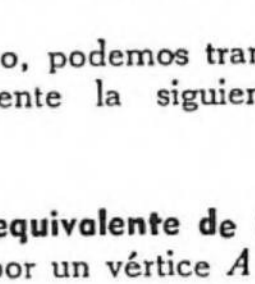
1. Cuadratura de polígonos.—Llamaremos polígonos «*numéricamente equivalentes*» a los que tienen igual área absoluta. Esta igualdad subsiste al variar de unidad (lec. anterior, § 9) y, por tanto, la equivalencia es una relación *intrínseca*, independiente de la unidad elegida.

En multitud de problemas interesa saber transformar ciertos polígonos en otros equivalentes de forma dada, y, en particular, es de interés el problema llamado de la *cuadratura de un polígono*, a saber: *Hallar un cuadrado equivalente a un polígono dado.*

Siempre que el área de una figura venga expresada por el producto de las medidas de dos segmentos, el lado del cuadrado equivalente es el segmento medio proporcional entre ellos. Así, si el polígono es regular, para hallar el lado del cuadrado equivalente bastará hallar la media geométrica l entre el semiperímetro p y la apotema a del polígono, puesto que la ecuación $l^2 = a \cdot p$ expresa la igualdad de las áreas del cuadrado y del polígono. Si el polígono es triángulo, hallaremos análogamente la media geométrica entre un lado y la mitad de la altura correspondiente.

Si el polígono no es regular ni triángulo, pero es convexo, podemos transformarlo en triángulo equivalente aplicando reiteradamente la siguiente construcción:

2. Transformación de un polígono convexo en otro equivalente de un lado menos.—Sea $ABCDEF$ el polígono dado. Tracemos por un vértice A la paralela a la diagonal que une los dos vértices inmediatos B y F, hasta cortar en G a la recta que contiene el lado FE contiguo a AF.

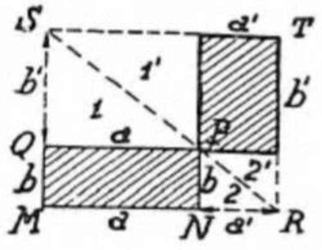


Los triángulos AFB y GFB de base común FB tienen igual altura respecto de dicha base, por ser AG paralela a ella, luego son equivalentes; sustituyendo ABF por GBF, el nuevo polígono $GBCDE$ será equivalente al dado y tiene un lado menos por estar G alineado con F y E.

Repitiendo el procedimiento, reduciremos el número de lados hasta transformar el polígono en *triángulo* equivalente, y éste en cuadrado, como se ha indicado antes. *El cuadrado obtenido es independiente del camino seguido en este proceso reductivo*, por ser su área un número único, según vimos en la lección anterior

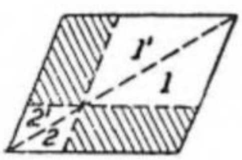
Si el polígono no es convexo podemos descomponerlo en triángulos, éstos en rectángulos y, finalmente, la suma de éstos en un rectángulo único equivalente al polígono dado, como se explica en el § 5.

3. Transformación de un rectángulo en otro equivalente de base dada.— Sean a y b la base y la altura del rectángulo dado $MNPQ$; sea a' la base del rectángulo deseado. Llevemos $NR=a'$ a continuación de la base $MN=a$ y prolonguemos la recta RP hasta cortar a la MQ en S; el segmento QS es la altura b' del rectángulo deseado. En efecto, por el teorema de Thales se verificará



$$a' : b = a : b' \quad \text{de donde} \quad a \,.\, b = a' \,.\, b'$$

La equivalencia de ambos rectángulos puede también deducirse del hecho de poderse obtener restando de los triángulos iguales $SMR=STR$ los pares de triángulos iguales 1 y $1'$ y 2, $2'$. Podemos, pues, pasar del rectángulo ab al $a'b'$, sumándole primero los triángulos 1 y 2 hasta obtener el triángulo $SMR=STR$ y restando luego 1' y 2'. Por el mismo razonamiento, obtenemos el siguiente resultado más general:



Si por un punto de una diagonal de un paralelogramo trazamos paralelas a los lados, los dos paralelogramos parciales que se obtienen (no cruzados por dicha diagonal) son equivalentes.

4. Teoría geométrica de la equivalencia.— El hecho de obtener polígonos equivalentes por suma y resta de polígonos congruentes sugiere la posibilidad de establecer una teoría *geométrica pura* de la equivalencia, partiendo de esta nueva definición, en la que no interviene el concepto de área:

Diremos que dos polígonos P_1 *y* P_2 *son «geométricamente equivalentes», si al sumar y restar sucesivamente a uno de ellos* P_1, *determinados polígonos de tal modo que los polígonos sumados son iguales a los restados, obtenemos el polígono* P_2 *u otro congruente con él.* Escribiremos $P_1 <> P_2$.

Es fácil ver que esta relación tiene los caracteres *idéntico, transitivo* y *recíproco* de la igualdad.

El carácter *idéntico:* «$P<>P$» es evidente.

El carácter *recíproco:* «Si $P_1<>P_2$ es $P_2<>P_1$» queda patente aplicando al segundo polígono las operaciones inversas en orden inverso a las efectuadas para obtenerlo a partir de P_1.

El carácter *transitivo:* «Si $P_1<>P_2$ y $P_2<>P_3$ es $P_1<>P_3$» resulta de aplicar a P_1 el conjunto de operaciones que ha permitido obtener sucesivamente P_2 y P_3.

Demostremos finalmente el carácter *aditivo:*

Las sumas de sumandos geométricamente equivalentes son geométricamente equivalentes.

En efecto, apliquemos a $R=P+Q$ las siguientes operaciones: 1.ª *Restar* Q para que quede P; 2.ª Transformar P en P' mediante las adiciones y sustracciones que definen su equivalencia;

3.ª *Sumar* Q a P' (la posición de Q será ahora distinta a la anterior si es preciso (*); 4.ª *Restar* P' para que quede Q; 5.ª Transformar Q en Q'; 6.ª *Sumar* P' a Q' para obtener R'.
En definitiva hemos aplicado a R un conjunto de sumas y restas de polígonos congruentes dos a dos hasta obtener R', lo que prueba la equivalencia de ambas sumas.

Podemos relacionar así los polígonos por relaciones geométricas de equivalencia y suma, que tienen los mismos caracteres que la igualdad y la suma de números, puesto que la suma de polígonos no sólo es asociativa y conmutativa, como vemos, sino también uniforme respecto de la equivalencia geométrica, según acabamos de probar.

Estas relaciones de equivalencia y suma de polígonos definen, pues, en virtud de la lección 17, § 1, una magnitud: *la extensión superficial*.

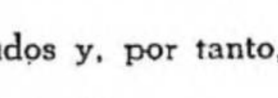
Para establecer, sin embargo, que esta magnitud es escalar y llegar así a su medida, hace falta todavía establecer además relaciones geométricas de desigualdad, lo que puede lograrse definiendo $P>R$ cuando $P<\!>R+S$. Pero la incompatibilidad de las relaciones $P<\!>R$ y $P>R$ no es consecuencia inmediata de la definición geométrica de equivalencia y se hace preciso o admitirla mediante un axioma nuevo (Axioma de Zolt): *Ningún polígono es equivalente con ninguna de sus partes*, o establecerla como consecuencia de lo dicho en la lección anterior. En efecto, la equivalencia geométrica $P<\!>R$ implica la igualdad de áreas de P y R, lo que es incompatible con $P<\!>R+S$.

Por esta causa es preferible empezar *por la asociación directa del polígono al número área*, omo hemos dicho.

5. Equivalencia geométrica de los polígonos de igual área.—En la lección anterior hemos visto que a un polígono P suma de dos $Q+R$ corresponde un área p suma de las áreas de estos dos $q+r$. Por tanto, a un polígono Q diferencia de dos $P-R$ corresponde un área $q=p-r$, diferencia de las áreas del minuendo y sustraendo. En consecuencia, de la definición de equivalencia geométrica se desprende:

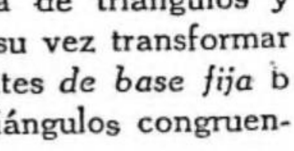
Dos polígonos equivalentes geométricamente tienen igual área, es decir, son *numéricamente equivalentes*. ¿Será cierto el recíproco? La contestación es afirmativa; para ello observemos:

1.° Todo triángulo tiene por lo menos dos ángulos agudos y, por tanto, la altura por el tercer vértice es *interior* al triángulo. Esto permite transformar el triángulo en rectángulo geométricamente equivalente de igual base y mitad altura por sustracción y adición de triángulos iguales, como indica la figura.



2.° Descompuesto un polígono cualquiera P_1 en suma de triángulos y transformado cada uno de éstos en rectángulo, podemos a su vez transformar todos estos rectángulos en otros geométricamente equivalentes *de base fija* b mediante adición y sustracción, a cada uno de ellos, de triángulos congruentes, como hemos visto en el § 3.

(*) Si la yuxtaposición de P' y Q no fuera posible en ninguna posición (fig.) podemos intercalar un polígono p intermedio restándolo después de ejercida su función de enlace así:



$$P'+p+Q-P'-p=Q;$$

y seguir con la operación 5.ª

3.° Finalmente podemos sumar todos estos rectángulos de igual base sumando las alturas, **obteniendo así un rectángulo único R_1 geométricamente** equivalente al polígono dado (carácter aditivo de la equivalencia geométrica).

4.° Partamos ahora de otro polígono P_2 de igual área que P_1 y repitamos el proceso hasta transformarlo en rectángulo R_2 de igual base b que el anterior: los dos rectángulos R_1 y R_2, por tener iguales *área* y *base*, tendrán alturas iguales, es decir, *serán iguales*.

En consecuencia, el conjunto de adiciones y sustracciones de triángulos que han permitido pasar de P_1 a R_1 seguido del conjunto de operaciones análogas, *pero de orden inverso*, para pasar de $R_2(=R_1)$ a P_2 permitirá transformar P_1 en P_2, con lo que queda en definitiva demostrado este interesante resultado general (*):

Dos polígonos cualesquiera de igual área son geométricamente equivalentes, es decir, *es posible transformar uno en otro agregándole y restándole polígonos congruentes dos a dos.*

6. Equivalencia por descomposición

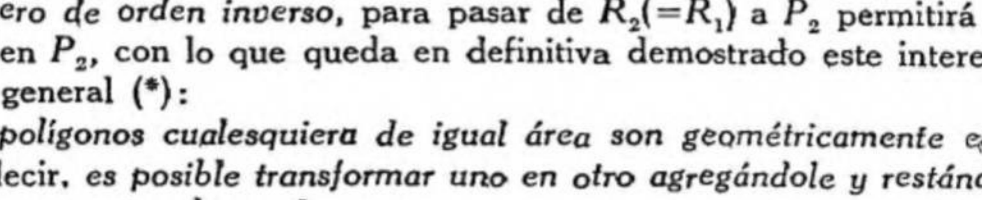
Se llaman *polígonos equivalentes por descomposición* o *equidescomponibles* aquellos que puedan ser descompuestos en un número finito de polígonos respectivamente congruentes.

Esta relación tiene, evidentemente, las propiedades *idéntica* (todo polígono es equidescomponible consigo mismo) y *recíproca* (si P es equidescomponible con Q, lo es también Q con P).

También cumple la propiedad transitiva: *Si* P *es equidescomponible con* Q, *y* Q *lo es con* R, P *y* R *lo son entre sí.*

Basta superponer las dos descomposiciones de Q.

Las líneas, que determinan cada una de las descomposiciones, fraccionan los polígonos



parciales de la otra en nuevos polígonos que asociados en una forma darán los polígonos parciales de P y asociados en otra darán los de R, luego P y R son también equivalentes entre sí (véase figura).

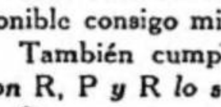
Finalmente, de la definición resulta evidente el *carácter aditivo: las sumas de polígonos equidescomponibles son también equidescomponibles.*

Es evidente que polígonos equidescomponibles tienen áreas iguales por ser éstas sumas de sumandos iguales.

Más interesante es el recíproco también cierto:

Dos polígonos de igual área son equidescomponibles.

En efecto, sigamos el mismo proceso de transformación de cada polígono en rectángulo

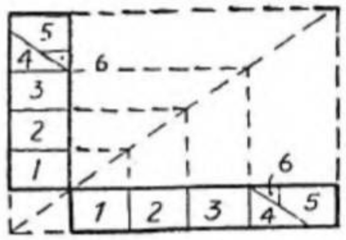


de base dada, expuesto en el párrafo anterior: Descompuesto cada polígono en triángulos, transformemos cada uno de ellos por equidescomposición en rectángulo, como indica la figura y el razonamiento antes expuesto.

Transformemos luego cada rectángulo en otro equivalente de base dada, como allí se

(*) En la Geometría del Espacio veremos la imposibilidad de establecer propiedad análoga para los volúmenes de poliedros.

indico. Claro es que hará falta probar ahora que los rectángulos de igual área obtenidos según la construcción del § 3 son *equidescomponibles*. La figura indica la forma de descomposición en polígonos congruentes. Se comprende que esta construcción, para ser admitida en toda su generalidad, *exige la aplicación de la proposición de Arquímedes* demostrada como consecuencia del principio de continuidad (lección 17, § 7, II).



El resto de la demostración sigue como en el párrafo anterior.

7. Equivalencia por complemento

Con objeto de establecer una teoría de la equivalencia independiente de los axiomas de continuidad, Hilbert define, además de la equivalencia por descomposición, una «equivalencia por complemento» del siguiente modo:

Se dice que dos polígonos son *equivalentes por complemento* (ergänzungsgleich) cuando es posible agregar, a uno y otro, ciertos polígonos respectivamente equidescomponibles de tal modo que se obtengan sumas equidescomponibles.

Esta definición tiene asimismo las propiedades *idéntica, recíproca* (evidentes) y *transitiva* (*).

La definición de equivalencia geométrica que hemos dado en el § 5 (**) es más general, es decir, abarca como casos particulares, las definiciones de equivalencia «por descomposición» y «por complemento», unificándolas y simplificando notablemente las demostraciones (***).

En efecto, decir que P y Q son equivalentes por descomposición es afirmar la existencia de pares de polígonos congruentes $p=p'$, $q=q'$, $r=r'$, $s=s'$, ... tales que, por ejemplo, $P=p+q+r+s$, $Q=p'+q'+r'+s'$. Pero entonces restando de P sucesivamente s, r y q se tendrá $P-s-r-q==p=p'$; de donde $P-s-r-q+q'+r'+s'=Q$, lo que prueba $P<>Q$, según la def. § 4.

Decir que P y Q son equivalentes por complemento, o que al agregar a uno y otro ciertos polígonos equidescomponibles se obtienen polígonos equidescomponibles, es lo mismo que decir que al agregar a ambos polígonos ciertas sumas de polígonos respectivamente congruentes ($m=m'$, $n=n'$, ...) se obtienen otras sumas de polígonos respectivamente congruentes ($p=p'$, $q=q'$, ...). Por ejemplo:

$$P+m+n+l=p+q+r+s; \qquad Q+m'+n'+l'=p'+q'+r'+s'$$

de donde, razonando como antes,

$$\underbrace{P+m+n+l-s-r-q}_{p=p'}+q'+r'+s'-l'-n'-m'=Q$$

y por lo tanto, $P<>Q$.

Puesto que la equivalencia por descomposición y por complemento son casos particulares de nuestra definición, las propiedades de estos criterios de equivalencia son consecuencia de las demostradas en el § 4.

8. Teoremas métricos deducidos por equivalencia.— Algunos teoremas métricos establecidos en la lección 22 tienen fácil interpretación y demostración por equivalencia.

Por ejemplo, el teorema del cateto

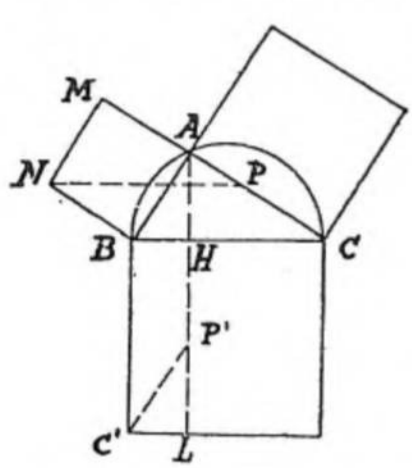
$$\overline{AB}^2=\overline{BH}\,.\,\overline{BC}=\overline{BH}\,.\,\overline{BC'} \qquad \text{(fig.)}$$

(*) El carácter transitivo no nos parece tan inmediato como *Hilbert* afirma en sus «Grundlagen der Geometrie», y las demostraciones que de dicho carácter hemos visto en *Zacharias*: «Elementargeometrie», y en *Halsted*: «Géométrie Rationelle», no nos parecen rigurosas.

(**) Propuesta por primera vez por el autor en los «Elementos de Geometría Racional», escritos en colaboración con Rey Pastor.

(***) Compárese, por ejemplo, con la obra de *Zacharias*.

significa que cuadrado $ABMN \Diamond$ rectángulo $BHLC'$ y puede demostrarse por equivalencias del siguiente modo:



$$ABNM + ABC - MNP = \text{paralelogramo } BNPC$$

es decir, $ABNM \Diamond BNPC$

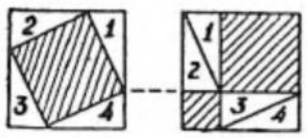
$$BHLC' + ABH - P'C'L' = \text{paralelogramo } BAP'C'$$

de donde $BHLC' \Diamond BAP'C'$, pero girando un recto el paralelogramo $BNPC$ se obtiene $BAP'C'$, de donde resulta $ABNM \Diamond BHLC'$, como queríamos demostrar.

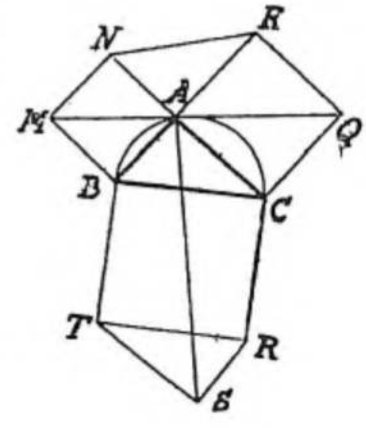
Efectuando descomposición análoga sobre el otro cateto y sumando ambas equivalencias se demuestra que:

La suma de los cuadrados construídos sobre los catetos es equivalente al cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Otras demostraciones de dicho teorema sugieren las siguientes figuras, cuya interpretación dejamos a cargo del lector.



$$[MNRQ] = [ABTS]$$
$$[QCBM] = [ACRS]$$
$$[MNRQCB] = [ACRSTB]$$



y restando $[ABC] + [NAR] = [ABC] + [SRT]$ resulta el teorema de Pitágoras.

EJERCICIOS

1. Demostrar por equivalencia las igualdades: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$; $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2. Demostrar que la suma de las áreas de dos figuras semejantes construídas sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área de otra figura semejante a ellas construída sobre la hipotenusa.

3. Demostrar que el área del triángulo MNP del ejercicio 13 de la lección 21 es media geométrica entre las áreas del triángulo dado ABC y de su semejante inscrito en MNP.

4. Demostrar geométricamente que el área de un hexágono regular inscrito en una circunferencia es media proporcional entre las áreas del triángulo equilátero inscrito y del circunscrito a la misma circunferencia.

5. Relacionar geométricamente el área de un cuadrilátero convexo con la del paralelogramo que resulta: 1.°, uniendo los puntos medios de sus lados; 2.°, trazando por los extremos de cada diagonal paralelas a la otra.

6.° Demostrar que todo cuadrilátero es equivalente: 1.°, al triángulo que tiene por lados las diagonales con el mismo ángulo comprendido; 2.°, a la suma de los triángulos que se obtienen uniendo los extremos de un lado con el punto medio del lado opuesto, y los extremos de éste con el punto medio de aquél.

7. Transformar un triángulo dado en otro equivalente a él y semejante a un segundo triángulo dado.

8. Transformar un triángulo en otro equivalente cuyos vértices A, B, C estén sobre tres rectas dadas, a, b, c, respectivamente.

9. Transformar un paralelogramo en otro equivalente cuyos lados tengan longitudes dadas.

10. Idem en un rombo de diagonal dada.

11. Idem en un rectángulo de diagonal dada.

12. Inscribir en un triángulo dado un rectángulo de área dada.

13. Sean a y b dos lados de un triángulo y m, n sus respectivas proyecciones sobre b y a. Demostrar geométricamente la equivalencia de los rectángulos de dimensiones an y bn.

14. Hallar un punto en el interior de un triángulo tal que al unirle con los vértices quede el triángulo descompuesto en tres equivalentes.

15. Construir un triángulo conociendo uno de sus lados, la razón entre los otros dos y el lado de un cuadrado equivalente.

16. Trazar por un punto P del plano de un paralelogramo (polígono regular de $2n$ lados) una recta que lo divida en dos polígonos equivalentes. Generalización.

17. Dividir un trapecio en dos equivalentes por una paralela a la base.

18. Dividir un triángulo en n partes equivalentes mediante paralelas a un lado.

19. Dividir un paralelogramo en n partes equivalentes mediante paralelas a una diagonal.

20. Dividir un paralelogramo en n partes equivalentes mediante rectas concurrentes en un vértice.

21. Dado un lado de un cuadrado, construir el de otro cuya área sea la $n.^a$ parte.

22. Construir un polígono semejante a dos dados, semejantes entre sí y equivalente a su suma. Idem diferencia.

23. Cortar de un triángulo dado, mediante una secante a dos de sus lados, un cuadrilátero inscriptible cuya área sea una fracción asignada del área del triángulo.

24. Construídos dos paralelogramos, $ABEF$ y $ACDG$, respectivamente, sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC, y hallado el punto H de intersección de las rectas EF y GD, así como las paralelas BK y CL a HA por B y C, sus respectivas intersecciones K y L con EF y GD, demostrar que $BCLK$ es un paralelogramo equivalente a la suma de los paralelogramos $ABEF$ y $ACDG$. (Pappus. Siglo IV.)

25. *Baricentro de un cuadrilátero.*—De la definición física de centro de gravedad se desprende que el c. d. g. de un cuadrilátero está en la recta que une los baricentros de los dos triángulos en que queda descompuesto el cuadrilátero por una diagonal. Repitiendo la construcción con la segunda diagonal tendremos dos rectas para determinar el c. d. g. Como cada una de ellas es paralela a la otra diagonal (demuéstrese), bastan dos baricentros para la construcción. La idea se generaliza fácilmente a un pentágono, luego a un hexágono, etc., pero las construcciones se complican y es preferible acudir al cálculo.

En el trapecio, los baricentros de los cuatro triángulos son vértices de otro trapecio t homotético del dado T. El punto de intersección de las diagonales de t es el c. d. g. de T, el cual está situado en el segmento que une los puntos medios de sus bases, dividiéndole en la razón $(2a+b):(2b+a)$, de donde se desprende la construcción. (Demostraciones.)

Capítulo X.—MEDIDA DE FIGURAS CIRCULARES

LECCIÓN 30.—CÁLCULO DE POLÍGONOS REGULARES

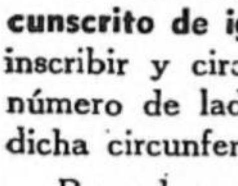
1. Razón de semejanza entre dos polígonos regulares inscrito y circunscrito de igual número de lados.—En la lección 15 hemos aprendido a inscribir y circunscribir en una circunferencia polígonos regulares de cierto número de lados. Nos proponemos ahora calcular, en función del radio de dicha circunferencia, los perímetros de los mismos y sus áreas.

Recordemos (lec. 21, § 2) que: *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.* La razón de semejanza es la que existe entre sus apotemas.

Como la apotema del circunscrito es radio del inscrito, resulta:

La razón de semejanza entre un polígono regular inscrito y el circunscrito de igual número de lados es igual a la que existe entre la apotema y el radio de uno de dichos polígonos o de otro cualquiera regular de igual número de lados.

2. Triángulo equilátero.—Sea r el radio de la circunferencia, igual, como se sabe (lec. 15), al lado del hexágono. El lado AB del triángulo equilátero ABC inscrito, que se obtiene uniendo de dos en dos los vértices del hexágono, formará con el lado DB de éste (fig.) un triángulo rectángulo en el que



$$\text{Lado } AB = l = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}; \qquad \textit{Perímetro} = 3r\sqrt{3}$$

Por equidistar B y C de D y O, BC es mediatriz del radio OD y, por tanto,

$$\text{Apotema } OM = \frac{1}{2}r \qquad \text{Area} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

La razón de semejanza entre el triángulo equilátero inscrito y el circunscrito será, pues, 1 : 2, de donde:

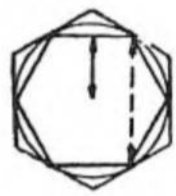
Lado del triángulo circunscrito $= 2r\sqrt{3}$ Perímetro $= 6r\sqrt{3}$

Radio del triángulo circunscrito $= 2r$ Area $= 3r^2\sqrt{3}$

3. Hexágono regular.—Ya hemos dicho que:

Lado del hexágono inscrito $= r$; Perímetro $= 6r$.

La apotema se calcula fácilmente por el teorema de Pitágoras, o se obtiene directamente observando (fig.) que es igual a la mitad del lado del triángulo equilátero.



$$\text{Apotema} = \frac{r}{2}\sqrt{3} \qquad \text{Area} = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3}$$

La razón de semejanza entre los hexágonos es, pues, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, por tanto:

$$\text{Lado y radio del hexágono circunscrito} = \frac{2r}{\sqrt{3}} \qquad \text{Perímetro} = \frac{12r}{\sqrt{3}}$$

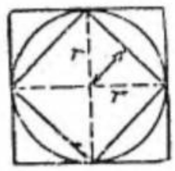
$$\text{Area} = \frac{6r^2}{\sqrt{3}}$$

4. Cuadrado.—Por el teorema de Pitágoras resulta inmediatamente:

Lado del cuadrado inscrito $= l = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$; Perímetro $= 4r\sqrt{2}$.

De la figura se desprende, además:

Apotema del cuadrado inscrito $= \frac{1}{2}$ lado $= \frac{r}{2}\sqrt{2}$; Area $= 2r^2 = l^2$

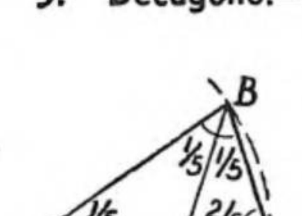


Lado del cuadrado circunscrito $= 2r$; Perímetro $= 8r$

Apotema del cuadrado circunscrito $= r$

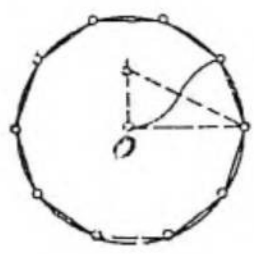
Radio $= r\sqrt{2}$ Area $= 4r^2$

5. Decágono.—Demostremos ahora:



El lado del decágono regular inscrito en una circunferencia es igual al segmento áureo del radio.

En efecto, el triángulo isósceles ABO limitado por el lado del decágono y los radios extremos tiene el ángulo en O igual a la décima parte de 4 rectos, o sea la 1/5 de un llano. La suma de los ángulos en la base A y B vale, pues, 4/5 de un llano, y cada uno de ellos 2/5 de un llano. La bisetriz BD por B dividirá, pues, al triángulo ABO en otros dos: El triángulo OBD, isósceles por tener los ángulos en O y B iguales a 1/5 de llano, y el triángulo DBA también isósceles y semejante al OBA por tener sus ángulos iguales a los de éste.



De aquí resulta $AB = BD = OD$.
y por otra parte (por la semejanza aludida)

$$\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{DA} \quad \text{o sea} \quad \frac{OA}{OD} = \frac{OD}{DA}$$

que es lo que queríamos demostrar.

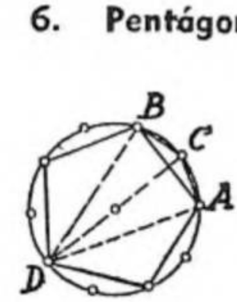
De aquí se desprende la construcción del decágono regular inscrito en una circunferencia.

Recordando la ecuación de la sección áurea (lec. 23, § 13) se tendrá

$$\text{Lado decágono inscrito} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,r \qquad \text{Perímetro} = 5(\sqrt{5}-1)r$$

Por el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo que limitan un medio lado, su apotema y el radio, se puede calcular dicha apotema en función del radio y, por consiguiente, el área, así como la razón de semejanza entre el decágono inscrito y el circunscrito, y, finalmente, el lado, perímetro y área de éste.

6. Pentágono.—Uniendo de dos en dos los vértices del decágono obtendremos el pentágono regular inscrito en la circunferencia, cuyo lado AB puede calcularse, por ejemplo, aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero formado por tres vértices consecutivos ACB del decágono y el punto D diametralmente opuesto al C. Se tendrá



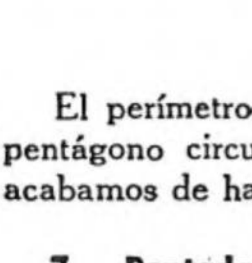
$$\overline{AB}\cdot 2r = 2\,\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 2\,\overline{AC}\sqrt{4r^2-\overline{BC}^2}$$

Sustituyendo $AC = BC =$ lado del decágono, por su valor, resulta, después de sencillas operaciones:

$$\text{Lado pentágono } AB = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

El perímetro se obtendrá multiplicando por 5. Respecto del perímetro del pentágono circunscrito, podemos repetir observaciones idénticas a las que acabamos de hacer para el decágono.

7. Pentadecágono.—Interpretada la igualdad $^1/_{15} = {}^1/_6 - {}^1/_{10}$ entre fracciones de circunferencia, resulta: *El arco subtendido por el lado del pentadecágono regular inscrito en la circunferencia es la diferencia entre los arcos subtendidos por el hexágono y por el decágono*, de donde se desprende la fácil inscripción del pentadecágono regular.

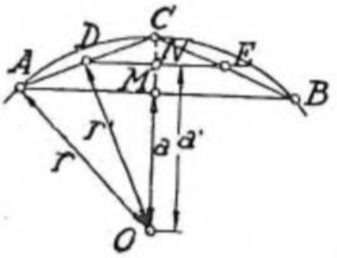


El cálculo geométrico del lado BC, que se obtiene uniendo los extremos de los arcos AB y AC del hexágono y del decágono respectivamente, puede efectuarse de acuerdo con lo dicho en lec. 23, párrafo final, es decir, aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero $ACBA'$ (opuesto a A). Después de sencillo cálculo se obtiene

$$\text{Lado pentadecágono} = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)$$

Análogamente se pueden calcular los lados del decágono, del pentágono y de los pentadecágonos *estrellados*. (V. ejercicios.)

8. Apotema y radio de un polígono regular isoperímetro de otro y de doble número de lados.—Sean a y r la apotema y el radio de un polígono regular de n lados. Por ejemplo, en la figura $a=OM$, $r=OA$, siendo AB el lado del polígono regular considerado, inscrito en una circunferencia de centro O.



Si unimos el punto medio C del arco AB con sus extremos, obtenemos los lados AC y CB del polígono regular de doble número de lados inscrito en la misma circunferencia. Los puntos medios D y E de dichos lados determinan, a su vez, el lado DE de otro polígono regular también de $2n$ lados (ya no inscrito en la misma circunferencia) y cuyo perímetro valdrá $2n.\ DE=n.\ AB$, es decir, será el mismo que el del polígono dado. Ambos polígonos se llaman, por esta razón, *isoperímetros*. Nos proponemos calcular la apotema $a'=ON$ y el radio $r'=OD$ de dicho polígono isoperímetro de doble número de lados, en función de a y r.

Por ser N el punto medio de CM será $ON=\frac{1}{2}(OC+OM)$, es decir,

$$a'=\frac{1}{2}(a+r) \tag{1}$$

La apotema del polígono regular isoperímetro y de doble número de lados que otro dado es la media aritmética entre la apotema y el radio de éste.

Por otra parte, en el triángulo DOC, $DO=r'$ es media proporcional entre OC y ON (teorema del cateto), es decir,

$$r'=\frac{1}{2}\sqrt{r\ .\ a'} \tag{2}$$

El radio del polígono regular isoperímetro de doble número de lados es media geometría entre su apotema y el radio del polígono dado.

En resumen, dados a y r podemos calcular a' por una media aritmética entre r y a, y una vez obtenido a', calcular r por una media geométrica entre r y a'

Reiterando el cálculo indefinidamente obtendremos *dos sucesiones*, una de radios y otra de apotemas, que son *monótonas* (por ser $a<a'$, $r'<r$) y además *convergentes* (por ser $r'-a'<DN$ semilado del polígono, que tiende a cero al permanecer fijo el perímetro de éste y duplicar indefinidamente su número de lados). El límite de estas sucesiones será obtenido en la próxima lección.

9. Cálculo de los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos de doble número de lados.—En los párrafos anteriores hemos aprendido a calcular los perímetros de ciertos polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia. Por bisección de los arcos subtendidos podíamos inscribir y circunscribir los de número de lados dobles, cuádruple, ... Veamos cómo pueden *calcularse* los perímetros de estos nuevos polígonos, conocidos los perímetros de los polígonos de partida. Es decir, supongamos conocidos los perímetros p y P de los polígonos regulares de n lados inscrito y circunscrito a una circunferencia, y propongámonos calcular los perímetros p' y P' de los polígonos regulares de $2n$ lados incrito y circunscrito a la misma circunferencia. Sea AB el lado del polígono inscrito de n lados. AC será el de $2n$ lados (fig. anterior).

Recordando lo dicho en el § 1 tendremos

$$\frac{p}{P} = \frac{a}{r} \qquad \frac{p'}{P'} = \frac{a'}{r'} \tag{1}$$

Por otra parte, la semejanza entre los triángulos ACM y DOC (por tener un ángulo común) permite escribir:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{AM}{AC} = \frac{2n \cdot AM}{2n \cdot AC} \quad \text{es decir} \quad \frac{r'}{r} = \frac{p}{p'} \tag{2}$$

Las proporciones (1) y (2) pueden escribirse de esta forma:

$$aP = pr = p'r' = P'a' \quad \text{o bien} \quad \frac{r}{\frac{1}{p}} = \frac{a}{\frac{1}{P}} = \frac{r'}{\frac{1}{p'}} = \frac{a'}{\frac{1}{P'}}$$

Las medidas de r, a, r' y a' son, pues, respectivamente, proporcionales a los recíprocos de las medidas de p, P, p' y P'. Por tanto, entre estos recíprocos existen relacionales lineales y relaciones de proporcionalidad idénticas a las que ligaban aquéllas, a saber:

$$\text{de } a' = \tfrac{1}{2}(r+a) \quad \text{resulta} \quad \frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right)$$

$$\text{de } r' = \sqrt{r \cdot a'} \quad \text{resulta} \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P'}}$$

lo que permite efectuar cómodamente el cálculo de los recíprocos de P' y p' en función de los recíprocos de los datos p y P.

Omitimos otros métodos de cálculo por ser más laboriosos.

EJERCICIOS

1. Comprobar los siguientes valores del lado l, apotema a y área A del octógono y del dodecágono regulares (radio r).

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad a_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad A_8 = 2r^2\sqrt{2}$$

$$l_{12} = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \qquad a_{12} = \frac{r}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \qquad A_{12} = 3r^2$$

2. Comprobar los siguientes valores de los lados del pentágono, octógono, decágono y dodecágono regulares estrellados

$$l'_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}; \quad l'_8 = r\sqrt{2+\sqrt{2}}; \quad l'_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1); \quad l'_{12} = \frac{r}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

3. Demostrar que dos diagonales secantes de un pentágono regular convexo se dividen mutuamente en media y extrema razón y que el segmento mayor es igual al lado.

4. Expresar los catetos de un triángulo rectángulo en función de la hipotenusa sabiendo que tiene un ángulo de 45°, de 22° 30', de 30°, de 15°, de 36°.

5. Calcular los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos de 8, 16 y 32 lados en una circunferencia de radio unidad.

6. Construir un octógono regular isoperímetro de un cuadrado dado.

7. Si sobre cada lado de un exágono regular se construye un cuadrado exterior, los vértices libres de dichos cuadrados definen un dodecágono regular. Demostración y cálculo de su radio, apotema y área.

LECCIÓN 31.—LONGITUDES Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

1. Longitud de la circunferencia.—*Dada una circunferencia existe una longitud, y una sola, mayor que los perímetros de todos los polígonos inscritos y menor que los perímetros de todos los circunscritos.*

Recordemos, en efecto, que las longitudes absolutas son cantidades de una magnitud continua (lec. 17, § 6). Clasifiquémoslas en las dos siguientes clases:

Longitudes l, cada una de las cuales es $\leqslant$ que el perímetro de algún polígono inscrito.

Longitudes L, mayores que todos los perímetros de polígonos inscritos.

Que existen longitudes de la clase l es evidente, como también de la clase L, pues basta considerar los perímetros de los polígonos circunscritos, los cuales son mayores que los de cualquier inscrito, por envolverles a todos (lección 11, § 2).

Por otra parte, toda longitud pertenece a una u otra clase y cualquier longitud l será menor que cualquiera L.

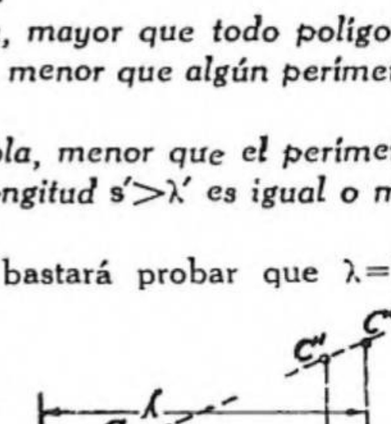
En virtud del axioma de continuidad podemos, pues (lec. 17, § 6), afirmar la existencia de una sola longitud λ frontera entre las dos clases tal que: toda longitud $<\lambda$ pertenece a la clase l y toda longitud $>\lambda$ pertenece a la clase L. Esta longitud es forzosamente *mayor que todas las de la primera clase*, pues si fuere λ igual o menor que algún perímetro inscrito p, es decir, $\lambda \leqslant p$, podríamos construir, bisecando los arcos subtendidos por sus lados, otro polígono *inscrito* de perímetro p' mayor, el cual, en virtud del axioma, habría de pertenecer a la clase L, en contra de la clasificación.

Resumiendo: *Existe una longitud λ, y una sola, mayor que todo polígono inscrito y tal que cualquier segmento $s<\lambda$ es igual o menor que algún perímetro inscrito.*

Análogamente: *Existe una longitud λ', y una sola, menor que el perímetro de todo polígono circunscrito y tal que cualquier longitud $s'>\lambda'$ es igual o mayor que algún perímetro circunscrito.*

Para demostrar ahora el teorema enunciado bastará probar que $\lambda=\lambda'$.

Consideremos para ello un polígono inscrito regular de n lados y el circunscrito correspondiente. Si AB es el lado del inscrito, las tangentes en A y B determinarán el triángulo ABC, en el que $AC=BC$ es el semilado del circunscrito.



Prolongando AC y AD tomemos:

$$AC'=2nAC=P_n \text{ (perímetro circunscrito)};$$
$$AD'=2nAD=p_n \text{ (perímetro inscrito)};$$
$$AD''=\lambda>p_n.$$

Tendremos, pues:

$$P_n-p_n=AC'-AD'<C'D'<C''D''$$

Hagamos crecer n infinitamente; el ángulo $CAD = AOC = \frac{2\pi}{2n}$ tenderá a cero, y con él el segmento $C''D''$; de otro modo, podemos hacer n suficientemente grande para que $C''D''$ y, por tanto, la diferencia $P_n - p_n$ entre los perímetros inscrito y circunscrito, sea *tan pequeña como se quiera.*

Pero debiendo ser $p_n < \lambda$ y $\lambda' < P_n$, se tendrá $\lambda' - \lambda < P_n - p_n$ *cualquiera que sea* n y, por tanto, forzosamente $\lambda' - \lambda = 0$, es decir, $\lambda = \lambda'$, como queríamos demostrar.

La longitud λ mayor que todos los perímetros inscritos y menor que todos los circunscritos se llama *longitud de la circunferencia.*

2. La longitud de la circunferencia como límite. El número π.—Al verificarse $p_n < \lambda < P_n$ y poder hacerse $P_n - p_n < \varepsilon$, λ puede diferir en menos de ε de P_n y p_n, es decir es límite común de P_n y p_n.

La longitud λ de la circunferencia es el límite común de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuyo número de lados crece infinitamente.

De este resultado se desprende:

Circunferencias iguales tienen la misma longitud, por la igualdad de los polígonos regulares inscritos y circunscritos en ellas, lo que implica la igualdad de sus perímetros y de sus límites.

Circunferencias no iguales tienen longitudes proporcionales a sus diámetros.

En efecto; inscribiendo en una y en otra polígonos regulares de igual número de lados, la semejanza de éstos permitirá escribir la siguiente proporción entre sus perímetros p_n y p'_n y sus diámetros d y d'

$$\frac{p_n}{d} = \frac{p'_n}{d'}$$

tomando límites en esta igualdad y llamando λ y λ' las longitudes de ambas circunferencias

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda'}{d'} \qquad \text{de donde:}$$

La razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es una constante, que se designa por la letra griega π.

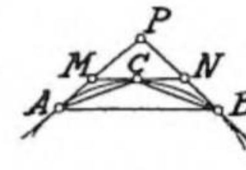
Para calcular π bastará hallar la longitud de *una* circunferencia y dividirla por su diámetro. Una vez obtenida, la longitud de cualquier otra circunferencia se obtendrá multiplicando su diámetro por π.

$$\text{Longitud circunferencia} = \pi d = 2\pi r.$$

3. Cálculo de π. Método de los perímetros.—El cálculo de la longitud de una circunferencia y por tanto de π puede efectuarse partiendo del perímetro de un polígono regular inscrito, por ejemplo el hexágono, y calculando los perímetros del hexágono circunscrito y los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito de doble, cuádruple, etc., número de lados.

Así se obtienen dos sucesiones de perímetros inscritos y circunscritos, las cuales:

1.° *Son monótonas*, porque al pasar de cada polígono inscrito al de doble número de lados sustituímos cada lado AB por dos (v. fig.), cuya suma es mayor que él: $AC+CB>AB$; y al pasar asimismo de cada polígono circunscrito al de doble número de lados, sustituímos en cada vértice P la suma $MP+NP$ por el lado MN menor que ella.



2.° *Son convergentes*, como se ha probado antes. Su límite común es λ.

En cuanto la diferencia entre dos perímetros correspondientes llegue a ser despreciable para el orden de aplicaciones que se requieran, cualesquiera de estos perímetros, o un valor intermedio, proporcionará un valor aproximado de la longitud deseada, y, por ende, de π.

Por este camino llegó Arquímedes, tres siglos antes de Jesucristo, al valor aproximado de $\pi=\frac{22}{7}$, utilizando para ello los polígonos de 6, 12, 24, 48 y 96 lados.

Sus cálculos fueron bastante más complicados que el procedimiento indicado en el § 9 de la lección anterior, que es el que conduce a operaciones más rápidas y sencillas, pues bastará partir de dos polígonos inscrito y circunscrito de perímetros conocidos, tomar sus recíprocos y calcular sucesivamente los recíprocos de los de doble, cuádruple, ... número de lados por una sucesión de medias aritméticas y geométricas, tal como rezan las fórmulas allí obtenidas.

4. Método de los isoperímetros.—En lugar de dejar invariable la circunferencia, es decir, el radio del polígono regular y hallar el límite del perímetro, se puede dejar *fijo el perímetro* y hallar el límite del radio del polígono regular cuando su número de lados crece infinitamente.

Así procedieron *Cusanus* en el siglo XV y *Descartes* en el siglo XVII. El método fué finalmente simplificado por *Schwab* a comienzos del siglo pasado, dando las relaciones entre los radios y apotemas de los polígonos isoperímetros de doble número de lados expuestas en el § 8 de la lección anterior.

Se parte, por ejemplo, del cuadrado de perímetro 2, cuya apotema vale $a_4=\frac{1}{4}$ y cuyo radio $r_4=\frac{1}{4}\sqrt{2}$, y, aplicando las relaciones mencionadas, se calcularán sucesivamente para los polígonos isoperímetros de 8, 16, 32, 64 y 128 lados (*):

(*) Tomamos estos resultados numéricos de *Rouché Combérouse:* «Traité de Géométrie»

$a_4 = 0{,}25$	$r_4 = 0{,}3535534 \ldots$
$a_8 = \frac{1}{2}(a_4 + r_4) = 0{,}3017767 \ldots$	$r_8 = \sqrt{r_4 a_8} = 0{,}3266407 \ldots$
$a_{16} = 0{,}3142087 \ldots$	$r_{16} = 0{,}3203644 \ldots$
$a_{32} = 0{,}3172865 \ldots$	$r_{32} = 0{,}3188217 \ldots$
$a_{64} = 0{,}318041 \ldots$	$r_{64} = 0{,}3184377 \ldots$
$a_{128} = 0{,}3182459 \ldots$	$r_{128} = 0{,}3183418 \ldots$

Se obtienen así dos sucesiones monótonas convergentes (como hemos demostrado en lec. 20, § 8), cuyo límite común r, multiplicado por 2π, habrá de dar el perímetro 2 de partida; es decir, *este límite vale* $\frac{1}{\pi}$.

Si para calcular los perímetros, seguimos el cálculo indicado también en la lección precedente, § 9, vemos que ambos métodos nos conducen, prácticamente, al mismo proceso de cálculo de π, mejor dicho, de su recíproco por una sucesión de medias aritméticas y geométricas.

Observando, en particular, que $a_4 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ es media geométrica entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, el método de los isoperímetros conduce al siguiente enunciado (teorema de Schwab):

$\frac{1}{\pi}$ *es el límite de la sucesión* $0, \frac{1}{2}, \mathrm{a}_1, \mathrm{g}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{g}_2, \ldots$; *obtenida calculando alternativamente la media aritmética* (a_1) *y la media geométrica* (g_1) *de los dos términos precedentes.*

NOTA.—Este resultado, así como los métodos de cálculo de π indicados en esta lección, tienen más interés teórico que práctico. Obsérvese que después de repetir seis veces el proceso, los valores aproximados de a_{128} y r_{128} todavía difieren en la cuarta cifra, es decir, que el error relativo con que se obtiene π después de seis iteraciones es $\simeq 1/3000$.

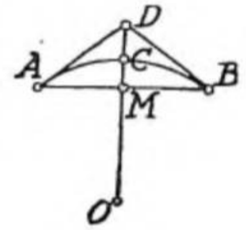
El análisis moderno ha proporcionado, posteriormente métodos de cálculo de π de convergencia mucho más rápida, es decir, que permiten obtener mucha mayor aproximación con menos trabajo, y por ello los métodos geométricos expuestos han pasado a la categoría de documentos históricos o curiosidades científicas. Atendiendo a esta razón no nos extenderemos más. He aquí las 15 primeras cifras decimales de

$$\pi = 3{,}141592653589793 \ldots$$

5. Area del círculo.—*Llamaremos área del círculo al límite común de las áreas de un polígono regular inscrito y otro circunscrito de* n *lados cuando* n *crece infinitamente.*

Para demostrar su existencia formulemos dichas áreas:

$$\text{Area inscrita} = \tfrac{1}{2} p_n a_n \qquad \text{Area circunscrita} = \tfrac{1}{2} P_n r$$

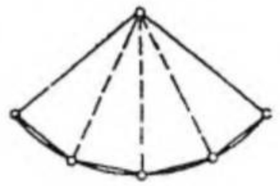


y observemos que P_n y p_n tienen el mismo límite $2\pi r$ y que a_n tiene por límite r. En efecto, $r-a_n=CM<DM$, cateto de un triángulo rectángulo AMD, opuesto a un ángulo DAM, que tiende a cero al crecer n, mientras el otro cateto permanece finito (v. §. 1).

En resumen, el área del círculo valdrá

$$\tfrac{1}{2} \,.\, 2\pi r \,.\, r=\pi r^2$$

6. Longitud de un arco. Area de un sector.—La longitud de un arco se podrá definir, análogamente, como el límite de una *línea poligonal regular inscrita*, y el área del sector como límite de la de un *sector poligonal regular inscrito*, cuyo número de lados crece infinitamente (v. fig.).



La demostración de la existencia de estos límites es sencilla y análoga a la desarrollada para la longitud de la circunferencia y área del círculo.

Más sencillo es, sin embargo, definirlas una y otra por proporcionalidad, siendo fácil comprobar que ambas definiciones coinciden.

Llamaremos *longitud del arco de un grado* a la 360ava parte de la longitud de la circunferencia, y la de un arco de n grados a

$$\textit{longitud de un arco de n grados}=\frac{2\pi r\cdot n}{360}=\frac{\pi rn}{180}$$

Llamaremos *área del sector de un grado* a la 360-ava parte del área del círculo, y área de un sector de n grados a

$$\textit{área del sector de n grados}=\frac{\pi r^2 n}{360}$$

Este valor escrito en la forma $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi rn}{180}\cdot r$ nos dice que:

La medida del área del sector es igual a la mitad del producto de la longitud del arco por la del radio.

7. El radián.—En las aplicaciones de la Geometría a la Mecánica, tiene especial interés tomar como unidad de ángulos el ángulo central que intercepta en la circunferencia un arco de longitud igual a la del radio.

La amplitud de este ángulo, llamado *radián*, vendrá, pues, dada por la ecuación

$$\frac{\pi r\cdot x}{180}=r \qquad \text{es decir} \qquad x=180:\pi$$

que reducido a minutos y segundos da (con error menor que medio segundo)

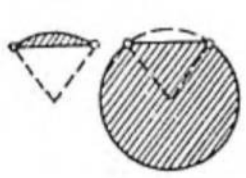
$$\text{un radián}=57^\circ\ 17'\ 45''$$

Adoptando esta unidad angular y llamando ω la amplitud del ángulo medida en radianes, se tendrá:

Longitud de un arco $=\omega r$

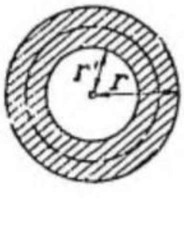
Area del sector $=\frac{1}{2}\omega r^2$

8. **Areas del segmento, de la corona y del sector de corona.**— Se llama *segmento circular* a la parte de círculo limitada por un arco y su cuerda. Si la cuerda es diámetro el segmento es un semicírculo. En otro caso, según que el arco sea mayor o menor que una semicircunferencia el área del segmento se obtendrá restando o sumando al área del sector la del triángulo limitado por la cuerda y los radios extremos.



Se llama *corona* circular a la región del plano limitada por dos circunferencias concéntricas. Su área se calcula restando las áreas de los círculos exterior e interior, obteniéndose (r y r' radios respectivos)

$$\pi r^2-\pi r'^2=\pi(r+r')(r-r')$$



La diferencia $r-r'$ se llama también *anchura de la corona*. Por ser $\frac{r+r'}{2}$ el radio de la circunferencia llamada *media*, podemos enunciar:

El área de una corona circular es igual al producto de su anchura por la longitud de la circunferencia media.

Se llama *sector de corona* a la porción de ésta limitada por dos radios; su área puede obtenerse como diferencia de las áreas de dos sectores, o más sencillamente multiplicando el área de la corona por la razón $n/360$ entre la amplitud del sector y 360°.

Aplicando este coeficiente al factor circunferencia media, resulta:

El área de un sector de corona es igual al producto de su anchura por el arco de circunferencia media interior al sector.

9. **El problema de la cuadratura del círculo.**—Se entiende por tal: *Construir con la regla y el compás un cuadrado equivalente a un círculo dado.*

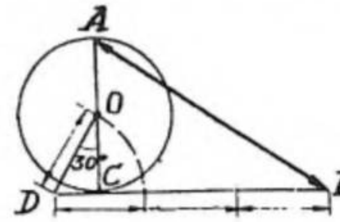
Obsérvese que si supiésemos construir mediante la regla y el compás un segmento de longitud igual a la de la circunferencia, el rectángulo de base mitad πr y altura igual al radio sería equivalente al círculo y bastaría construir el cuadrado equivalente a dicho rectángulo, hallando la media geométrica entre sus dos dimensiones. Recíprocamente, conocido este lado e invirtiendo las construcciones, podríamos hallar la circunferencia rectificada.

El problema de la cuadratura del círculo equivale, pues, al de la rectificación de la circunferencia o, lo que es lo mismo, a construir un segmento de medida igual a π, dado el segmento unidad.

Los geómetras griegos se propusieron resolverlo con regla y compás, pero fracasaron en su empeño, y durante siglos fueron ineficaces los esfuerzos de los geómetras para lograrlo, sirviendo de estímulo la dificultad a los espíritus ambiciosos de gloria para empeñarse en resolver el problema.

A fines del siglo XIX el problema quedó, al fin, resuelto; y lo fué en sentido negativo. *Lindemann* demostró en 1882, que el número π no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica de coeficientes racionales. Con ello probó indirectamente la *imposibilidad de construir mediante un número finito de operaciones con regla y compás un segmento de longitud igual a una circunferencia de radio dado*, pues si tal construcción existiera se podría traducir fácilmente en ecuaciones algebraicas de coeficientes racionales mediante los métodos de la Geometría analítica. (V. lección 36.)

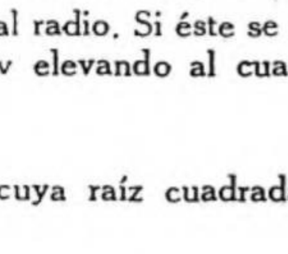
10. Rectificación aproximada de la circunferencia.—Se han ideado muchas construcciones para hallar gráficamente un segmento de longitud *aproximadamente* igual a la de una circunferencia dada o de una de sus partes. Entre las más aproximadas se cuenta la que indica la figura, debida a Kochanski. Trazado OD formando $30°$ con OC y determinada la intersección D con la tangente en C, se lleva a partir de D (en la dirección DC) el radio tres veces consecutivas. Uniendo el extremo P con A, resulta el segmento AP, aproximadamente igual a la *semicircunferencia*.



En efecto, DC es la mitad del lado de un triángulo equilátero de altura igual al radio. Si éste se toma como unidad, $DC=1:\sqrt{3}$; de donde $CP=3-(1:\sqrt{3})$; y elevando al cuadrado y sumándole $AC^2=4$. resulta

$$AP^2=(40:3)-2\sqrt{3}$$

cuya raíz cuadrada 3,14153, ..., es bastante aproximada al valor de π.



Otra construcción interesante, por no utilizar más que el compás, es la de Mascheroni, que indica la figura adjunta. Determinados sobre la circunferencia los puntos A, B, C, A' vértices consecutivos del hexágono regular inscrito, se halla el punto D de intersección de los arcos de centros A y A' y radio $AC=A'B$. Finalmente el arco de centro B y radio BD corta al arco BC en el punto E y el segmento AE tiene, aproximadamente, la longitud del cuadrante de circunferencia, con un error por exceso $<0{,}0004r$.

Tomando, como antes, el radio como unidad, el teorema de Pitágoras, da, en efecto:

$$AD=AC=\sqrt{3}, \qquad OD=\sqrt{3-1}=\sqrt{2},$$

$$BE=BD=\sqrt{(\overline{OD}-\overline{MB})^2+\overline{MO}^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3}/2)^2+1/4}=\sqrt{3-\sqrt{6}}$$

Aplicando el teorema de Ptolomeo el cuadrilátero $ABEB'$ (B' diametralmente opuesto a B) resulta

$$\overline{BB'}\ \overline{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{EB'}+\overline{BE}\cdot\overline{AB'}$$

o sea

$$2\cdot\overline{AE}=1\cdot\sqrt{4-3+\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{1+\sqrt{6}}+\sqrt{9-3\sqrt{6}}=$$
$$=3{,}1423992\ldots$$

EJERCICIOS

1. Demostrar que la suma de las áreas de las *lúnulas* construídas sobre un triángulo rectángulo, como indica la figura, es igual al área de dicho triángulo.

2. Construir gráficamente el diámetro de un tubo colector que debe recoger el agua de varios tubos de diámetros dados, a, b, c, ..., l

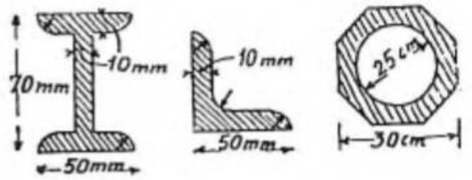
3. Prolongando los lados de un n-gono regular en un mismo sentido y en un mismo segmento s se obtienen los vértices de otro n-gono regular. Demostrarlo y calcular s para $n=6$ con objeto de que el nuevo n-gono tenga perímetro doble que el primero. Se supone conocido el lado o el radio de éste. Idem para $n=3$.

4. Se quiere rodear una circunferencia de radio r con cinco circunferencias tangentes a ella y, además, cada una con la anterior y la siguiente. Construcción y cálculo del radio de éstas y del de la circunferencia circunscrita a ellas.

5. Un cojinete de bolas tiene 10 bolas tangentes entre sí. Hallar la relación entre los radios de las superficies cilíndricas sobre las que ruedan.

6. ¿A qué horas las agujas de un reloj forman entre sí un ángulo de un radián?

7. Una circunferencia rueda interiormente sobre otra fija de radio doble sin resbalar. Lugar geométrico de las posiciones de uno de sus puntos.



8. Calcular las áreas de las secciones de la figura.

9. Carga que puede soportar la columna hueca de fundición indicada en la figura a razón de 3 kilogramos/mm².

10. Una columna de cemento de diámetro d va armada con ocho hierros redondos en su interior. Calcular el diámetro δ de éstos para que la sección del hierro sea el 2 % de la total. (Contestación mental.)

11. Número de vueltas que ha de dar la rueda de una bicicleta de diámetro 70 cm. para recorrer una pista circular de 140 m. de radio. (Contestación mental.)

12. Demostrar que el área de una corona es igual a la de un círculo cuyo diámetro es la cuerda de la circunferencia exterior tangente a la interior.

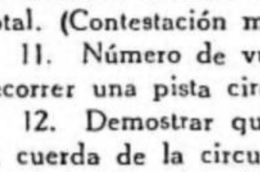
13. Hallar las dimensiones de una ventana ojival (rectángulo terminado por dos arcos de 60°) de triple altura que anchura y de 3 m² de área.

14. Calcular el perímetro de un sector de área 1 m² y amplitud 30 grados.

15. Dividir un círculo en n partes de igual área mediante circunferencias que no se corten entre sí.

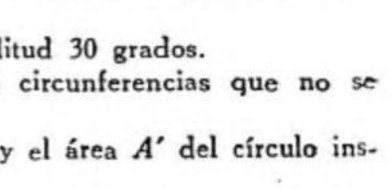
16. Construir un triángulo conocido un ángulo α, su área A y el área A' del círculo inscrito. Aplicación al caso $\alpha=45°$, $A=6$ cm², $A'=\pi$ cm².

17. Dos poleas están enlazadas por una correa cuyos trozos rectilíneos se cruzan a 60°. La distancia entre ejes es de 5 m. Calcular los radios sabiendo que la relación de velocidades angulares es de 3/7. Calcular la longitud de la correa; ¿depende de los radios?



18. Se desea construir, con cinco sillares iguales, un arco de medio punto (v. fig.), radio int. = 1 m., radio ext. = 1,40 m., espesor = 50 cm. Dimensiones mínimas de los bloques rectorrectangulares de piedra de los que pueden extraerse dichos sillares.

19. Inscribir en un sector circular dado un círculo y calcular su área en función del radio del sector y de su cuerda.



20. Para unos ventanales circulares de un metro de diámetro hay que forjar los diseños adjuntos. Calcular la longitud de barra necesaria (prescindiendo en los cálculos del espesor).

Capítulo XI.—METODOLOGIA DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

LECCIÓN 32.—MÉTODO GENERAL REDUCTIVO. PROBLEMAS DE TANGENCIA

1. El método reductivo.—Toda construcción geométrica se propone encontrar un ente geométrico o figura que cumpla determinadas condiciones.

Supuesto el problema resuelto, es decir, admitida la existencia de la solución, se procura *reducir* las condiciones impuestas, a otras que conduzcan a problemas conocidos. Pero en esta reducción o sustitución de unas condiciones por otras, conviene fijarse no sólo en si las nuevas condiciones son consecuencia obligada de las del enunciado, o sea, en si son condiciones *necesarias*, sino también *suficientes*, es decir, si al cumplirse las nuevas condiciones se cumplirán asimismo las del enunciado. En una palabra, conviene sustituir las condiciones de *partida* por otras *equivalentes* a ellas, con objeto de no omitir soluciones ni introducir soluciones extrañas.

Cuando la sustitución por equivalencia no sea posible, conviene, al menos, utilizar condiciones *necesarias* para no correr el riesgo de perder soluciones. Claro es que en tal caso habrá que comprobar si *todas* las soluciones obtenidas satisfacen efectivamente al enunciado.

La sustitución de un problema por otro exige, pues, un *análisis* riguroso de la equivalencia de condiciones de ambos, que llamaremos *análisis del planteamiento*.

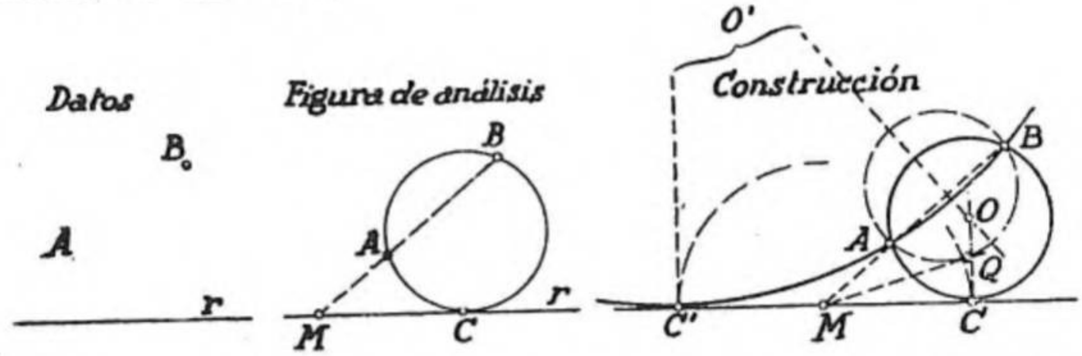
Una vez resuelto el problema (y comprobada la validez de las soluciones cuando se ha operado con condiciones sólo necesarias), procede estudiar cómo *varían la solución o soluciones del problema al variar los datos*. Este estudio se llama *discusión* del problema y es necesario si se desea resolverlo *con toda generalidad*, es decir, conocer la naturaleza de la solución en todos los casos posibles. Ejemplo de *discusión* puede verse en la construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (lec. 14).

2. Trazado de una circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una recta o a otra circunferencia.—Hemos hecho reiterada aplicación del método reductivo en la resolución de numerosos problemas: Por ejemplo, la construcción de un trapecio, dados los cuatro lados, se redujo a la de un triángulo (lec. 14). El trazado de las tangentes comunes a dos circunferencias se redujo al trazado de las tangentes desde un punto a una circunferencia (lec. 14), etc.

Veamos nuevos ejemplos:

Ejemplo 1.° *Trazar una circunferencia que sea tangente a una recta dada r y que pase por dos puntos dados* A *y* B, *situados en una secante a* r.

Análisis.—La circunferencia quedará determinada en cuanto conozcamos el punto C de tangencia con r, el cual, a su vez, tiene que cumplir en valor y signo la condición $\overline{MC}^2 = \overline{MA} \,.\, \overline{MB}$, que define la potencia del punto M de intersección de AB con r.



Recíprocamente: Si existe C que cumpla en valor y signo $\overline{MC}^2 = MA \times MB$, toda circunferencia que pase por A, B y C será tangente a r, de lo contrario la cortará en $C'' \neq C$ tal que $\overline{MC}^2 = \overline{MA} \times \overline{MB} = \overline{MC} \times \overline{MC}''$, es decir, $MC = MC''$ (en valor y signo). El problema es, pues, *equivalente* al de hallar, sobre r, un punto C cuya distancia a M sea media proporcional entre MA y MB, de donde se desprende la siguiente

Construcción.—Se halla la media geométrica MQ entre MA y MB, para lo cual basta trazar, por ejemplo, la tangente MQ a una circunferencia del haz que pasa por A y B, como se ha hecho en la figura. Se lleva sobre r a partir de M. Obtenido el punto C de contacto, el centro de la circunferencia buscada será el de intersección de la perpendicular a r por C con la mediatriz de AB.

Como el segmento MQ puede llevarse a ambos lados de M, existen dos puntos C y C' que darán otras tantas soluciones, por haber demostrado la equivalencia de condiciones.

Discusión.—Si A y B son exteriores a r y están ambos *en un mismo semiplano*, el producto $MA \,.\, MB$ es positivo y existen las *dos soluciones* referidas.

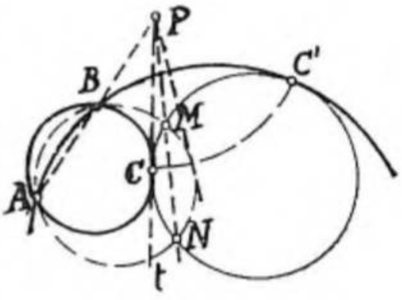
Si uno de los puntos dados, A, por ejemplo, está en r, la potencia de $M \equiv A$ es *nula*, C se confunde con M y A y no existe más que una solución, que se obtiene del mismo modo.

Si A y B *están a distinto lado de* r, la potencia de M es negativa y no hay solución posible. En el caso trivial $AB \| r$ (excluído en el enunciado), C sería la intersección de r con la mediatriz de AB.

Ejemplo 2.° *Construir una circunferencia que sea tangente a otra dada y pase por dos puntos dados* A *y* B.

Análisis.—El problema se reduce, como el anterior, a la determinación del punto de contacto C o de la tangente t en él. Pero esta tangente es el eje radical de la circunferencia incógnita y de la dada, y quedará determinada en cuanto hallemos un punto de igual potencia respecto de ambas. Para ello, basta trazar una circunferencia que pase por AB y corte a la dada en M y N

Si las rectas AB y MN se cortan, el punto P de intersección tiene la misma potencia $PM \cdot PN = PA \cdot PB$ respecto de la circunferencia dada, de la auxiliar y de la incógnita (centro radical de las tres); luego por él pasa t.



Recíprocamente, razonando como en el problema anterior, se prueba que el punto de contacto C de toda tangente trazada por P a la circunferencia determina con A y B una circunferencia solución. Por tanto, hay tantas soluciones como tangentes se pueden trazar por P, de donde resulta la construcción de la figura.

En el caso en que la mediatriz de AB pasa por el centro de la circunferencia dada, las rectas AB y MN son paralelas por la simetría de la circunferencia dada y de la auxiliar respecto de dicha mediatriz, y la construcción indicada cae en defecto; pero en este caso trivial, los puntos de contacto son precisamente los de intersección de la circunfrencia dada con dicha mediatriz.

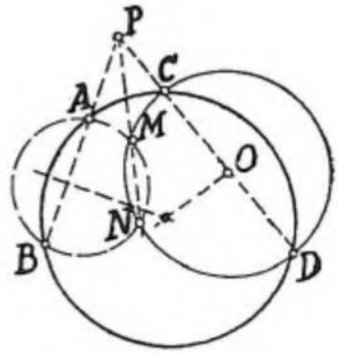
Discusión.—Si A y B son *ambos exteriores* o ambos *interiores* a la circunferencia dada y existe P, este punto es exterior a ella y existen *dos soluciones*, a menos de que A y B estén en una tangente a la circunferencia dada, en cuyo caso una de las soluciones degenera en la propia recta AB

Si uno de los puntos A está en la circunferencia, P se confunde con A y hay *una solución*. Si uno es exterior y otro interior, P es interior a la circunferencia dada y no hay solución ninguna.

De modo análogo resolverá y discutirá el lector el ejercicio siguiente:

Ejemplo 3.° Trazar una circunferencia tangente a otra dada y a una recta dada r *en un punto de ella.*

Ejemplo 4.° Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados A *y* B *y que corte a una circunferencia dada en puntos diametralmente opuestos.*



El eje radical de la circunferencia dada y la incógnita es ahora una recta diametral. Por tanto, hallado el punto P como antes, basta trazar la recta diametral por P para tener las intersecciones C y D de la circunferencia dada con la incógnita.

Ejemplo 5.° *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos* A *y* B *y sea ortogonal a otra dada*

Análisis.—Sea r el radio de la circunferencia dada y O su centro. La condición de ortogonalidad de la circunferencia incógnita es, según vimos (lec. 25), *equivalente* a la de tener O respecto de ella la potencia r^2. Esto nos permite construir otro punto A' de esta circunferencia, tal que $OA \cdot OA' = r^2$ y que bastará para determinarla.

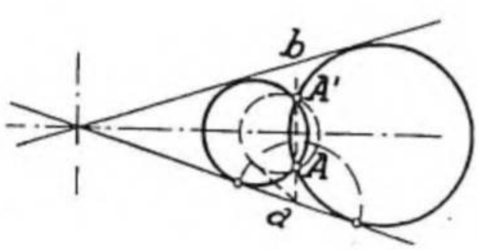
El razonamiento cae en defecto si $OA = r$, pero entonces A está en la circunferencia dada y la construcción es trivial.

El lector resolverá fácilmente los problemas análogos a los 4.° y 5.°, sustituyendo A y B por un punto A y la tangente en él.

3. Determinación de una circunferencia tangente a dos rectas y que pase por un punto, o que sea tangente a otra circunferencia.—Con objeto de poner de relieve la importancia que tiene el análisis de planteamiento, en lo que se refiere a la sustitución de condiciones, estudiemos nuevos ejemplos que nos muestren los inconvenientes de un análisis incorrecto o incompleto

Ejemplo 6.° *Trazar una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas* a *y* b *no paralelas, y que pase por un punto* A *no situado en ellas.*

Análisis incorrecto.—Toda circunferencia es simétrica respecto de una de las bisectrices de los ángulos que forman dos tangentes; luego la circunferencia buscada debe pasar por uno de los simétricos A', A'' de A respecto de las bisectrices de ab. Construiremos, pues, las circunferencias tangentes a a que pasan por A y A' o por A y A'' (Ejemplo 1.°) Analizado así el problema, parece tener cuatro soluciones. Pronto se ve la imposibilidad de dos de ellas, pero más correcto era preverlo ya en el análisis, diciendo:



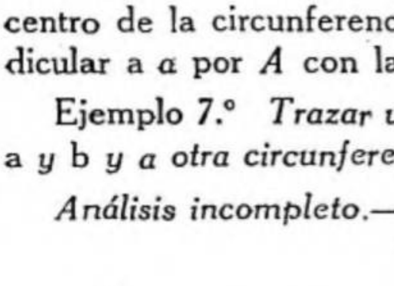
La circunferencia solución se hallará en un solo semiplano respecto de a y de b, es decir, en *uno sólo* de los ángulos que estas rectas determinan, precisamente aquél que contenga el punto dado A, luego debe pasar por el simétrico A' de A respecto de la *bisectriz de dicho ángulo*. Recíprocamente: toda circunferencia que pase por A y A' tendrá su centro en la referida bisectriz, y si es tangente a a lo será también a b. El problema queda reducido por equivalencia al Ejemplo 1.°

Si las rectas son paralelas, sustitúyase la bisectriz por la paralela media.

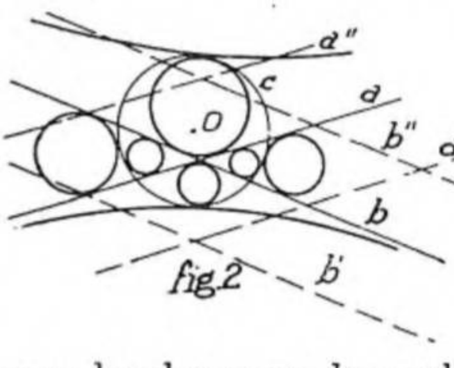
Si A está situado en alguna de las rectas a, la solución es trivial, pues el centro de la circunferencia buscado es el punto de intersección de la perpendicular a a por A con las bisectrices ab.

Ejemplo 7.° *Trazar una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas* a *y* b *y a otra circunferencia dada* c.

Análisis incompleto.—Razonando como en el ejemplo anterior, toda circunferencia que cumpla las condiciones del enunciado tiene que estar situada por entero en alguno de los cuatro ángulos que las rectas determinan (supuestas no paralelas) y, por tanto, sólo podemos buscarla en aquellos ángulos que contengan puntos de c. Busquemos, pues, en la bisectriz de uno de estos ángulos puntos que equidisten de a, b y c, los cuales equidistarán también del centro O de c, y de las paralelas a' y b' a a y b trazadas hacia el *exterior* del ángulo, a distancia r (radio de c), y tendremos soluciones del problema, que se reduce así al ejemplo anterior con los datos O, a' y b'. Repitiendo la construcción en cada uno de los ángulos ab que contienen puntos de c tendremos resuelto el problema.



Este razonamiento, de apariencia impecable, da en efecto todas las soluciones en el caso de la figura 1, pero sólo daría cuatro soluciones en el caso en que c tuviera arcos en los cuatro ángulos *ab* (figura 2), cuando en rigor son ocho soluciones. Ello se debe a que la condición de equidistancia del centro a las rectas *ab* trazadas hacia el *exterior* del ángulo es sólo equivalente a la condición de *tangencia exterior*, pero excluye las soluciones de tangencia interior. Para tener éstas en cuenta, debemos trazar los dos pares de paralelas a' y b', a'' y b'' de cada recta y aplicar la solución del ejemplo 5.° a los cuatro conjuntos de datos O, a', b'; O, a', b''; O, a'', b'; O, a'', b''.



4. Método del problema recíproco.—En algunas ocasiones la reducción de un problema a otro conocido equivalente se logra sin más que invertir la relación que liga los datos con el elemento buscado, es decir, suponiendo éste conocido en posición y situando los datos para que se cumplan las referidas relaciones. Este método es particularmente usado en problemas en los que se trata de *situar, inscribir, circunscribir*, etc

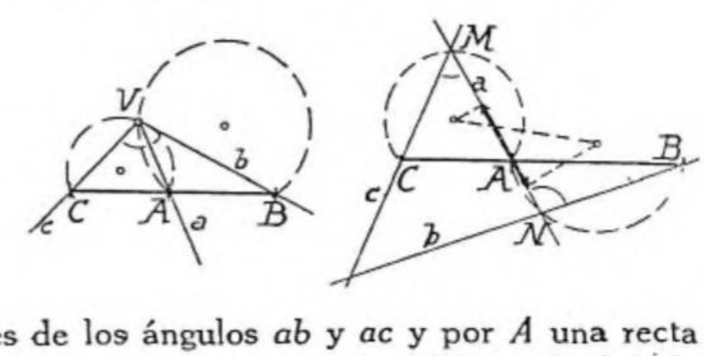
Ejemplo 1.° *Situar un segmento de longitud dada entre los lados de un ángulo dado de modo que limite con ellos un triángulo de área dada.*

Tomado dicho segmento como base, se conoce la altura y el problema equivale a «situar un ángulo de modo que sus lados pasen por los extremos de un segmento fijado y que su vértice esté a una distancia dada de la recta que lo contiene» (V. lec. 15, § 5)

Ejemplo 2.° *Cortar tres rectas dadas* a, b, c *por otra incógnita* r *de modo que los segmentos* AB, AC *interceptados sean de longitud dada.*

Si *a, b, c* son paralelas el problema no es en general posible, a menos que la razón de distancias entre *a, b* y *a, c* sea igual a $AB:AC$.

Si *a, b, c* son concurrentes el problema se invierte construyendo sobre *AB* y *AC* ángulos iguales a *ab* y *ac*, por intersección de los arcos capaces correspondientes.



Si *a, b, c* forman triángulo, trazaremos igualmente sobre *AB* y *AC* los arcos capaces de los ángulos *ab* y *ac* y por *A* una recta que intercepte entre los mencionados arcos un segmento *MN* igual al lado del triángulo situado sobre la recta *a*. Sobre dicha recta se proyecta el segmento que une los centros según el que une los puntos medios de las cuerdas, igual a la mitad del referido lado del triángulo que es conocido. Esto determina la dirección de la recta *a*, con lo que se completa fácilmente la construcción.

El lector completará el análisis y la discusión combinando los distintos arcos según las posiciones posibles de la recta respecto del triángulo.

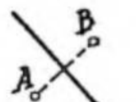
LECCIÓN 33.—MÉTODO DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Método de los lugares geométricos de puntos.—En muchos problemas geométricos la construcción de la figura pedida puede hacerse depender de la *determinación de un punto* que tenga dos propiedades explícitamente manifestadas en el enunciado, o que se deducen de él. Supongamos conocidos los lugares geométricos de los puntos que tienen una y otra propiedad por separado. Según la definición de lugar geométrico dada en la lección 6.ª son *equivalentes* la condición de *tener cada propiedad* y la de *pertenecer al lugar* correspondiente; los puntos comunes a dichos lugares y *sólo ellos*, darán las soluciones apetecidas. En esto consiste el método llamado de los lugares geométricos, del que ya hemos hecho uso en diversas ocasiones (lec 14. § 10; lec. 15, § 5).

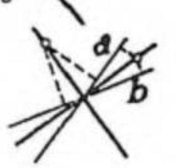
Como este método exige el conocimiento de los lugares geométricos que traducen el cumplimiento de ciertas propiedades, será útil recapitular aquí los lugares geométricos estudiados y enunciar algunos nuevos, que el lector demostrará fácilmente.

2. Lugares geométricos rectilíneos.—A) *El lugar geométrico de los puntos situados a una distancia dada δ de una recta es el conjunto de dos paralelas a ella a dicha distancia.*

Por tanto, éste es también el *lugar de los centros de las circunferencias de radio δ tangentes a* a.

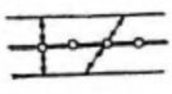


B) *El lugar goemétrico de los puntos equidistantes de:*

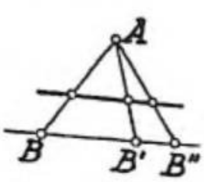


I. *Dos puntos dados* A *y* B, *es la mediatriz de* AB.

II. *Dos rectas dadas* a, b *secantes, es el conjunto de las dos bisectrices de los ángulos* ab.



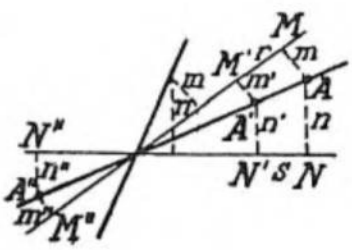
III. *Dos rectas dadas* a, b *paralelas, es la paralela media. Esta es también lugar geométrico de los puntos medios de todos los segmentos cuyos extremos están en* a *y* b.



C) *El lugar geométrico de los puntos que dividen en una razón dada los segmentos que unen un punto fijo* A *con otro variable sobre una recta que no pase por* A, *es otra recta paralela a ella* (lec. 19).

D) *El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos rectas fijas secantes es constante, está constituído por dos rectas concurrentes con ellas*

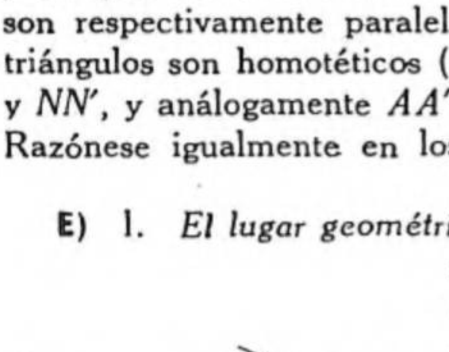
En efecto, en cada par de ángulos opuestos por el vértice, la proporcionalidad de las distancias (v. fig.)



$$m : n = m' : n' = m'' : n''$$

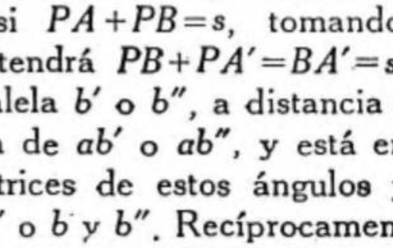
implica la semejanza de los triángulos AMN, $A'M'N'$, $A''M''N''$, ..., determinados por cada punto del lugar y los pies de dichas distancias, y como AM y AN son respectivamente paralelas a $A'M'$ y $A'N'$, estos triángulos son homotéticos (lec. 20, § 6). AA' es, pues, concurrente con MM' y NN', y análogamente AA'', etc. El recíproco es más sencillo aún de probar. Razónese igualmente en los otros dos ángulos.

E) I. *El lugar geométrico de los puntos* P *cuya suma de distancias a dos rectas concurrentes dadas,* a, b *es un segmento* s *dado, es el contorno de un rectángulo cuyas rectas diagonales son* a *y* b. El segmento s es la distancia de un vértice a la diagonal que no pasa por él.



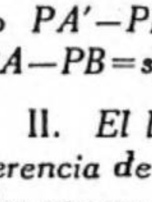
En efecto (figura), si $PA+PB=s$, tomando $PA'=PA$ en $BP\rightarrow$ se tendrá $PB+PA'=BA'=s$. Luego A' está en la paralela b' o b'', a distancia s y, por tanto, P equidista de ab' o ab'', y está en una de las cuatro bisectrices de estos ángulos y precisamente entre b y b' o b y b''. Recíprocamente, si $PA'=PA$, y P está entre las referidas rectas, se cumplirá $PB+PA'=s$ y también $PB+PA=s$.

Si P está sobre aquellas bisectrices pero en el exterior de dichas fajas de plano, será $PB-PA'=s$ (o $PA'-PB=s$) y, por lo tanto, $PB-PA=s$ (o $PA-PB=s$) y recíprocamente. Es decir:



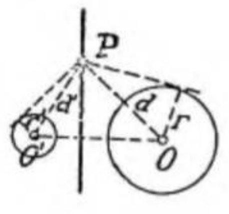
II. *El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos rectas concurrentes dadas sea un segmento dado, está constituído por las prolongaciones de los lados del rectángulo anterior.*

F) I. *El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos* A *y* B *es una cantidad constante, es una recta perpendicular a* AB (lección 22, § 8).



De este lugar se dedujeron estos otros:

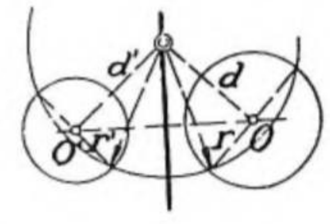
II. *El lugar geométrico de los puntos de igual potencia respecto de dos circunferencias (eje radical) es una perpendicular a*



la que contiene los centros (lección 23, § 4). En efecto, de $d^2-r^2=d'^2-r'^2$ se desprende $d^2-d'^2=r^2-r'^2=$constante.

III. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a dos dadas, es el eje radical de ellas* (lec. 25, § 5).

G) I. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan diametralmente a dos circunferencias dadas, es una recta perpendicular a la de los centros y simétrica del eje radical respecto del punto medio del segmento que une dichos centros.*



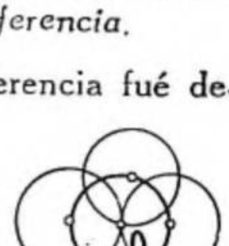
En efecto (figura) de $d^2+r^2=d'^2+r'^2$ se desprende $d^2-d'^2=r'^2-r^2=$constante (compárese con F) II). Análogamente:

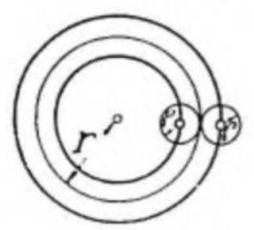
II. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto fijo* P *y cortan diametralmente a una circunferencia dada, es una perpendicular a la recta que une el centro con* P. (Demuéstrese como I.)

III. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan ortogonalmente a una circunferencia dada y diametralmente a otra, es una recta perpendicular a la línea de centros.* (Demuéstrese como I.)

H) *El lugar geométrico de los puntos armónicamente separados de uno dado* P *por los de intersección de las rectas que pasan por él con una circunferencia (que no pasa por* P *ni tiene su centro en* P*), es un segmento rectilíneo si* P *es exterior, y una recta (polar) si* P *es interior a la circunferencia.*

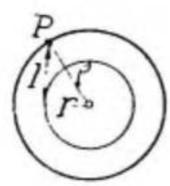
3. Lugares geométricos circulares.—A') I. La circunferencia fué definida como el *lugar geométrico de los puntos que distan de un punto dado* O *(centro) una distancia dada* r *(radio)*. Por tanto, éste es también el *lugar de los centros de las circunferencias de radio* r *que pasen por* O.



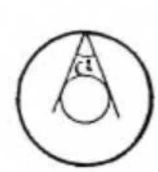


De esta definición se desprende fácilmente:

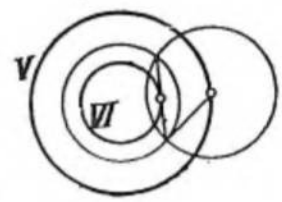
II. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias de radio* ρ *tangentes* $\left\{\begin{matrix}\textit{exteriormente}\\ \textit{interiormente}\end{matrix}\right\}$ *a una circunferencia de radio* r *es otra concéntrica de radio* $\left\{\begin{matrix} r+\rho \\ r-\rho \text{ ó } \rho-r\end{matrix}\right.$



III *El lugar geométrico de los puntos* P *desde los cuales los segmentos de tangentes trazadas a un circunferencia dada* (radio r) *y comprendidos entre* P *y los puntos de contacto tienen una longitud* l *dada, es otra circunferencia concéntrica de radio* ρ *tal que* $\rho^2=l^2+r^2$.

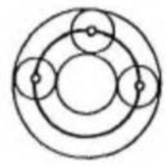


IV. *El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve una circunferencia bajo un ángulo* α *constante* (ángulo de las tangentes), *es otra concéntrica con ella.*

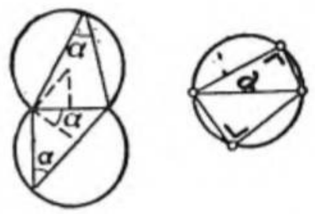


V. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias iguales que determinan sobre otra fija cuerdas de longitud constante, es otra circunferencia concéntrica.*

VI. *El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales de una circunferencia es otra concéntrica con ella.*



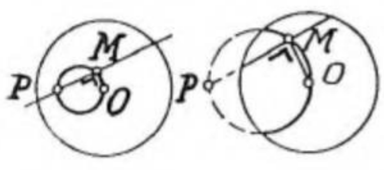
VII. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a dos concéntricas, es otra circunferencia concéntrica con ellas y de radio igual a la semisuma de los radios.* El radio de todas las circunferencias tangentes es la semidiferencia.



B') I. *El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento a bajo un ángulo constante α es el conjunto de dos arcos capaces de α sobre el segmento* a.

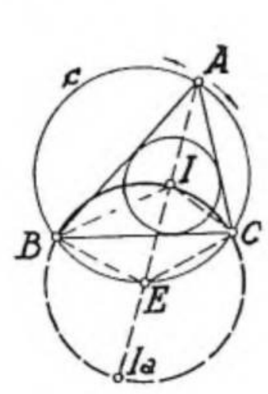
Si α es un ángulo recto, ambos arcos son semicirculares y componen una circunferencia de diámetro a.

De aquí se desprende :



II. *El lugar geométrico de los puntos medios* M *de las cuerdas interceptadas en una circunferencia por rectas que pasan por un punto* P *de su plano, es una circunferencia (o un arco de ella si* P *es exterior) cuyo diámetro es el segmento que une* P *con el centro.*

En efecto, $\sphericalangle PMO = 90°$.

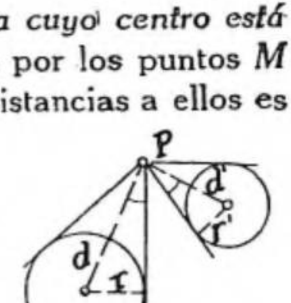


III. *El lugar geométrico del incentro de un triángulo* ABC *con un lado fijo* BC *y el vértice* A *variable sobre un arco de circunferencia* c *que pasa por* B *y* C, *es otro arco que pasa por* B *y* C *y cuyo centro es el punto medio* E *del arco* BC *de* c *y que no tiene* A. El resto de la circunferencia es el lugar de los centros de las circunferencias exinscritas interiores al ángulo A.

En efecto, sea I el incentro de ABC ; se tendrá :

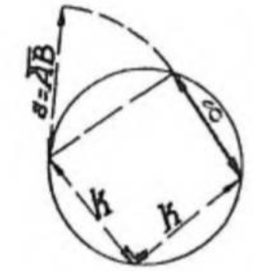
$\sphericalangle IEC = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle IBC$. Análogamente, $\sphericalangle IEB = 2\sphericalangle ICB$: luego I, B, C, están en una circunferencia de centro E. Análogamente para los exincentros I_a.

C') I. *El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos* A *y* B *es constante* (p : q), *es una circunferencia cuyo centro está en la recta* AB. Su diámetro MN vendrá, pues, determinado por los puntos M y N armónicamente separados por A y B y cuya razón de distancias a ellos es $p : q$ (lec. 24, §3). De aquí se desprende :



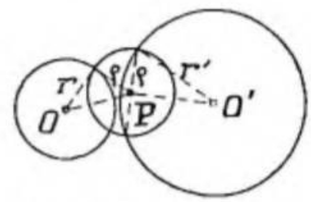
II. *El lugar geométrico de los puntos* P *desde los cuales se ven dos circunferencias dadas bajo ángulos respectivamente iguales, es otra circunferencia de centro alineado con los dos de las dadas.*

En efecto, si r y r' son los radios de las circunferencias dadas y d y d' las distancias de sus centros a P, la igualdad de ángulos del enunciado implica la proporción $d : d' = r : r' =$ constante.



D') I. *El lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos* A *y* B *es una cantidad constante* k^2, *es una circunferencia cuyo centro es el punto medio de* AB. El diámetro δ de esta circunferencia verifica $2k^2 = \overline{AB}^2 + \delta^2$ (v. lec. 22, § 7, fórmula [1]). Si se da k^2 dando el segmento k, esta relación permite construir cómodamente δ como indica la figura De aquí se desprende:

II. *El lugar geométrico de los centros* P *de todas las circunferencias que cortan ortogonalmente a una dada (de centro* O *y radio* r) *y que son cortadas diametralmente por otra de centro* O' *y radio* r', *es una circunferencia de centro en el punto medio de* OO'



Puesto que P tiene que cumplir (ρ radio de la circunferencia de centro P)

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \rho^2 = r'^2 - \overline{PO'}^2$$

de donde $\overline{PO}^2 + \overline{PO'}^2 = r^2 + r'^2$ (constante). Análogamente:

III. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto* A *dado y son cortadas diametralmente por una circunferencia de centro* O *dado, es otra circunferencia de centro en el punto medio de* AO. (Demuéstrese como II.)

IV. *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que cortan diametralmente a una circunferencia dada y son cortadas diametralmente por otra, es una circunferencia de centro en el punto medio de los centros de las circunferencias dadas.* (Demuéstrese como II.)

4. Lugares geométricos de rectas.—El concepto de lugar geométrico como conjunto de todos los *puntos* que cumplen una determinada propiedad, es generalizable a otros entes geométricos, como las rectas.

Los conjuntos de rectas que cumplen la condición de: pasar por un punto, o ser paralelas a una dirección, o ser tangentes a una circunferencia, se llaman *haces de rectas.* Así, diremos:

A'') I. *El lugar de las rectas que distan de un punto dado un segmento dado, es el haz de tangentes a la circunferencia que tiene este radio y aquel centro.* De donde:

II. *El lugar de las rectas que interceptan en una circunferencia (radio* r) *cuerdas de longitud dada* (s), *es un haz de tangentes a una circunferencia concéntrica con ella.* Su radio ρ verifica

$$\rho^2 = r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

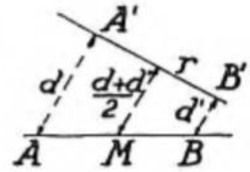
B'') I. *El lugar geométrico de las rectas equidistantes de dos puntos fijos* A, B, *es el haz de rectas que pasan por el punto medio de* AB, *y el haz de rectas paralelas a* AB.

II. *El lugar geométrico de las rectas cuya razón de distancias a dos puntos fijos* A *y* B *es un valor dado* m : n, *es el conjunto de los haces de rectas que pasan por los puntos* C *y* D *alineados con* A *y* B, *y cuya razón de distancias a ellos es* m : n. Si se atribuye un signo a estas distancias, considerándolas de opuesto o igual signo, según que los puntos A y B estén o no separados por las rectas en cuestión, habrá que dar igualmente un signo a la razón. Si éste es positivo (negativo), el lugar es el haz de vértice exterior (interior).

C'') I. *El lugar geométrico de las rectas que cortan bajo un ángulo constantes a una recta dada, está formado por dos haces de paralelas.*

II. *El lugar geométrico de las rectas que cortan bajo un ángulo constante a una circunferencia dada, es el haz de tangentes a otra circunferencia concéntrica. Si el ángulo es recto, es el haz de diámetros.*

D'') *El lugar geométrico de las rectas cuya suma algebraica de distancias a dos puntos dados* A, B *es constante, es el haz de tangentes a una circunferencia cuyo centro es el punto medio de* AB *y de radio igual a la mitad de dicha suma.*



Si ambas distancias son de igual signo, es decir, si A y B están del mismo lado de las rectas, la propiedad se desprende de la longitud de la paralela media del trapecio $ABB'A'$ formado por los puntos A y B y los pies de sus distancias a r. Y lo mismo resulta para las rectas que separan A y B, en virtud de la lección 12. Ejercicio 7.°

E'') *El lugar geométrico de las bisectrices de los ángulos inscritos en un mismo arco* AB, *es un conjunto de rectas que pasan por el punto medio* M *del arco* AB *que completa la circunferencia, llenando el ángulo* AMB *y su opuesto por el vértice.*

F'') *El lugar geométrico de los ejes radicales de una circunferencia fija* c *con cada una de las de un haz* h, *es un haz de rectas que pasa por un punto fijo* (centro radical de c y dos circunferencias de h).

Todo lo dicho acerca de la solución de los problemas mediante lugares geométricos de puntos, se puede repetir a los lugares geométricos de rectas cuando la solución dependa de la determinación de una recta *definida por dos condiciones* y se conozcan los lugares de las rectas que cumplen por separado una u otra condición. Las rectas comunes a ambos lugares darán las soluciones del problema. Así, por ejemplo, si estos lugares son un haz de tangentes a una circunferencia y un haz de paralelas, las soluciones serán las tangentes paralelas a la dirección del haz, etc.

5. Problemas resueltos mediante lugares geométricos de puntos o rectas.— Como a lo largo de esta obra hemos hecho reiteradas aplicaciones del método de los lugares geométricos, nos limitaremos a indicar aquí someramente la solución de unos pocos ejemplos y a proponer otros, cuya solución dejamos a cargo del lector (*).

Ejemplo 1.° *Construir un triángulo conociendo un lado* a, *el ángulo opuesto* A *y el radio* ρ *del círculo inscrito (o uno de los exinscritos).* Construído el arco capaz de ∢A sobre *a*, el incentro se obtendrá por intersección del lugar determinado en (§ 3, B'), III) con la paralela a *a* a distancia ρ, situada en el mismo semiplano. (Solución por lugares de puntos.)

También puede resolverse este ejemplo construyendo el ángulo *A*, en él una circunferencia inscrita de radio ρ y recordando (lec. 24) que la distancia entre los puntos de contacto de las circunferencias inscrita y exinscrita situada en el ángulo *A* con los lados de este ángulo es precisamente *a*, lo que permitirá trazar dicha circunferencia exinscrita. El lado *a* se hallará ahora como tangente común a ambas circunferencias. (Solución por lugares de rectas.)

Ejemplo 2.° *Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo un ángulo, un lado adyacente y las dos diagonales.* (Se resuelve por los lugares B') I y A') I.)

Ejemplo 3.° *Trazar por un punto dado una secante a una circunferencia dada, de modo que la suma de distancias de los puntos de intersección a una recta dada sea un segmento dado.* (Se hallará el punto medio de la cuerda que une las intersecciones por medio de los lugares geométricos A I y B' II.)

Ejemplo 4.° *Al aumentar el ángulo recto de un triángulo rectángulo en un ángulo dado* α, *la hipotenusa* a *dada se convierte en el segmento* a', *también dado; construir ambos triángulos.* [Aplíquense B') I y D') I.]

Ejemplo 5.° *Determinar un punto desde donde se vean, bajo ángulos iguales, tres segmentos sucesivos* AB, BC *y* CD *de una recta.* [Aplíquese C').]

Ejemplo 6.° *Construir el camino exactamente recorrido por un rayo luminoso que, partiendo de un punto* A, *incide sobre un espejo esférico iluminando un punto* B *en línea recta con* A *y el centro* O. [Aplíquese C').]

Ejemplo 7.° *Hallar sobre una circunferencia un punto cuya suma de distancias a dos rectas dadas sea:* 1.°) *un segmento dado;* 2.°) *mínima.* [Aplíquese E).]

Ejemplo 8.° *Por un punto dado trazar una recta cuya distancia a un punto dado sea igual a la suma de sus distancias a otros dos puntos dados.* [Aplíquese B'') I y II.]

Ejemplo 9.° *Construir un triángulo conociendo la altura, la bisectriz y la mediana que concurren en un mismo vértice,* h_a, v_a, m_a. Construídos los triángulos rectángulos que forman $h_a v_a$ y $h_a m_a$, la perpendicular a la base *a* por el pie de m_a cortará a la prolongación de v_a en el punto medio del arco BC del círculo circunscrito (E''), cuyo centro se halla inmediatamente, completándose fácilmente el triángulo.

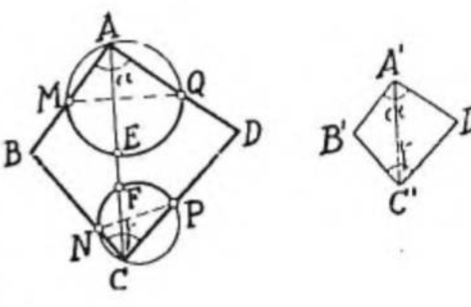
(*) Muchos de ellos tomados e inspirados en enunciados de la excelente obrita de Petersen: «Métodos y teorías para la resolución de construcciones geométricas», que recomendamos al lector. (Traducción española de Gallego Díaz.)

Ejemplo 10. *Inscribir en una circunferencia un cuadrilátero* ABCD *circunscriptible, conociendo una diagonal y el ángulo que forma con la otra.*

Situada la diagonal AC sobre la circunferencia, en los puntos medios de los arcos AC concurrirán las bisectrices de los ángulos B y D. Las bisectrices de los ángulos en A y C concurrirán, por su parte, en los extremos del diámetro perpendicular a la otra diagonal cuya dirección se conoce. Por tanto, las bisectrices por A y C pueden trazarse. De donde se desprende el centro de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero y, por tanto, las otras bisectrices, que determinan B y D.

Ejemplo 11. *Trazar por dos puntos dados* A *y* B *una circunferencia que tenga común con otra una cuerda de longitud dada.* (Aplíquese F″) y A″) II, razonando como en el ejemplo 2.° de la lección anterior.)

Ejemplo 12. *Construir un cuadrilátero* ABCD *semejante a otro dado,* A′B′C′D′, *y cuyos lados* AB, BC, CD, DA, *pasen, respectivamente, por cuatro puntos dados* M, N, P, Q.



Los vértices A y C deben situarse en los arcos capaces de α y γ, respectivamente construídos sobre MQ y NP. Como, además, la diagonal AC forma ángulos conocidos con los lados AB, AD y BC, CD, dividirá en forma conocida los arcos MQ y NP (que complementan con los capaces las respectivas circunferencias). Unidos los puntos de división E y F tendremos, pues, la referida diagonal y, por tanto, los vértices A y C, completándose fácilmente el cuadrilátero.

Ejemplo 13. *Construir una circunferencia tangente a otras tres, dos de ellas concéntricas.* (Aplíquese A) VII y II.)

Ejemplo 14. *Trazar una secante a dos circunferencias que forme con ellas ángulos dados.* (Aplíquese C″) II.)

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles son los lugares geométricos análogos a los del apartado E) del § 2, cuando las rectas son paralelas?

2. Trazar una circunferencia que pase a igual distancia de cuatro puntos dados no alineados tres a tres.

3. Trazar una circunferencia de radio dado que sea tangente a otra dada y que intercepte en otra circunferencia, también dada, una cuerda de longitud dada.

5. Idem íd. de radio dado que sea tangente a una recta dada y que biseque una circunferencia dada.

6. Hallar un punto desde el cual se vean dos cicunferencias bajo ángulos dados.

7. Idem desde el cual se vean tres circunferencias bajo ángulos iguales.

8. Inscribir en una circunferencia un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por dos puntos dados.

(V. más ejercicios al final de capítulo.)

LECCIÓN 34.—MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES (MOVIMIENTOS)

1. Carácter invariante de las propiedades de la Geometría métrica.— Si el lector echa una mirada retrospectiva a los distintos capítulos de la Geometría plana, se dará pronto cuenta de que, a partir del capítulo III en que hemos establecido las nociones de movimiento y congruencia, todas las propiedades estudiadas: igualdades entre elementos, entre sus sumas o diferencias, entre sus razones, entre sus medidas y entre productos de medidas, etc., son propiedades que subsisten al aplicar a la figura cualquier movimiento, como también al transformar dicha figura por homotecia o semejanza. En una palabra: *Las propiedades de la Geometría métrica son invariantes respecto del grupo de los movimientos y del grupo de las semejanzas* (*). Asimismo, al estudiar la inversión nos ocupamos preferentemente de las figuras y propiedades que permanecían invariantes en la misma.

Esta idea de grupo de transformaciones y de propiedad invariante respecto del grupo, es la que permitió al geómetra alemán Klein sistematizar y definir elegantemente las distintas Geometrías como los conjuntos de propiedades invariantes de las figuras respecto del grupo de transformaciones característico de cada una de ellas. Esta idea no sólo ha tenido la gran trascendencia teórica que el lector puede suponer, sino que ha permitido descubrir analogías entre amplios tipos de problemas que en la Geometría clásica griega aparecían sin conexión y a los que hoy pueden aplicarse *métodos generales de transformación* que, en muchas ocasiones, ayudan al ingenio de los solucionistas.

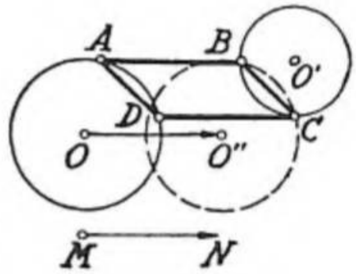
2. Aplicación de las transformaciones a la resolución de problemas.— La idea general de la aplicación de estos métodos es la siguiente: *Obsérvese si es más sencillo resolver el problema transformando la figura, o parte de ella, mediante una de las transformaciones estudiadas* (traslación, giro, simetría, homotecia, semejanza, inversión). *Constrúyase la figura transformada y, una vez obtenida, aplíquese la transformación inversa para obtener la figura primitiva.* La clase de relaciones y de datos que definen la figura sugerirá, con frecuencia, el género de transformación conveniente para que, *dejando invariantes estas relaciones*, transforme los datos o la figura en otra de más fácil determinación.

Algunos ejemplos aclararán mejor el alcance de esta indicación general (**). Con objeto de no hacer interminable la exposición, nos limitaremos a dar las indicaciones precisas para que el lector pueda completar el análisis de planteamiento y la discusión.

(*) En el segundo tomo de esta obra estudiaremos algunas propiedades que permanecen invariantes respecto de grupos de transformaciones más amplias.

(**) Tomamos algunos enunciados del librito citado de *Petersen*.

3. Transformaciones por traslación.—Ejemplo 1.° *Construir un paralelogramo* ABCD *dada la dirección y longitud común* MN *de los lados opuestos* AB *y* DC, *sabiendo que los otros lados* AD *y* BC *son cuerdas de dos circunferencias dadas.*



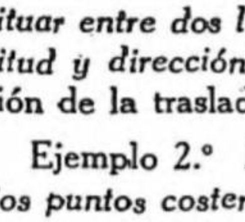
Si aplicamos la traslación $\overrightarrow{MN}$ al lado AD se confundirá con BC y la circunferencia O se transformará en otra O'' fácil de construir, cuyas intersecciones con O' serán los puntos B y C.

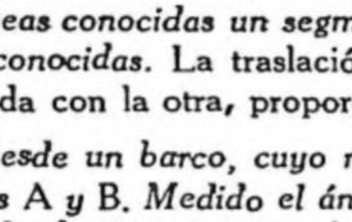
Este método se empleará invariablemente en problemas similares que se reduzcan, en definitiva, a *situar entre dos líneas conocidas un segmento de longitud y dirección conocidas.* La traslación de una de las líneas y la intersección de la trasladada con la otra, proporcionará la solución del problema.

Ejemplo 2.° *Desde un barco, cuyo rumbo y velocidad se conoce, se ven dos puntos costeros* A *y* B. *Medido el ángulo de ambas visuales en dos instantes, con un intervalo de tiempo conocido, hallar en la carta marina* (donde se hallan situados A y B) *la situación del barco en ambas observaciones.*

Aplíquese lo que acabamos de decir a los dos arcos capaces de los ángulos visuales construídos sobre AB.

Ejemplo 3.° *Construir un triángulo,* ABC, *conocidas sus tres medianas.*



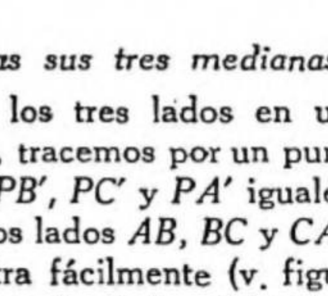


Orientados los tres lados en un mismo sentido, tracemos por un punto P vectores PB', PC' y PA' iguales y paralelos a los lados AB, BC y CA.

Se demuestra fácilmente (v. figura izquierda) que los lados del triángulo $A'B'C'$ son los dobles de las medianas de ABC y que las rectas PA', PB' y PC' contienen a su vez las medianas de $A'B'C'$. De ello se desprende fácilmente la construcción del triángulo $A'B'C'$ y, por tanto de ABC.

La simple traslación de un lado BC permitirá (v. fig. izquierda): *Construir un triángulo dados los dos lados y la mediana que concurren en un vértice* B.

Ejemplo 4.° *Construir un cuadrilátero* ABCD *conocidos los cuatro lados y el segmento* EF *que une los puntos medios de dos lados opuestos* AB *y* CD.

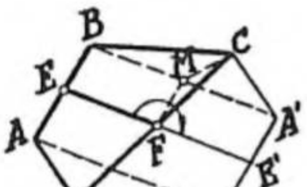


Aplíquese al triángulo ABC la traslación $\overrightarrow{BD}$. El paralelogramo $ACC'A'$ definido por AC y su homólogo $A'C'$ en dicha traslación, tiene lados iguales y paralelos a las diagonales del cuadrilátero dado y, por tanto, dobles de los del paralelogramo $EGFH$, definido por los puntos medios de los lados; de donde resulta que la diagonal AC' del paralelogramo es doble del segmento EF y paralela a él. En resumen, el triángulo ADC' tiene lados conocidos (AD, $DC'=BC$, $AC'=2EF$) una vez construído, los puntos E y F

vendrán determinados por estar en las circunferencias de centros A y D y radios $AB:2$ y $DC:2$ y ser conocido EF en longitud y dirección ($AC'=2EF$) (ver ejemplo 1.°).

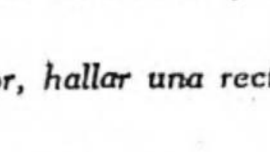
La misma figura permitiría resolver, por ejemplo, las siguientes construcciones. 1.° *Construir un cuadrilátero conocidas las dos diagonales, el ángulo que forman y dos lados opuestos.* 2.° *Idem íd. conocidas las diagonales, el ángulo que forman y dos ángulos opuestos.*

4. Transformaciones por simetría.—El ejemplo que acabamos de resolver (*) tiene solución más directa y sencilla transformando el cuadrilátero por *simetría* alrededor de uno de los puntos E o F. Esta transformación nos ha sido sugerida precisamente por el hecho de ser éstos *puntos medios*, es decir, centros de simetría de un lado.



El cuadrilátero dado y su simétrico respecto de F (por ejemplo) forman un hexágono $ABCA'B'D$ simétrico respecto de F y, por tanto, cuyos lados opuestos son iguales y paralelos. De dicho hexágono se conocen los lados y la diagonal $BA'=EE'=AB'$, así como la CD que pasa por el centro de simetría. Construiremos, pues, el triángulo BCA', de lados conocidos, y a continuación determinaremos el centro de simetría F por la condición de distar de C el segmento $CF=CD:2$ y de M (punto medio de $A'B$) el segmento $MF=EB=AB:2$. Hallado F se hallan fácilmente los vértices A y D simétricos de A' y C, completándose así el cuadrilátero.

Ejemplo 5.° *Dados un polígono* p *y un punto* P *interior, hallar una recta que pase por* P *y que intercepte en* p *un segmento con punto medio en* P.

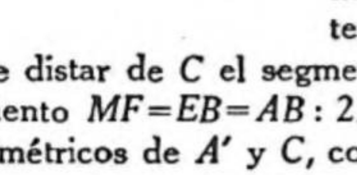


El polígono p simétrico de p respecto de P, corta a p en puntos que unidos con P dan otras tantas soluciones del problema. Análogamente resolverá el lector el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.° *Por el punto de intersección de dos circunferencias, trazar una recta que intercepte, en ambas, cuerdas iguales.*

Veamos ahora ejemplos en los que se aplica la *simetría axial.*

Ejemplo 7.° *Un arriero tiene que ir de un punto* A *a otro* B *situados a un mismo lado de una acequia rectilínea* r, *y abrevar su caballería en dicha acequia durante el trayecto. Hallar el camino más corto que debe seguir*



Transformando B en su simétrico B' respecto de r, lo que no altera la longitud del trayecto $APB=APB'$, el camino más corto que cumplirá las condiciones teóricas del enunciado sería, evidentemente, el segmento AB' lo que determina el punto P.

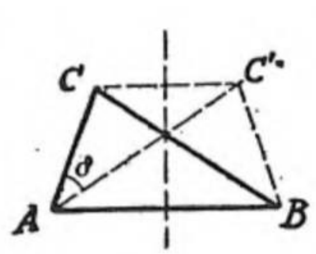
(*) Incluído en las colecciones de *Petersen, Mahler,* ... entre los problemas resolubles por traslación.

Como se ve, los trayectos AP y PB forman ángulos iguales con r, y recíprocamente si estos ángulos son iguales A, P y B' están alineados. Esto prueba que un rayo luminoso al reflejarse en un espejo r para ir de A a B sigue el camino más corto, por cumplir la ley de la reflexión.

Por simetría podrán resolverse, pues, análogamente otros problemas de reflexión luminosa, elástica, etc., como el siguiente:

Ejemplo 8.° *Hallar la trayectoria que debe seguir una bola de billar para dar con otra después de reflejarse en las cuatro bandas en un orden dado.* Hay que aplicar cuatro simetrías.

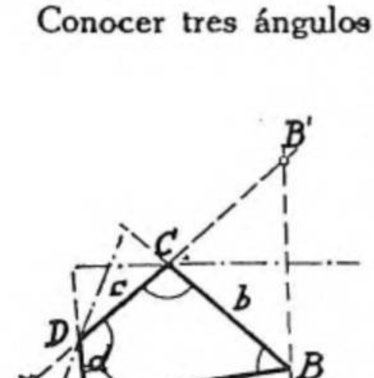
Ejemplo 9.° *Construir un triángulo, conocidos dos lados* a *y* b *y la diferencia de los ángulos opuestos* A *y* B.



Aplicando al triángulo la simetría respecto de la mediatriz de AB se superpondrán en los vértices A y B los dos ángulos y, por tanto, aparecerá su diferencia δ como ángulo del triángulo CAC' que resulta de construcción inmediata, por conocerse dos lados AC y $AC'=CB$ y el ángulo comprendido δ. Hallado este triángulo se determina fácilmente B como simétrico de A respecto de la mediatriz de CC'.

Ejemplo 10. *Construir un cuadrilátero conociendo tres de sus ángulos* A, B, C, *un lado* AB *y la suma de los otros tres.*

Conocer tres ángulos es tanto como conocer los cuatro (lec. 10, § 8).

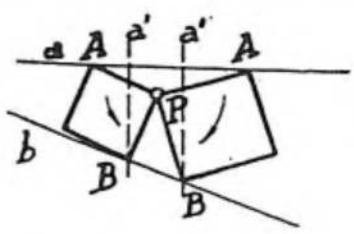


Llevando en las prolongaciones de CD los segmentos $DA'=DA$ y $CB'=CB$, los puntos A' y B' obtenidos son los simétricos de A y B respecto de las bisectrices de los ángulos exteriores en D y C.

Las rectas AA' y BB' son, pues, conocidas por pasar, respectivamente, por A y B y ser conocidos los ángulos del cuadrilátero y, por tanto, las direcciones de las referidas bisectrices.

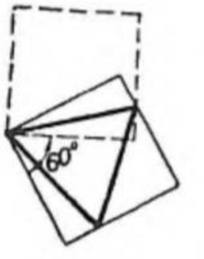
Como $A'B'$ es la suma conocida $b+c+d$, hallaremos su posición situando entre las referidas rectas AA' y BB' este segmento $A'B'$ de longitud y dirección conocidas (ejemplo 1.°). Una vez hallados A' y B' el cuadrilátero se completa fácilmente mediante las mediatrices de AA' y BB'.

5. Transformaciones por giro.—Ejemplo 11. *Construir un cuadrado que tenga un vértice en un punto dado* P *y los dos contiguos* A *y* B *en dos rectas dadas* a *y* b, *que no pasan por* P.



Un giro de un ángulo recto alrededor de P, lleva A sobre B. Si en este giro arrastramos la recta a, la nueva posición a' cortará a b en el punto B buscado, completándose el cuadrado fácilmente. Como el giro puede hacerse en los dos sentidos, habrá dos soluciones, excepto si a y b son perpendiculares.

Análogamente resolverá el lector estos problemas.



Ejemplo 12. *Colocar un triángulo equilátero de modo que sus vértices estén sobre tres paralelas dadas o sobre tres circunferencias concéntricas.*

Ejemplo 13. *Inscribir un triángulo equilátero en un cuadrado de modo que tengan un vértice común.*

Ejemplo 14. *Inscribir en un paralelogramo un rectángulo cuyas diagonales formen un ángulo dado*

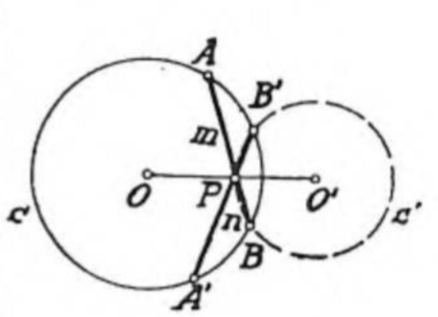
EJERCICIOS

1. Dadas tres rectas a, b, c, trazar un segmento de extremos en a y b, cuya mediatriz sea c.
2. Hallar sobre una recta r un punto P que equidiste de otro punto A en r y de otra recta r'.
3. Construir un triángulo dados dos lados, sabiendo que el ángulo opuesto a uno de ellos es doble del opuesto al otro.
4. Construir un triángulo dados a, $b+c$ y h_b.
5. Construir un rectángulo conocidos el perímetro y una diagonal.
6. Construir un triángulo conocidos a, $\sphericalangle A$ y $b+c$.
7. Idem conocidos a, $\sphericalangle A$, $b-c$.
8. Idem conocidos dos ángulos y el perímetro.
9. Idem conocidos el perímetro, el ángulo A y h_a.
10. Idem conocidos m_a, $\sphericalangle A$ y $b+c$.
11. Idem un trapecio conociendo las bases y las diagonales.
12. Idem las bases, una diagonal y el ángulo que forma con la otra.
13. Idem las bases, un lado y el ángulo de las diagonales.
14. Dada una circunferencia y un punto exterior A, hallar otro punto P alineado con A y con el centro, tal que PA sea igual al segmento de tangente desde P.
15. Construir un triángulo conocidos dos lados y la diferencia de los ángulos opuestos.
16. Dadas dos rectas a, b y una circunferencia c, construir un cuadrado que tenga dos vértices opuestos en a y los otros dos, uno en b y otro en c.
17. Construir un triángulo equilátero con un vértice en un punto del plano y los otros dos sobre dos circunferecias dadas.
18. Dados dos puntos A y A' en dos circunferencias iguales, hallar en ellas dos puntos P y P' tales que los arcos AP y $A'P'$ sean iguales y del mismo sentido y que PP' sea igual a un segmento dado.
19. Construir un triángulo conocidos m_a, h_b, h_c.
20. Idem conocidos m_a, h_a, $\sphericalangle A$.
21. Idem conocidos m_a, m_b y ángulo cm_c.
22. Idem un cuadrilátero, conocidos los cuatro lados y el ángulo de dos lados opuestos.
23. Idem conocidos dos ángulos opuestos, dos diagonales y el ángulo que forman.
24. Idem un cuadrilátero inscriptible en una circunferencia dada, conociendo dos lados opuestos y la suma de los otros dos.
25. Hallar un punto sobre una semicircunferencia, desde el cual se proyecte un cierto arco situado en la semicircunferencia opuesta, según un segmento de longitud dada, sobre el diámetro que separa ambas semicircunferencias.
26. Inscribir en una circunferencia un trapecio del que se conoce la altura y la paralela media.
27. Dadas n rectas ordenadas, construir un n-gono cuyos lados consecutivos tengan aquellas rectas por mediatrices. (Piénsese en la naturaleza de la transformación producto de las n simetrías respecto de dichas rectas.)
28. Análogo poblema, supuestas dadas las rectas bisectrices de los ángulos.
29. Cortar dos circunferencias por una recta de dirección dada que intercepte dos cuerdas cuya suma o diferencia sea dada.

LECCIÓN 35.—MÉTODO DE LAS TRANSFORMACIONES (HOMOTECIA, SEMEJANZA, INVERSIÓN). PROBLEMA DE APOLONIO

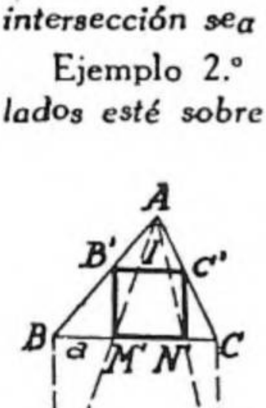
1. Problemas que se resuelven mediante transformaciones por homotecia.—Ejemplo 1.° *Por un punto* P *interior a una circunferencia* c *trazar una cuerda de ésta que quede dividida por el punto en partes proporcionales a dos números o segmentos dados* m : n.

Una homotecia de centro P y de razón $-m : n$ transforma un extremo de la cuerda en el otro. Por lo tanto bastará construir la circunferencia c' homotética de c según dicha razón y hallar sus intersecciones con c.



Análogamente se procederá para: *Trazar por un punto* P *una secante a dos rectas de tal modo que la razón de distancias de* P *a los puntos de intersección sea dada.*

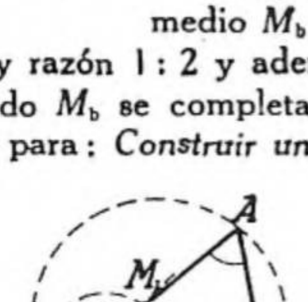
Ejemplo 2.° *Inscribir en un triángulo* ABC *un cuadrado, uno de cuyos lados esté sobre el lado mayor* a *del triángulo*

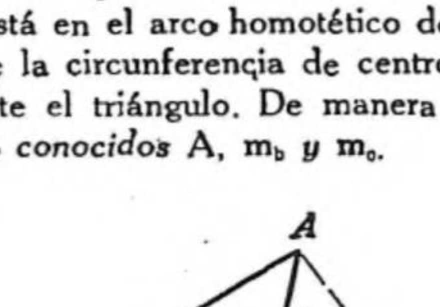


El cuadrado buscado tiene otro lado l paralelo a a. Si le aplicamos una homotecia de centro A (vértice opuesto a a) y en el que sean homólogos l y a, el nuevo cuadrado $BCNM$ se construye fácilmente, y aplicando a éste la homotecia inversa tendremos la solución. Basta proyectar M y N sobre BC desde a para tener el lado $M'N'$ del cuadrado pedido.

Ejemplo 3.° *Construir un triángulo conociendo* a, $\sphericalangle$A *y* m_b.

Dibujando el arco capaz del $\sphericalangle A$ sobre a, el punto medio M_b de AC está en el arco homotético de aquél con centro C y razón $1 : 2$ y además sobre la circunferencia de centro B y radio m_b. Hallado M_b se completa fácilmente el triángulo. De manera análoga se procederá para: *Construir un triángulo conocidos* A, m_b *y* m_c.





Ejemplo 4.° *Construir un triángulo, conocidos dos lados y la bisectriz que concurre con ellos* a, b *y* v_c.

Recordando la figura que sirvió para demostrar la propiedad de la bisectriz (lec. 24, § 1), en ella se observa que $AM : v_a = (a+b) : a$, lo que permite construir aparte AM como cuarta proporcional entre tres segmentos conocidos y, por tanto, podrá construirse el triángulo ACM, del que se deduce inmediatamente el ABC.

2. Problemas que se resuelven mediante transformaciones por semejanza.—Son numerosísimos los problemas geométricos en los que se pide construir una figura *dando* de ella *sólamente una longitud*, consistiendo los restantes datos en *razones* entre otros segmentos de la figura, o *ángulos* de la misma.

Cuando estos últimos datos sean suficientes para determinar la *forma* de la figura, es decir, para construir una figura semejante a la que se pide, se construirá ésta partiendo de una longitud arbitraria y se reducirá o ampliará luego en la razón que exista entre el segmento dado y su homólogo en la figura construída.

Tal es el procedimiento general que puede seguirse para:

Ejemplo 5.° *Construir un n-gono regular, conocido el lado, o la apotema, o el perímetro...*

Bastará inscribir un n-gono regular en una circunferencia cualquiera, dividiéndola en n partes iguales (v. lec. 15) y transformarlo por una semejanza cuya razón sea la que existe entre su lado, apotema, perímetro, ... y el dato.

Ejemplo 6.° *Construir un triángulo, dados dos ángulos y un segmento notable cualquiera de él* (lado, altura, bisectriz, mediana,...), *o la suma o diferencia de dos o más de ellos* (perímetro, ...).

Ejemplo 7.° *Construir un triángulo, dadas las razones entre sus lados y además un segmento notable cualquiera del triángulo, o la suma o diferencia de dos o más de ellos.*

En general, resuelto un problema de construcción de un triángulo en el que se den *dos segmentos y un ángulo*, se pueden resolver por semejanza cuantos problemas se puedan idear dando, en vez de los segmentos, *la razón entre ellos y además otro segmento notable cualquiera del triángulo*. Por ejemplo, del problema del ejemplo 1.°, § 5 de la lec. 33, podemos componer otro de este tipo:

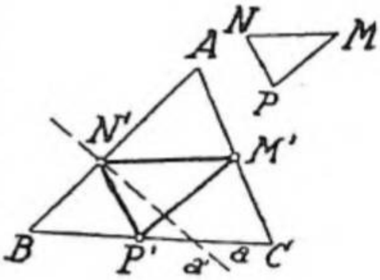
Ejemplo 8.° *Construir un triángulo, sabiendo que tiene un ángulo* A *de* 60° *que el lado opuesto a es el triple del radio del círculo inscrito* ρ *y que el perímetro del triángulo órtico es de* 10 *cm.*

Pese a la apariencia inconexa de los datos, el problema se resuelve de modo sencillo tomando arbitrariamente el radio ρ del círculo inscrito y construyendo el triángulo con los datos A, a y ρ, según lo dicho en el referido ejemplo: construyendo luego el triángulo órtico y su perímetro. Transformando, finalmente, por semejanza este triángulo en la razón entre este perímetro y el dato 10 cm., tendremos el triángulo pedido.

Obsérvese que la solución se funda precisamente en la idea central (fundamental en el método de las transformaciones) de la *invariancia* de las relaciones métricas del enunciado en la transformación empleada (semejanza)

3. Empleo del centro de semejanza.—En problemas, análogos a los que resolvimos a propósito del método de giro, en que se desea la figura solución situada *en posición especial*, puede convenir efectuar una transformación por semejanza, producto de una homotecia por un giro (lec. 20, § 8), de *centro* indicado por la naturaleza del problema.

Ejemplo 9.° *Inscribir en un triángulo otro semejante a un triángulo dado y uno de cuyos vértices sea un punto dado del contorno.*



Sea ABC el triángulo en el que debemos inscribir otro semejante a MNP, y sea dado en el contorno de ABC el punto M' homólogo del vértice M. Si imaginamos aplicado a la figura solución un giro alrededor de M' del ángulo orientado PMN seguido de una homotecia de centro M' y de razón $MN : MP$, el punto P' sobre BC se transformará en N' sobre AB. Si arrastramos, pues, en esta transformación (semejanza de centro M') el lado a que contiene P', su transformado a' deberá cortar al lado AB en el punto N' buscado, con lo que se completará fácilmente el triángulo, si existe tal intersección.

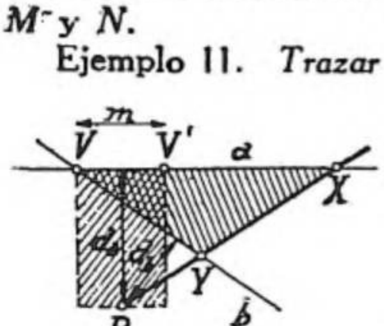
Si no se especifica de qué vértice del triángulo MNP es homólogo el punto M' dado en el triángulo ABC, pueden existir tres soluciones.

Ejemplo 10. *Trazar por un punto* P *una secante a dos rectas dadas* a, b *de tal modo que las distancias de los puntos* X *e* Y *de intersección a dos puntos* A *y* B *respectivamente situados en dichas rectas estén en una razón dada* k, es decir, $AX : BY = k$. (Problema resuelto por Apolonio.)

Tomados dos puntos M, N sobre a y b que cumplan la relación $AM : BN = k$ hallemos el centro O de semejanza directa (lec. 20, § 8) que transforma AM en BN; obtendremos una solución buscando dos puntos X e Y homólogos en esta semejanza y alineados con P. La semejanza de los triángulos OXY y OAB (de ángulos iguales $\sphericalangle XOY = \sphericalangle AOB$ y lados proporcionales) da a conocer el ángulo $\sphericalangle OXP = \sphericalangle OXY = \sphericalangle OAB$, con lo que se determina fácilmente X y, por tanto, Y.

El lector discutirá el número de soluciones según los sentidos en que tome M y N.

Ejemplo 11. *Trazar por un punto* P *no situado en los lados de un ángulo* ab *una recta que determine con éstos un triángulo de área dada.*



Sean $d_a d_b$ las distancias de P a a y b. Sea $m = VV'$ un segmento tal que $m \cdot d_a =$ área dada.

Llamando X, Y las intersecciones de la recta con a y b, y supuesto P situado, por ejemplo, en el ángulo adyacente contiguo a b deberá ser

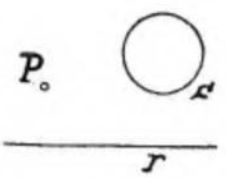
$$\overline{VX} \cdot d_a - \overline{VY} \cdot d_b = m \cdot d_a \text{ (área dada)}$$

$$\text{es decir, } (\overline{VX} - m) d_a = \overline{VY} \cdot d_b \quad \text{o sea} \quad \frac{\overline{V'X}}{\overline{VY}} = \frac{d_b}{d_a}$$

Por ser la razón $d_a : d_b$ conocida, el problema se reduce al anterior.

4. Problemas que se resuelven por inversión.—Al hablar de las aplicaciones de la inversión (lec. 26, § 11) ya vimos como esta transformación permitía resolver elegantemente algún problema de *determinación de circunferencias por condiciones de tangencia o por condiciones angulares.* Transformando las circunferencias de los datos o la circunferencia incógnita en rectas, mediante una inversión convenientemente elegida podía simplificarse notablemente el problema en muçhas ocasiones. Veamos algunos ejemplos más.

Ejemplo 12. *Trazar una circunferencia que sea tangente a una recta dada* r *y a una circunferencia dada* c *y que pase por un punto* P (*no situado en* r *ni en* c).



Podemos elegir dos tipos de inversión para simplificar el problema:

1.° Una inversión de centro P y potencia arbitraria (por ejemplo, la de P respecto a c, que dejará c invariante) reducirá el problema al trazado de las rectas tangentes comunes a las circunferencias transformadas de r y c.

2.° Una cualquiera de las dos inversiones que transformen r en c deja invariante la solución. Esta pasará, por tanto, por el homólogo P' de P en dicha inversión, con lo que el problema se reduce a la determinación de la circunferencia que pasa por P y P' y es tangente a r.

Si P está situado en r el problema se reduce al ejemplo 3.° de la lección 32.

Si P está en c la solución se reduce a la determinación de la circunferencia tangente a dos rectas y que pase por un punto P de una de ellas (lec. 32, § 3).

Ejemplo 13. *Trazar una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias dadas* $c_1 c_2$ *y que pase por un punto* P (*no situado en* c_1 *ni en* c_2).

Análogamente al caso anterior, podemos transformar la figura: 1.°) mediante una inversión de centro P (solución indicada en lec. 26. § 11); 2.°) mediante una de las inversiones que transformen c_1 en c_2, con lo que el problema se reduce a la determinación de una circunferencia tangente a c_1 y que pase por P y P' (homólogo de P en la inversión).

Ejemplo 14. *Trazar por un punto* P *una circunferencia que forme ángulo dado con otras dos circunferencias dadas.*

Transformando los datos mediante una inversión de centro P, el problema se reduce al ejemplo 14, § 5, lección 33.

Ejemplos 15 y 16. *Trazar una circunferencia tangente a una recta dada y a dos circunferencias dadas. Trazar una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas.* (Problema de Apolonio.)

Si dos de las circunferencias dadas tienen un punto común, una inversión de la figura respecto de dicho centro reducirá el problema al de *trazar una circunferencia tangente a dos rectas y una circunferencia dadas*, resuelto en lección 32, § 3, ejemplo 7.°

Si las circunferencias dadas no tienen punto alguno común, podemos considerar el haz que definen en el primer problema, o que definen dos de ellas en el segundo y hallar sus polos (puntos dobles del haz ortogonal). La inversión respecto de uno de ellos transforma el haz ortogonal en un haz de rectas (con vértice en el homólogo del otro polo) y, por lo tanto, las dos circunferencias consideradas, en otras dos ortogonales a dicho haz de rectas, es decir, concéntricas entre sí. En resumen, el problema queda reducido a: *Hallar una circunferencia tangente a otras tres, dos de ellas concéntricas entre sí*, resuelto en lección 33, ejemplo 13.

5. Recapitulación de los problemas de determinación de una circunferencia por condiciones de tangencia.—Con los ejemplos expuestos en esta lección y en las precedentes, creemos haber dado idea suficiente de los recursos y métodos de que puede disponer el lector para la resolución de los clásicos problemas constructivos. Nuevas transformaciones y recursos serán vistos en el tomo II.

Por el interés que tienen y por constituir en conjunto un bello ejemplo de proceso *reductivo*, cerraremos esta lección con un resumen de los problemas de determinación de circunferencias por condiciones de tangencia.

Designemos por p la condición de pasar por un punto, por r la condición de ser tangente a una recta, por c la de ser tangente a una circunferencia. Combinando estas tres condiciones de todos los modos posibles para determinar una circunferencia, obtenemos los diez problemas siguientes, que clasificaremos (siguiendo a Rouché) en estos tres grupos, con indicación del número máximo de soluciones de cada problema:

1.—*ppp* (1 sol.)	5.—*prr* (2 sol.)	8.—*rrc* (8 sol.)
2.—*rrr* (4 sol.)	6.—*pcr* (4 sol.)	9.—*rcc* (8 sol.)
3.—*ppr* (2 sol.)	7.—*pcc* (4 sol.)	10.—*ccc* (8 sol.)
4.—*ppc* (2 sol.)		(Problema de *Apolonio*.)

Soluciones:

1.—Resuelto (lec. 16, § 1) por intersección de las mediatrices de los segmentos determinados por los puntos.

2.—Resuelto (lec. 16, §§ 3, 4) por intersección de las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas.

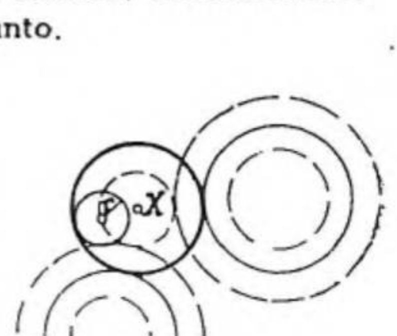
3 y 4.—Resueltos en lección 32, § 2, ejemplos 1.° y 2.°

5 y 8.—Resueltos en lección 32, § 3, ejemplos 6.° y 7.°

6 y 7.—Resueltos en esta lección, ejemplos 12 y 13.

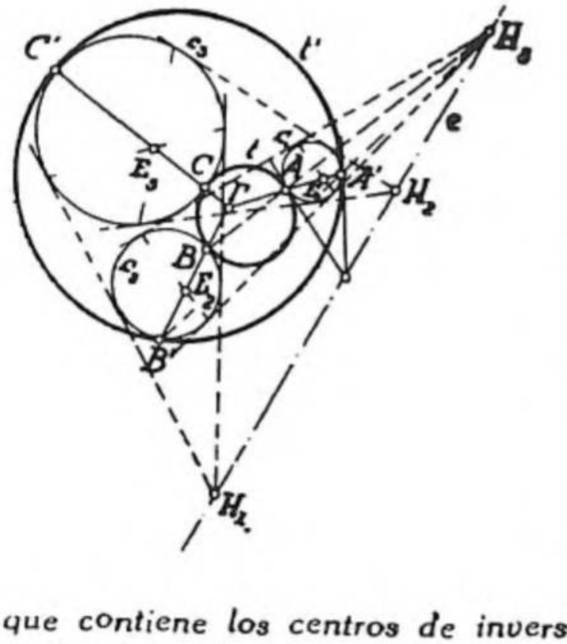
9 y 10.—Resueltos en los ejemplos 15 y 16 de esta lección, reduciéndolos a otros problemas más sencillos del conjunto.

También se pueden resolver los casos 9 y 10 reduciéndolos, respectivamente, a los problemas 6 y 7, sumando o restando (según se desee tangencia interior o exterior) a los radios de las circunferencias mayores el de la menor r, y reemplazando, en el caso 9, la recta dada por las paralelas a distancia r. Se razonará de modo análogo al ejemplo 7.°, lección 32. Esta solución al problema de Apolonio, por reducción de una de las circunferencias a un punto, fué dada por *Vieta* (s. XVI).



6. Solución de Gergonne al problema de Apolonio.—Además de las dos soluciones indicadas al problema de Apolonio (*determinación de la circunferencia tangente a otras tres dadas*), indicaremos, por su elegancia, la debida a Gergonne. Se funda en las propiedades siguientes:

1.° *El centro radical* Γ *de las tres circunferencias dadas* $c_1c_2c_3$ *es centro de inversión de pares de circunferencias solución.* Por ejemplo, lo es de las dos circunferencias: t tangente exteriormente y t' tangente interiormente a $c_1c_2c_3$.



En efecto, la inversión que tiene dicho centro Γ y por potencia de inversión la que tiene dicho punto respecto de las tres circunferencias, las transformará en sí mismas, mientras transformará t en t' y los puntos A, B, C de contacto de t en los $A'B'C'$ de contacto de t', lo que prueba que:

2.° *Los pares de puntos de contacto* AA', BB', CC' *de cada circunferencia con* t *y* t' *deben estar alineados con* Γ.

3.° *El eje radical* e *de* t *y* t' *es la recta que contiene los centros de inversión positiva* $H_1H_2H_3$ *(que lo son también de homotecia) de* $c_1c_2c_3$.

En efecto, las rectas AB y $A'B'$ se cortan en el eje radical de t y t' por unir pares de puntos homólogos en la inversión que transforma t en t' (lec. 25, § 5). Pero asimismo por ser A y B puntos de contacto de una circunferencia tangente exteriormente a c_1 y c_2 son homólogos en la inversión positiva que transforma c_1 en c_2; y lo mismo A' y B'. De donde AB y $A'B'$ se cortan en el centro de inversión positiva H_3 de c_1 y c_2. Como lo mismo podemos repetir con BC y $B'C'$, con AC y $A'C'$, queda demostrado el teorema.

4.° *Las tangentes* t *y* t' *en puntos homólogos* AA', BB' *y* CC' *(es decir, los pares de tangentes comunes a cada dato con* t *y* t'*) se cortan asimismo en el referido eje radical* (lec. 25, § 5), lo que prueba que las cuerdas AA', BB' y CC' pasan respectivamente por los polos $E_1E_2E_3$ de e en c_1, c_2 y c_3.

En resumen: *Los puntos de contacto* A, B, C *y* A', B', C' *de las circunferencias tangentes exterior e interiormente* t *y* t' *están sobre las rectas que unen el centro radical* Γ *de las tres circunferencias dadas* $c_1c_2c_3$ *con los polos respecto de cada una de ellas de la recta* e *que contiene sus tres centros de homotecia positiva.* De aquí se desprende fácilmente la construcción de los puntos A, B, C, A', B', C', y de las circunferencias t y t' que pasan por ellos, demostrándose que recíprocamente dichas circunferencias son efectivamente tangentes a c_1, c_2 y c_3 (*).

Si en lugar de tomar la recta de centros de homotecia positiva, tomamos

(*) Obsérvese que se ha partido de la *supuesta existencia* de t y t'. Puede verse la demostración, que omitimos por brevedad, en *Hadamard*: «Leçons de Géométrie élémentaire», donde el lector hallará además una discusión muy completa del problema.

cada una de las tres rectas que unen un centro de homotecia positiva con dos negativas, tendremos las soluciones correspondientes a tangencia mixta (exterior con una circunferencia dato e interior con las otras dos, o al revés). En total ocho soluciones como máximo, dos para cada recta de partida.

Esta construcción cae en defecto cuando los tres centros están alineados.

EJERCICIOS

1. Inscribir una circunferencia en un sector circular dado.

2. Dada una circunferencia y un punto exterior A, trazar una secante tal que la distancia de A a la intersección más próxima sea igual a la cuerda interceptada.

3. Cortar tres rayos a, b, c de un haz por una recta que pase por un punto P, de tal modo que los puntos A, B, C de intersección cumplan la relación $BA:BC=m:n$.

4. Construir un triángulo equilátero conosidas la suma o diferencia del lado y de la altura.

5. Inscribir un cuadrado en un sector, de modo que dos vértices del cuadrado estén en el arco.

6. Idem en una circunferencia dada, una cruz formada por cinco cuadrados iguales yuxtapuestos. Calcular su área en función del radio.

7. Idem en un paralelogramo, un rombo semejante a otro dado.

8. Idem en un paralelogramo, un rectángulo semejante a otro dado.

9. Cortar un triángulo ABC por una secante MN paralela a BC, que sea media geométrica entre BM y NC.

10. Hallar sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC, dos puntos X, Y, tales que $BX=XY=YC$.

11. Construir un triángulo dados v_a, ρ y ρ_a.

12. Idem un triángulo dadas las tres alturas. (Se hallan $a'b'c'$ inversamente proporcionales a h_a, h_b, h_c. El triángulo de lados $a'b'c'$ es semejante al pedido.)

13. Idem un triángulo dados v_a, $B-C$ y la razón $(b+c):a$.

14. Dividir un triángulo en dos partes equivalentes mediante una recta que pase por un punto dado P no situado en sus lados.

PROBLEMA DE CASTILLÓN. *Inscribir en una circunferencia un n-gono cuyos lados consecutivos pasen por* n *puntos ordenados dados* M, N, P, ..., S.

Supongamos M, N, P, ..., S respectivamente sobre los lados AB, BC, CD, ..., FA. Efectuemos n inversiones consecutivas con centros M, N, P, ..., S y potencias respectivas las de estos puntos respecto de la circunferencia dada; ésta permanecerá *invariable* y el punto A : transformará en sí mismo (después de transformarse sucesivamente en B, C, D, ..., F). Sea M' el homólogo de M en este producto de inversiones (en la primera inversión no varía por ser centro) y S_1 el homólogo de S en la transformación inversa (producto de las inversiones en orden contrario de centros S, ..., N, M). La recta AS_1 se transforma mediante el producto directo en la recta AM'; en efecto, las homólogas sucesivas son circunferencias, la primera de las cuales pasa por el centro M de la primera inversión; pero la penúltima es una circunferencia que pasa por el centro S de la última inversión, luego termina convirtiéndose en recta que pasa por A y por M'.

Ahora bien, si n es par, el producto de todas estas inversiones conserva los ángulos y *su sentido*, luego AM' y AS_1 forman ángulos iguales y del mismo sentido con la circunferencia dada, lo que exige que A esté en línea recta con M' y S_1. En resumen, el punto A se determinará por intersección de la circunferencia dada con la recta $M'S_1$, con lo que queda determinado el polígono.

Si n es *impar* cambia el sentido de los ángulos y la construcción anterior no es válida. *Petersen* (de quien es la idea de aplicar la inversión a este problema) pone en juego en este caso nuevos puntos y una construcción más compleja. Creemos preferible conservar el razonamiento y la construcción *recorriendo el polígono dos veces*, con lo que *no se pierden soluciones*. El problema propiamente llamado «de Castillón» fué propuesto *para el triángulo* por el matemático suizo *Cramer* al italiano *Salvemini*, apodado *Castillón* por el nombre del pueblo toscano en que nació (s. XVIII). En el tomo II obtendremos una solución proyectiva mucho más sencilla

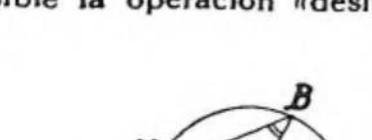
LECCIÓN 36.—EL USO DE LOS INSTRUMENTOS GEOMÉTRICOS CRÍTICA DE LAS CONSTRUCCIONES. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Los instrumentos clásicos y su función.— Recordemos que todas las construcciones realizadas al comienzo de esta obra (Cap. II y III) lo fueron con el uso de *un solo instrumento:* «trozo de cartulina con un borde rectilíneo» en su *triple función* de regla, de transportador de segmentos y de ángulos. A partir del Cap. IV, se introdujo un instrumento nuevo: «el compás», el cual permitía no sólo realizar nuevas operaciones indispensables: trazar circunferencias, hallar sus intersecciones entre sí y con rectas, sino también transportar segmentos y ángulos Desde entonces, todos los problemas resueltos lo han sido mediante el uso exclusivo de la regla y del compás, que son los instrumentos tradicionales de la Geometría griega, y con los cuales hemos efectuado concretamente estas operaciones fundamentales y sólo éstas:

1.ª Trazado de una recta por dos puntos (regla)
2.ª Intersección de dos rectas (regla).
3.ª Trazado de una circunferencia de centro y radio dados (compás).
4.ª Intersección de una recta con una circunferencia (regla y compás)
5.ª Intersección de dos circunferencias (compás).

Hemos visto cuán bellas soluciones se han podido realizar con tan simples recursos. Sin embargo, hay problemas de apariencia trivial que no sólo no han podido ser resueltos, sino que se ha demostrado la imposibilidad de su resolución mediante combinación en número finito de estas operaciones. Tal ocurre con los problemas famosos de la *cuadratura del círculo* (lec. 31, § 9) y el de la *trisección del ángulo* (dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales)

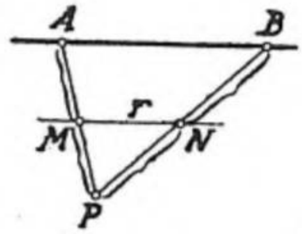
Conviene insistir en que la *imposibilidad* no radica en los instrumentos en sí, sino en la limitación de las operaciones conceptuadas como lícitas para realizar con dichos instrumentos. Así, por ejemplo, si conceptuásemos admisible la operación «deslizar la regla hasta colocar un segmento señalado en ella entre dos líneas (recta y circunferencia) de modo que el borde de la regla pase por un punto dado», el problema de la trisección de un ángulo AOB se resolvería sencillísimamente colocando el segmento MN igual al radio entre la semicircunferencia ABA' y la prolongación del diámetro $AA'\rightarrow$ hasta que la recta MN pase por B En efecto, en esta posición $\sphericalangle BOA = \sphericalangle MBO + \sphericalangle BMO = 3\sphericalangle BMO$; es decir, NMO es el ángulo buscado.



En resumen: carece matemáticamente de sentido hablar de la posibilidad de resolver un problema con un instrumento determinado, si no se concretan cuáles son las operaciones que es lícito efectuar con él. Lo interesante no es, pues el *instrumento* en sí, sino su *función*.

2. Problemas resolubles con la regla y el portasegmentos.—La observación anterior sugiere algunas preguntas interesantes: ¿Cuáles serían los problemas abordables suprimiendo un instrumento o restringiendo su función? Empecemos estudiando cuáles serían, por ejemplo, los problemas resolubles con el «trozo de cartulina de borde rectilíneo» usado solamente como *regla* y como *portasegmentos*; es decir, realizando con él solamente las operaciones siguientes:

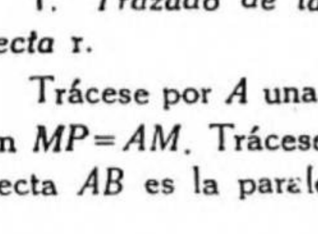
1. Trazar la recta por dos puntos.
2. Intersección de dos rectas
3. Transporte de un segmento.



Veamos la solución de algunos problemas clásicos con este medio.

1. *Trazado de la paralela por un punto* A *a una recta* r.

Trácese por A una secante AM a r y prolónguese AM en $MP=AM$. Trácese por P otra secante PN y prolónguese en $NB=PN$. La recta AB es la paralela pedida. (Demuéstrese.)



2. *Trazado de la bisectriz de un ángulo.*

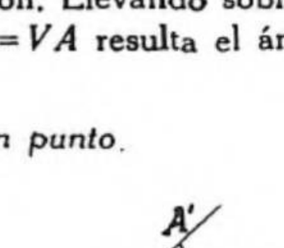
La figura recuerda la construcción (lec. 5.ª, § 10).

3. *Construcción de un ángulo recto sobre una recta dada.*

Sea VA la recta dada. Construído sobre ella un ángulo cualquiera AVA' y su bisectriz VM, la recta AA' de la construcción anterior es perpendicular a dicha bisectriz; sea M el punto de intersección. Llevando sobre VA el segmento $VM'=VM$ y sobre VM el segmento $VA''=VA$ resulta el ángulo recto $VM'A''$ con un lado en la recta dada.

4. *Construcción de la perpendicular a una recta por un punto.*

Se reduce a combinar los problemas 3 y 1



5. *División de un segmento en partes iguales.*

Vale la construcción clásica (lec. 12, § 8), que es una combinación del transporte de segmentos y del problema 1

6. *Otras construcciones.*

Levantar una perpendicular en un punto a una recta equivale a transportar el ángulo recto. Esta operación, unida al transporte de segmentos, permite efectuar el transporte de triángulos rectángulos *de ángulos*, de triángulos y polígonos en general.

He aquí, pues, una operación posible con el solo uso del borde recto de un papel doblado: *Construir un polígono igual a otro dado*. Y como la construcción de cuartas proporcionales es aplicación simple del transporte y del paralelismo (problema 1), también será posible *construir un polígono semejante a otro en una razón dada.*

En cambio no es posible construir un triángulo dados los tres lados que exige la intersección de dos circunferencias, ni aún siquiera problema tan sencillo como la construcción de un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto, si no admitimos como operación válida la colocación de un segmento entre un punto y una recta dadas, mediante el portasegmentos (operación equivalente a determinar la intersección de una recta con una circunferencia y, por tanto, al uso del compás).

En resumen: al restringir el uso de la «cartulina de borde recto» prescindiendo de su empleo como transportador de ángulos, no por ello se restringe el campo de los problemas resolubles, ya que, según hemos visto, con las operaciones 1, 2 y 3 es posible transportar también ángulos.

Más curioso es todavía ver cómo es posible resolver los problemas de la geometría de la regla y el compás sustituyendo el compás por la regla de bordes paralelos, o suprimiendo el uso de la regla.

3. Problemas resolubles con la regla de bordes paralelos.—Operaciones fundamentales:

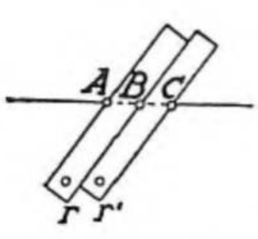
1.ª Trazado de una recta por dos puntos (empleo de un borde).

2.ª Trazado de dos rectas paralelas de separación igual a la anchura a de la regla, una por un punto A y otra por un punto B prefijados (empleo de los dos bordes); tiene dos soluciones, una o ninguna, según que $AB \lesseqgtr a$.

3.ª Trazado de la paralela a una recta a la distancia a.

Se ha demostrado que con este instrumento se pueden resolver todos los problemas de la geometría de la regla y del compás (*) Veamos solamente algunas construcciones.

1. *Duplicación de un segmento mayor que el ancho de la regla.*



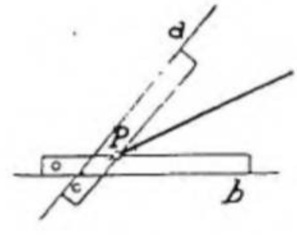
Sea AB el segmento. Apoyando un borde en A y otro en B, trácese la recta r del segundo borde, y en seguida la paralela r' a distancia igual al ancho de la regla y a distinto lado de A. La intersección C de r' con AB determina $AC=2AB$.

2. *Trazado de la paralela por un punto.*

La construcción 1 expuesta al hablar de los problemas solubles con la regla y el portasegmentos puede repetirse aquí, aplicando la construcción que acabamos de dar para la duplicación de los segmentos AM y PN.

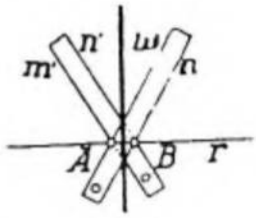
(*) Véase «Questioni riguardanti le Matematiche elementari», tomo II. *Enriques*.

3. *Bisectriz de un ángulo*



Trácense las paralelas a los lados del ángulo situadas en los semiplanos que le definen. Su intersección da un punto P de la bisectriz.

4. *Perpendicular a una recta*



Colóquese la regla en posición oblicua respecto de la recta y señálense los puntos A y B de intersección de ésta con los bordes m y n. Colóquese ahora la regla en la segunda posición de modo que los bordes m' y n' sigan pasando por A y B. Los puntos de intersección de mn' y de $m'n$ determinan la perpendicular. (Demuéstrese.)

Trazada así una perpendicular puede trazarse la perpendicular por un punto mediante 2

5. *División de un segmento en partes iguales.*

La regla de bordes paralelos permite trazar un haz de rectas paralelas equidistantes que será cortado por una recta cualquiera en una sucesión de puntos equidistantes, lo que permite construir fácilmente la sucesión auxiliar de segmentos iguales de la construcción clásica (lec. 12, § 8).

Uso del papel pautado

Trazado el haz de paralelas en papel transparente, la división del segmento en n partes se reduce a aplicar el papel de modo que se apoye una línea en un extremo y la n^a siguiente en el otro, los puntos de intersección intermedios resuelven el problema. Pero esto supone el uso de un instrumento nuevo el papel pautado transparente, o bien el transporte del segmento sobre el papel entre dos de sus líneas, lo que equivale al uso del compás

4. Geometría del compás.—Los problemas que se pueden resolver con el uso *exclusivo del compás* serán aquéllos en cuyas construcciones no se combinen más que las operaciones 3.ª y 5.ª del § 1. No deben, pues, manejarse más que puntos y circunferencias y el concepto *recta* se sustituirá por el de *par de puntos.*

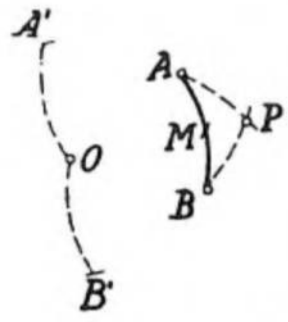
Así la operación primera: Trazado de una recta por dos puntos, se reduce aquí a este problema: 1.° Dados dos puntos, averiguar con el compás si otro punto está en línea recta con ellos o bien situar puntos en línea recta con otros dos.

La segunda operación: Intersección de dos rectas, se reduce aquí a este problema: 2.° Dados dos pares de puntos A, B y C, D, hallar con el compás el punto de intersección de las rectas que determinan.

Por último, la cuarta operación: Intersección de recta y circunferencia se reduce al problema: 3.° Dados dos puntos A y B, hallar otro alineado con ellos en una circunferencia dada.

Veamos cómo es posible reducir estos problemas a trazados e intersecciones de circunferencias. Tomaremos como fundamentales en esta exposición las dos construcciones siguientes de Mascheroni (*).

1. *Determinación del punto medio de un arco* AB (radio *r*, centro *O*).



Con centros en A y B describiremos dos arcos OA', OB' sobre los que llevaremos

$$OB' = OA' = AB = c$$

Los puntos así obtenidos A' y B' están en una paralela a AB por O, pues en virtud de la construcción resulta OB' y OA' paralelas ambas a AB por O y, por tanto, coincidentes entre sí Por ser A equidistante de O y A', la proyección ortogonal de A sobre OA' será el punto medio de OA', de donde

$$\overline{AB'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OA'}^2 + 2 \cdot \overline{OB'} \cdot \frac{1}{2} OA'$$

es decir

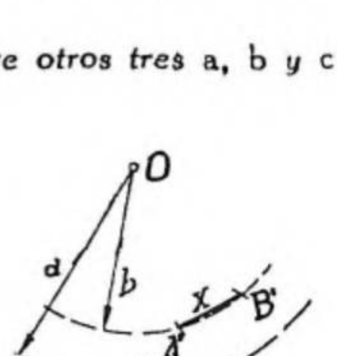
$$\overline{AB'}^2 = a^2 + r^2 + 2 \ a \ \frac{a}{2} = 2\,a^2 + r^2$$

Si con este radio AB' trazamos circunferencias de centros A' y B', cada punto P de intersección distará de O un segmento, cuyo cuadrado es

$$\overline{OP}^2 = \overline{AB'}^2 - a^2 = a^2 + r^2$$

es decir, OP, a y r forman triángulo rectángulo por verificar el teorema de Pitágoras, de manera que llevando un arco de radio OP con centro en A' tendremos por intersección con el arco AB el punto M de la perpendicular por O, es decir, el punto medio M buscado.

2. *Determinación del segmento cuarto proporcional entre otros tres* a, b *y* c *dados por sus extremos.*—Trácense dos circunferencias concéntricas de radios a y b Llévese la cuerda $c = AB$ sobre la primera, y con centro en sus extremos y en el mismo sentido de rotación, llevaremos dos arcos de radios AA' y BB' iguales que determinarán en la segunda circunferencia los extremos $A'B'$ del segmento buscado.



La demostración es inmediata, teniendo en cuenta la igualdad de los ángulos de rotación AOB y $A'OB'$.

No hay que decir que la misma construcción sirve para hallar terceras proporcionales.

Con estos elementos podemos resolver los problemas planteados.

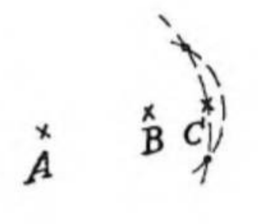
(*) Ver su ingeniosísima «Geometría del compás», que tratamos de sintetizar aquí en brevísimo espacio.

1. *Averiguar si tres puntos* A, B, C *están en línea recta.*

Trácese un arco de centro A por C y córtese por otro de centro B. El pun- C tiene que ser el punto medio del arco interceptado.

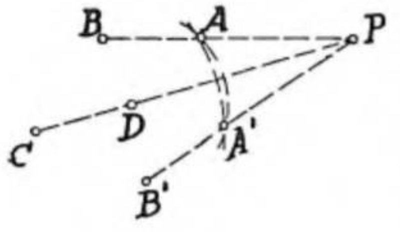
La misma idea permite resolver el problema del

Transporte de un segmento.—Hallar un punto C alineado con AB, tal que AC sea igual a un segmento dado a. Basta trazar con radio a y centro A un arco; cortarlo por otro de centro B y hallar el punto medio del arco interceptado.



Con esta construcción podemos efectuar sumas y restas en la recta; podemos duplicar un segmento, y también hallar su mitad (por una tercera proporcional) y, por tanto, el punto medio.

2.° *Hallar el punto de intersección de dos rectas* AB *y* CD.



Los dos arcos de círculo con centros en C y D que pasan por A se cortan también en A', simétrico de A respecto de la recta CD. Determinemos análogamente B' simétrico de B. La intersección de AB y CD es la misma de AB y $A'B'$, y para hallarla basta llevar a partir de B sobre BA un segmento BP, cuarto proporcional entre los segmentos $BB'-AA'$, BA y BB' Si A y B están separados por la recta CD, cámbiese el signo — por +.

La construcción cae en defecto si BA es perpendicular a CD; pero en este caso basta hallar el punto medio del segmento AA' determinado por A y su simétrico respecto de CD.

3.° *Intersección de una recta* AB *con una circunferencia.*

Por último, la intersección de una recta y de una circunferencia se reduce a la de dicha circunferencia y su simétrica respecto de la recta, simétrica que se trazará hallando como antes el simétrico del centro y tomando el mismo radio (excepto cuando la recta sea diámetro, en cuyo caso el problema es equivalente al de transporte de un segmento, ya resuelto).

Completado el cuadro de las construcciones simples que caracterizan la geometría clásica, llegamos a la conclusión siguiente:

Todos los problemas clásicos de la geometría euclídea son resolubles con el uso exclusivo del compás, si se manejan pares de puntos en vez de rectas.

Podemos, pues, *determinar por puntos* cuantas figuras nos enseña a construir la geometría clásica de la regla y el compás, *sin necesidad de utilizar la regla.*

5. Exigencias prácticas en la técnica de las construcciones.—¿Quiere significar la conclusión anterior que tengamos que proscribir el uso de la regla? Evidentemente no, ya que salta a la vista la complicación que adquieren las construcciones con tal restricción (*). Pues bien, del mismo modo podemos preguntar: ¿por qué ceñirnos entonces al uso exclusivo de la regla y del compás?

Conocida es, por ejemplo, la simplificación que introduce en el trazado de paralelas y perpendiculares el uso de la escuadra o mejor del juego de escuadra y regla; en la construcción de figuras congruentes, el uso del papel transparente; en la contrucción de figuras simétricas, la operación de doblar el papel; etc.

Es, pues, de aconsejar al geómetro práctico y, en especial al estudiante de ingeniería, que, lejos de restringir el uso de los instrumentos, los amplíe y se valga de cuantos recursos pueda echar mano para adoptar en cada caso la construcción que responda mejor a las exigencias *prácticas* de *sencillez y exactitud* y que la intuición, cuando no la misma práctica, suelen indicar certeramente.

6. **Geometrografía.**— Sencillez y exactitud, aun cuando son cualidades distintas, suelen ir bastante aparejadas, ya que la complicación de las operaciones entraña, naturalmente, acumulación de causas de error. Esta circunstancia indujo a Lemoine (**) a formular una teoría excesivamente simplista para traducir en resultados numéricos la estimación de la sencillez y exactitud de los trazados, teoría a la que dió el nombre de *Geometrografía* y que ha caído rápidamente en el olvido por su escaso fundamento teórico.

Para dar ligera idea de esta teoría, consignemos rápidamente sus convenios fundamentales.

Se designan con los símbolos: R_1 la operación de hacer pasar el borde de la regla por un punto; por R_2 la de trazar una recta siguiendo el borde de la regla; por C_1 la de apoyar una punta de compás en un punto prefijado; por C_2 la de apoyar una punta de compás sobre una recta; por C_3 la de trazar una circunferencia.

Toda construcción se compone de un número finito de operaciones de esta índole y se representa por un polinomio de la forma

$$l_1R_1+l_2R_2+m_1C_1+m_2C_2+m_3C_3$$

donde los coeficientes $l_1l_2m_1m_2m_3$ son los numeros de veces que se repiten las operaciones a que afectan.

Así, la unión de dos puntos se representan por $2R_1+R_2$.

El trazado de una circunferencia con un centro dado y de radio igual a un segmento dado, se representa por $3C_1+C_3$.

La construcción clásica de la perpendicular por un punto a una recta (Lección 14) vendrá expresada por $2R_1+R_2+3C_1+3C_3$.

Y así sucesivamente.

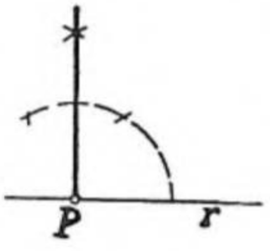
Pues bien, M. Lemoine adopta como *coeficiente* o *índice de sencillez* la suma de los coeficientes $l_1+l_2+m_1+m_2+m_3$ y como *índice de exactitud* la de $l_1+m_1+m_2$. Dicho se está que cuanto mayores son los índices, menores se conceptúan la sencillez y la exactitud.

Apliquemos esta evaluación a las siguientes construcciones de la perpendicular a una recta r por uno de sus puntos P.

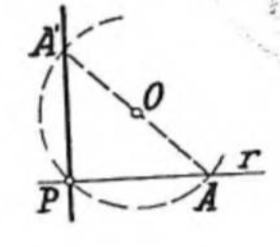
(*) Las construcciones indicadas en la rápida ojeada anterior son susceptibles de simplificaciones notables, si se prescinde de reducirlas unas a otras. El libro de *Mascheroni* contiene soluciones bellísimas, que omitimos por brevedad. Alguna construcción, además, como la cuarta proporcional, *aventaja en sencillez y exactitud a la clásica*. Pero en conjunto, las construcciones son más complicadas, como es natural.

(**) *M. Lemoine*: «Sur la Géométrographie». Nota IV del «Traité de Géométrie», de *Rouché Combérouse*.

La de la izquierda (que reproducimos de un cuaderno de dibujo) tiene por fórmula $2R_1+R_2+4C_1+4C_3$. Sencillez, 11; exactitud, 6.

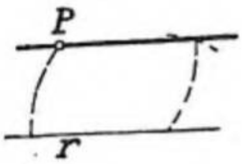


La de la derecha es la construcción clásica: Trazar una circunferencia *cualquiera* que pase por P; unir la intersección A con el centro O, y unir el punto A', diametralmente opuesto, con P. Su evaluación da $4R_1+2R_2+C_1+C_3$. Sencillez, 8; exactitud, 5.

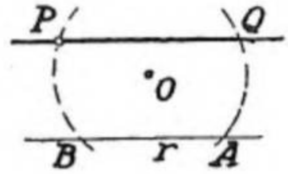


El resultado concuerda con la intuición y con la práctica, que se pronuncian claramente en favor de la construcción segunda.

Comparemos, análogamente, las siguientes construcciones de la paralela por un punto P a una recta r.



La de la izquierda es la clásica, de fórmula $2R_1+R_2+5C_1+3C_3$; sencillez, 11; exactitud, 7. La de la derecha (trazado por P de una circunferencia de centro arbitrario O secante de r; construcción con centro en A de un arco de radio $AQ=BP$ y unión de P y Q) tiene por fórmula $2R_1+R_2+4C_1+2C_3$; sencillez, 9; exactitud, 6, lo que indica su mayor valor práctico.



Sin embargo, no todo es tan simple como se admite en estos convenios, pues resulta de todo punto *inadmisible* que se juzgue la exactitud de las construcciones *independientemente de los ángulos y de las distancias que intervienen en la construcción*. Es de sentido común que si un punto viene determinado por intersección de dos rectas que se cortan *muy oblicuamente*, un pequeño error en una de ellas ocasionará un error considerable en la posición del punto. Por tanto, *un punto vendrá determinado por intersección de dos rectas o de dos líneas en general, tanto más exactamente cuanto más se acerque el ángulo de las mismas a un ángulo recto.*

Análogamente: *Una recta determinada por dos puntos será construída tanto más exactamente cuanto mayor sea la distancia entre dichos puntos.*

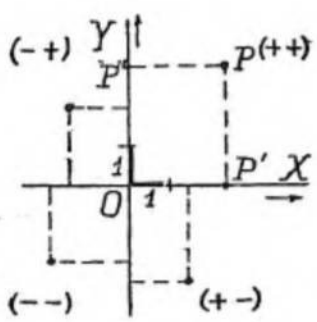
Por ejemplo, la segunda construcción de la paralela, que acabamos de indicar, perdería todo su valor práctico si el punto Q resultara muy próximo a P.

Para evaluar rigurosamente la exactitud de una construcción cuyo resultado final sea la obtención de un punto o de una recta (punto y ángulo) sería preciso poder averiguar un límite de error en la posición del punto buscado (radio de una circunferencia que lo contenga) o en los elementos que determinan la recta incógnita (error de posición de uno de sus puntos y error angular) conocidos los límites de error de los datos; problema complejo, en general, y que exigiría manejo de recursos que escapan al alcance relativamente elemental de este libro.

7. Introducción a los métodos de la Geometría analítica.—El examen crítico de las construcciones que acabamos de realizar ha puesto de relieve junto a la imposibilidad de resolver ciertos problemas con determinados instrumentos, la inevitable inexactitud de los resultados obtenidos con los procedimientos gráficos, y, por tanto, la necesidad de nuevos recursos más generales y más exactos para la resolución de los problemas geométricos, recursos que sólo el Análisis puede aportar.

Al matemático y filósofo francés Descartes corresponde la gloria de haber introducido por vez primera de un modo sistemático los métodos algebraicos en el planteamiento y resolución de los problemas gemétricos, y de haber puesto de manifiesto la conexión íntima que existe entre la naturaleza de un lugar de puntos, definido por cierta propiedad geométrica, y la de la ecuación que liga las distancias de dichos puntos a ciertas rectas de referencia de la figura. El fué, pues, el iniciador de la llamada *Geometría analítica*, rama de la matemática que se ocupa del estudio de los problemas geométricos mediante los recursos del análisis. Sin pretensión de dar aquí ni siquiera una idea del alcance de sus métodos, nos interesa exponer muy brevemente algunos resultados y conceptos elementales por lo que puedan sernos útiles en este tomo y en el siguiente (*).

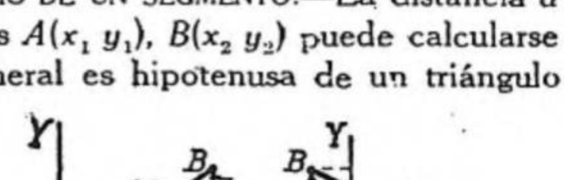
COORDENADAS CARTESIANAS DE UN PUNTO.—Elegidos en el plano dos ejes fijos OX, OY, perpendiculares entre sí en el punto O, que llamaremos *origen de coordenadas*, todo punto P del plano vendrá determinado por sus dos proyecciones $P'P''$ sobre dichos ejes. Elegida además una unidad y un sentido positivo en cada eje, las referidas proyecciones vendrán a su vez determinadas por las medidas de los segmentos orientados OP', OP'' con sus signos, medidas que se llaman, respectivamente, *abscisa* x y *ordenada* y (y ambas coordenadas) del punto P respecto de dichos ejes.



Recíprocamente, a todo par de coordenadas dadas en un orden (x, y) corresponderá un punto del plano y uno sólo, que tiene dichas abscisa y ordenada. Los signos de dichas coordenadas indicarán el cuadrante en que está situado el punto respecto de los ejes (v. fig.).

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.—La distancia d entre dos puntos dados por sus coordenadas $A(x_1\ y_1)$, $B(x_2\ y_2)$ puede calcularse fácilmente, puesto que en el caso más general es hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $|x_1-x_2|$, $|y_1-y_2|$

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



Las coordnadas ξ, η del punto medio M del segmento AB pueden hallarse asimismo fácilmente promediando las coordenadas de sus extremos. En efecto (v. figs.), $\xi=(x_1+x_2):2$, $\eta=(y_1+y_2):2$

8. Carácter algebraico de las construcciones con regla y compás.— ECUACIÓN DE LA RECTA.—La abscisa y la ordenada de un punto cualquiera de una recta que pasa por el origen, tienen una razón que es independiente del punto elegido; es decir, si x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, ... son las coordenadas de varios puntos alineados con el origen se tendrá (Thales):

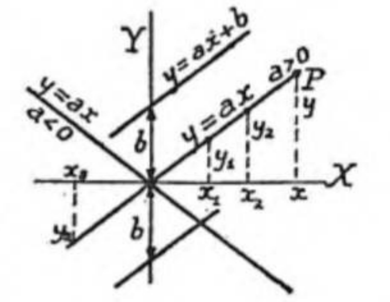
$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\ldots=a \quad \text{(constante).}$$

Por tanto, las coordenadas x, y de todo punto P de la recta satisfacen a la ecuación $y=ax$, y recíprocamente, todo par de valores x, y que satisfagan a esta ecuación pertenecerán a dicha recta. El lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación

$$y=ax \qquad [1]$$

(*) Para la mayoría de los lectores son resultados ya conocidos por Bachillerato.

es, pues, una *recta que pasa por el origen*. Si $a>0$ esta recta está en los cuadrantes cuyas coordenadas tienen signos iguales (+ +) y (— —), y si $a<0$ está contenida en los otros dos (+ —) y (— +).



Añadiendo al segundo miembro de la ecuación anterior una constante b (positiva o negativa), es decir, aumentando o disminuyendo en un valor constante todas las ordenadas, originamos una traslación de todos sus puntos y, por consiguiente, el nuevo lugar geométrico seguirá siendo rectilíneo. La ecuación

$$y=ax+b \qquad [2]$$

representa, pues, también una recta. Y, en general, todo par de valores de x, y que satisfagan a una ecuación de primer grado de la forma

$$Ax+By+C=0 \qquad [3]$$

son coordenadas de puntos de una recta, puesto que basta despejar y para ponerla en la forma anterior.

Si $C=0$ esta recta pasa por el origen. Si $A=0$ esta recta es paralela al eje x, puesto que se reduce a $y=-\dfrac{C}{B}$ (constante). Análogamente si $B=0$ representa una paralela al eje y.

RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS. PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS.—Expresando que la recta [3] pasa por dos puntos dados x_1y_1, x_2y_2 se obtienen dos nuevas ecuaciones $Ax_1+By_1+C=0$, $Ax_2+Ay_2+C=0$, y entre éstas y la [3] se pueden eliminar los coeficientes A, B, C, con lo que resulta

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

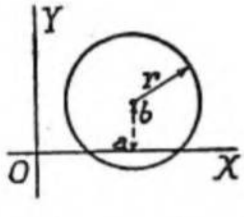
Ecuación de *primer grado* en x, y que representa la recta que pasa por los dos puntos dados.

Dadas dos rectas de ecuaciones $Ax+By+C=0$, $A'x+B'y+C'=0$, las coordenadas de su punto de intersección se obtendrán resolviendo el sistema que ambas ecuaciones constituyen. En resumen:

Todo problema de unión de puntos y de intersección de rectas se traduce, pues, analíticamente en la resolución de ecuaciones o sistemas de primer grado.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA.—Si a, b son coordenadas del centro y es r el radio, expresando que la distancia de todo punto de coordenadas x, y

de la circunferencia dista de (a, b) la distancia r, tendremos la ecuación de la circunferencia



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

o sea

$$x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

que es de segundo grado en x, y.

Para hallar el punto de intersección de esta circunferencia con una recta [3] bastará resolver el sistema que ambas ecuaciones constituyen, lo que conducirá a una ecuación de segundo grado en una de las incógnitas, una vez eliminada la otra.

Si queremos hallar la intersección de la circunferencia anterior con otra

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2, \quad \text{o sea} \quad x^2+y^2-2\,a'x-2\,b'y+a'^2+b'^2-r'^2=0$$

convendrá restar previamente ambas ecuaciones, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado que unida a una de ellas dará un sistema equivalente que se resuelve como el anterior.

En resumen: *Las construcciones típicas del compás: trazado de circunferencias, intersección de rectas y circunferencia, intersección de dos circunferencias, se resuelven algebraicamente mediante ecuaciones de segundo grado.*

Como consecuencia de todo lo dicho, resulta: *Todos los problemas clásicos de la geometría, resolubles con la regla y el compás, se pueden resolver algebraicamente mediante una sucesión finita de ecuaciones de primero o de segundo grado* (*).

Este resultado es de la mayor importancia no sólo en cuanto hace ver la posibilidad de obtener algebraicamente las coordenadas de los puntos construídos, con toda la exactitud que se desee, sino por cuanto da un método para averiguar si un problema es resoluble o no con la regla y el compás, pues bastará plantearlo en ecuaciones y ver si éstas son de segundo grado o pueden reducirse a un conjunto finito de ellas. Pero éste es problema netamente algebraico que por el momento no vamos a tratar

EJERCICIOS (sobre todo el capítulo)

1 Construir una circunferencia de radio dado que pase por un punto dado e intercepte sobre una recta dada un segmento de longitud dada.

2. Idem de radio dado que intercepte un segmento de longitud dada sobre una recta dada y se vea desde un punto dado P bajo un ángulo dado.

3 Lugar de los baricentros de los triángulos de base fija y ángulo opuesto constante.

4 Construir un triángulo dados a, r y m_b, o bien a, $\sphericalangle A$ y m_b.

(*) V. final del § 9 de la lección 31. Se supone naturalmente determinados los datos por ciertos segmentos o por sus medidas (abcisa y ordenada de puntos de las rectas, o de los centros de las circunferencias, radios de las mismas...) y *no por medidas angulares*. Dar medidas angulares supone gráficamente la necesidad de acudir a un instrumento nuevo: el *semicírculo graduado*, y analíticamente al uso de *tablas trigonométricas*

5. Hallar sobre una recta dada un punto P, tal que los triángulos PAB y PCD, que resultan de unir P con dos pares de puntos dados AB y CD sean equivalentes

6. Trazar una circunferencia ortogonal a dos dadas y que sea bisecada por una tercera también dada.

7. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos, A y B y que sea bisecada por otra circunferencia dada.

8. Trazar una circunferencia que biseque una dada y sea ortogonal a otras dos circunferencias dadas.

9. Idem que biseque dos circunferencias dadas y sea ortogonal a una tercera.

10. Idem que biseque dos circunferencias dadas y sea bisecada por otra.

11. Idem que biseque tres circunferencias dadas.

12. Construir un triángulo dados a, $\sphericalangle A$ y el segmento s, tal que $s^2=b^2+c^2$.

13. Construir un triángulo dados a, h_a y el segmento s del ej. anterior.

14. Dado un triángulo ABC, hallar un punto P de su plano, tal que las áreas $[ABP]$, $[BCP]$ y $[CAP]$ sean proporcionales a tres segmentos o números dados m, n, p.

15. Construir un triángulo conocidos a, m_a y el segmento d, tal que $d^2=b^2-c^2$.

16. Idem íd. conocidos a, $\sphericalangle A$ y el segmento d del ej. anterior. Caso $A=90°$.

17. Dado un cuadrilátero, hallar un punto en su interior, tal que la suma de distancias a dos lados consecutivos valga un segmento dado y cuya razón de distancia a los otros dos sea dada.

18. Construir un triángulo rectángulo conocida la hipotenusa y el radio de la circunferencia inscrita.

19. Inscribir en un triángulo dado un paralelogramo de perímetro dado y que tenga un ángulo común en el triángulo.

20. Costruir un triángulo conociendo r, h_a y $B-C$.

21. Construir un cuadrado cuyos lados pasen por cuatro puntos dados.

22. Construir un rectángulo cuyos lados pasen por cuatro puntos dados, sabiendo la longitud de uno de ellos.

23. Trazar una tangente a un arco de modo que la razón de distancias del punto de contacto a los de intersección de dicha tangente con las prolongaciones de los radios extremos tenga un valor dado.

24. Inscribir, en un paralelogramo dado, un rombo de área dada.

25. Construir un triángulo semejante a otro dado cuyos vértices se apoyen en tres paralelas dadas.

26. Inscribir en un cuadrado un triángulo semejante a otro dado y que tenga un vértice común con el cuadrado.

27. Idear una construcción para *trasladar*, con la regla de bordes paralelos, un segmento AB paralelamente a sí mismo, a un nuevo origen A' exterior a la recta AB.

28. Idem para *girar* AB hasta colocarlo sobre otra semirrecta dada AM.—*Consecuencia:* Con la regla de bordes paralelos se pueden *transportar segmentos*, y combinando el transporte de segmentos con el trazado de perpendiculares (§ 3) se pueden transportar triángulos rectángulos, y, por tanto, también *ángulos* y *polígonos en general*.

29. Dadas dos rectas y un punto O, trazar por él otra recta cuyas intersecciones A y B con las dadas verifiquen la relación $OA \cdot OB=a^2$ (a dado).

30. Idem íd. para una recta y una circunferencia o para dos circunferencias.

31. Construir una circunferencia que corte a tres rectas dadas bajo tres ángulos dados.

32. Dadas tres circunferencias que se cortan en un punto, hallar otra circunferencia que las corte bajo ángulos dados.

33. Trazar un n-gono circunscrito a una circunferencia dada cuyos vértices consecutivos estén en n rectas dadas en un orden prefijado. (Transf. por polaridad.)

Capítulo XII.—ENLACE, ORDENACION Y SENTIDO EN EL ESPACIO

LECCIÓN 37.—INCIDENCIA Y SEPARACIÓN EN EL ESPACIO

1. Propiedades de incidencia.—En la lección primera establecimos ya las propiedades fundamentales de incidencia en el espacio, a saber:

Fuera de cada plano existen puntos. (Ax. I, 2.)

Tres puntos no alineados determinan un plano que pasa por ellos. (Ax. I, 4.)

Si una recta tiene dos puntos en un plano, toda ella está en el plano (Ax. I, 5.)

Demostramos también los primeros teoremas sobre determinación del plano: *Una recta y un punto exterior determinan un plano que pasa por ellos. Dos rectas secantes determinan un plano que las contiene.* Podemos añadir ahora: *Dos rectas paralelas determinan un plano* (el que por definición las contiene).

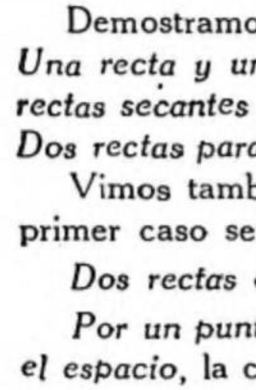
Vimos también que dos rectas pueden ser coplanarias o no serlo, y en el primer caso ser secantes o no. Resumiendo:

Dos rectas en el espacio se cortan, o son paralelas o se cruzan.

Por un punto exterior a una recta existe una paralela y una sola a ella en el espacio, la contenida en el plano único, que el punto y la recta determinan.

2. Axioma de división del espacio.—Análogamente a como una recta divide al plano, un plano divide al espacio en dos regiones de acuerdo con el siguiente axioma, que resume las propiedades intuitivas de esta separación:

Ax. II, 3.—*Todo plano α establece una clasificación de los puntos del espacio, no contenidos en él, en dos únicas clases o regiones, tales que:*



Todo punto exterior al plano pertenece a una u otra región. El segmento que une dos puntos $\left\{\begin{matrix} A, C \\ A, B \end{matrix}\right\}$ *de* $\left\{\begin{matrix} \text{la misma} \\ \text{distinta} \end{matrix}\right\}$ *región* $\left\{\begin{matrix} \text{no corta} \\ \text{corta} \end{matrix}\right\}$ *al plano α.*

Se llama *semiespacio* al conjunto de puntos de cada región más el conjunto de los puntos del plano que la limita, llamado *borde*.

Los puntos del plano pertenecen, pues, a ambos semiespacios, y según se consideren en uno u otro semiespacio, diremos que definen una *cara* u otra del plano. En este sentido diremos que el plano es superficie de *dos caras*.

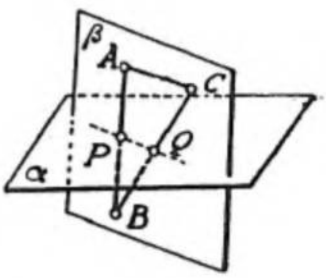
Al decir que un segmento corta a un plano entendemos que tiene en éste un punto interior (distinto de los extremos). Aplicando el principio de reciprocidad, resulta:

Si el segmento AB $\left\{\begin{array}{c}\textit{corta}\\ \textit{no corta}\end{array}\right\}$ *a un plano α, los puntos* A *y* B *están en* $\left\{\begin{array}{c}\textit{distinto}\\ \textit{el mismo}\end{array}\right\}$ *semiespacio, limitado por él.*

También se dice que están los puntos a distinto o igual *lado* del plano, respectivamente; y en el primer caso que están *separados* por el plano.

COROLARIOS.—*Si dos puntos están en un mismo semiespacio también están en él todos los puntos del segmento que determinan.* (Convexidad del semiespacio.)

Si un plano α separa un par de puntos A, B *de una terna* A, B, C *de puntos no contenidos en el, separa tambien otro par* (por ejemplo, *B, C*), *pero no el tercero* (A, C). En efecto, *C* está en uno y sólo uno de los dos semiespacios definidos por α, el que contiene *A* o el que contiene *B*.



3. Intersección de dos planos.—*Dos planos con un punto común* P *tienen una recta común que pasa por dicho punto.*

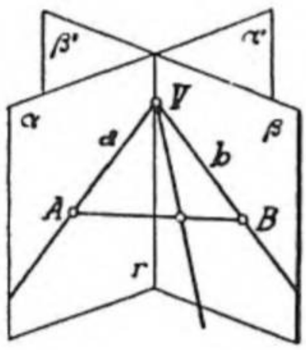
Sea *P* el punto común a los planos α y β: bastará probar que tienen otro punto común *Q*. Tracemos por *P* una recta en β; elijamos en ella dos puntos *A* y *B* a distinto lado de *P* y un tercer punto *C* del plano β, exterior a dicha recta. Si *C* está en α el teorema está demostrado. Si no, aplicando el corolario anterior a la terna *A, B, C*, resulta que uno de los lados *AC* o *BC* corta a α en un punto *Q* común a los dos planos, distinto de *P*. La recta *PQ* será, pues, común a los dos planos (Ax. I, 5). que se llaman *secantes* entre sí.

En algunos sistemas de axiomas *se admite axiomáticamente la existencia de un segundo punto común* a los dos planos (Hilbert, por ejemplo); y entonces la propiedad que aquí hemos enunciado como *axioma de división del espacio* aparece como consecuencia del axioma de la división del plano. Uno u otro camino establecen en definitiva el carácter tridimensional del espacio considerado, según vimos en la lección primera. El sistema de Hilbert postula menos, pero conduce a deduciones mucho más largas.

De este teorema y del Ax. II, 3, resulta: *Dos planos secantes se dividen mutuamente en dos semiplanos contenidos en los respectivos semiespacios que cada plano determina.*

4. Concepto de diedro.—Dados dos semiplanos α, β con un borde común *r*, pero situados en planos distintos, llamaremos *diedro convexo* al conjunto de puntos comunes a los semiespacios limitados por los planos de α y β, que contienen, respectivamente, los semiplanos β y α. La recta *r* se llama *arista* del diedro y los semiplanos α y β se llaman *caras* del mismo:

En virtud de las propiedades anteriores pertenecerán simultáneamente a ambos semiespacios, y por tanto al diedro, todos los puntos de los segmentos AB que unen dos puntos de sus caras, exteriores a la arista, así como todos los rayos de los ángulos convexos definidos por dos semirrectas a, b de origen común V en la arista, y situadas en las caras.



Dos planos secantes dividen al espacio en cuatro diedros convexos. Si α, α' y β, β' son los pares de semiplanos opuestos determinados por la recta r de intersección en cada plano, y designamos cada diedro por los semiplanos que le definen, los cuatro diedros son: $\alpha\beta$, $\beta\alpha'$, $\alpha'\beta'$, $\beta'\alpha$.

Dos diedros con una cara común y las otras opuestas, se llaman *adyacentes*; por ejemplo, $\alpha\beta$ y $\beta\alpha'$. Dos diedros cuyas caras son semiplanos respectivamente opuestos se llaman *opuestos por la arista*; ejemplo, $\alpha\beta$ y $\beta'\alpha'$, y análogamente $\beta\alpha'$ y $\beta'\alpha$.

Un diedro convexo y sus dos adyacentes constituyen una región del espacio llamada *diedro cóncavo*. Dos diedros adyacentes llenan un semiespacio que también recibe el nombre de *diedro llano*. Los cuatro diedros llenan el espacio que, así considerado, también llamaremos *diedro completo*.

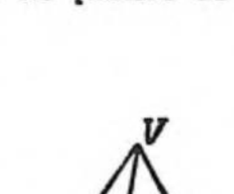
Por razonamientos análogos a los usados en el plano para los haces, se demuestra (hágalo el lector comparando con lección 2.ª):

El semiplano determinado por la arista de un diedro y un punto interior tiene todos sus puntos pertenecientes al diedro, y le llamaremos *interior* al mismo. De donde, todo diedro puede imaginarse constituído por semiplanos interiores.

El segmento que une dos puntos respectivamente situados en las caras de un diedro convexo corta a todo semiplano interior.

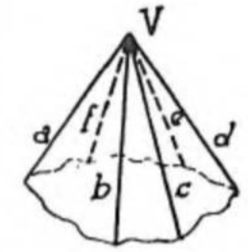
Todo semiplano interior a un diedro convexo lo divide en dos diedros situados en distinto semiespacio respecto de dicho plano.

5. Triedro. Angulo poliedro.—Dadas tres semirrectas a, b, c no coplanarias con un origen común V, llamaremos *triedro* al conjunto de puntos comunes a los semiespacios respectivamente limitados por los planos ab, bc y ca y que contienen la semirrecta restante. Las tres semirrectas se llaman *aristas*. Cada uno de los ángulos convexos ab, bc y ca se llama *cara* del triedro, y *vértice* al punto común a las tres caras.



Análogamente: Dadas en un orden varias semirrectas a, b, c, d, e, f, de origen común V; tales que el plano determinado por cada dos consecutivas deja a las demás en un mismo semiespacio, el conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios se llama *ángulo poliedro convexo*, o *anguloide convexo*.

Las semirrectas dadas se llaman *aristas* del ángulo poliedro. El origen común V se llama *vértice*; los ángulos convexos ab, bc, cd, de, ef, fa se llaman *caras*, y su conjunto, *superficie* del ángulo poliedro. Los diedros convexos definidos por cada dos caras consecutivas se llaman también *diedros* del ángulo poliedro.



De la definición se desprende que: *El ángulo convexo definido por una arista y un rayo cualquiera de una cara no contigua, pertenece también al ángulo poliedro.*

De lo dicho en el § anterior se desprende: *Tres planos concurrentes en un punto sin pasar por una misma recta dividen al espacio en ocho triedros,* interferencia de los determinados por dos de ellos con los semiespacios que limitan al tercero.

6. Propiedad general de las figuras convexas.—Lo mismo los diedros convexos, que los triedros o ángulos poliedros que hemos definido, y, en general, toda figura definida por interferencia (puntos comunes) de semiespacios, tiene la propiedad siguiente:

El segmento definido por dos puntos de la figura pertenece por entero a ella. Puesto que pertenece a todos los semiespecios que la definen.

Esta propiedad se suele tomar como definidora de las figuras convexas en general.

7. Superficie poliédrica. Poliedro convexo.—Llamaremos *superficie poliédrica* al conjunto de un número finito de *polígonos*, llamados *caras* de la superficie, que cumplan las condiciones siguientes:

1. Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo a otra Ambas *caras* se llaman *contiguas*.

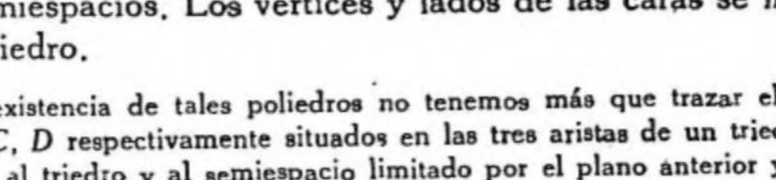
2. Dos caras contiguas están en distinto plano.

La superficie poliédrica se llama *convexa* si además se cumple:

3. El plano de cada cara deja en un mismo semiespacio las demás.

Llamaremos entonces *poliedro convexo* al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiespacios. Los vértices y lados de las caras se llaman *vértices* y *aristas* del poliedro.

Para probar la existencia de tales poliedros no tenemos más que trazar el plano que pasa por tres puntos B, C, D respectivamente situados en las tres aristas de un triedro de vértice A, los puntos comunes al triedro y al semiespacio limitado por el plano anterior y que contiene A forman el poliedro de cuatro caras triangulares o *tetraedro* $ABCD$.



El plano definido por tres puntos E, F, G respectivamente situados en tres aristas concurrentes del tetraedro anterior, divide a éste en dos poliedros convexos, una $AEFG$ de cuatro caras y otro de cinco o *pentaedro* $EFGBCD$. Y por secciones análogas podemos probar la existencia de poliedros convexos de seis caras *hexaedro*, de siete *heptaedro*, etc.

En cada operación el plano secante sólo puede tener común con la superficie del poliedro cortado los lados del triángulo en que corta el triedro elegido, pues por cualquier otro punto común, si lo hubiera, podría trazarse una secante al triángulo, recta que tendría tres (o más) puntos comunes con la superficie del poliedro, con lo que el plano de la cara por uno de ellos separaría los otros dos, en contra de la definición de convexidad. Al no poder tener este plano punto alguno común con las restantes aristas del poliedro, todos los vértices de éste, excepto el del triedro cortado, están a un mismo lado de dicho plano, lo que prueba que éste limita con las caras del poliedro de partida un nuevo poliedro convexo, con una cara más, y nuevos vértices triedros que poder cortar para reiterar el proceso.

Los semiplanos de dos caras contiguas limitados por la *arista* común definen un *diedro* en cuyo interior se halla el poliedro.

Puesto que en cada arista concurren dos caras, en cada vértice de todo poliedro convexo concurrirán al menos tres aristas, y es, por lo tanto, vértice de un *ángulo poliedro convexo* (interferencia de los semiespacios definidores del poliedro y limitados por las caras que concurren en él) en cuyo interior está el poliedro en cuestión.

La definición implica, por otra parte, que los polígonos de las caras sean *convexos*. Su conjunto forma la *superficie* del poliedro. Los puntos del poliedro no situados en la superficie se llaman *interiores*; los demás del ospacio se llaman *exteriores* al poliedro.

8. Propiedades de los poliedros convexos.—De la definición resulta:

Los segmentos que unen un vértice con un punto cualquiera de una cara que no le contiene, pertenecen al poliedro. En general: *El segmento determinado por dos puntos del poliedro tiene todos sus puntos en él.*

Las secciones planas de un poliedro convexo son polígonos convexos.

Establecido lo anterior, podemos demostrar para los poliedros convexos propiedades análogas a las de los polígonos convexos en particular (generalización del teorema de Jordan a poliedros convexos):

I. *Toda semirrecta* r *con origen en un punto* O *interior a un poliedro convexo corta a la superficie en un punto.* De donde: *Toda recta que pasa por un punto interior la corta en dos puntos. Si una recta atraviesa en un punto la superficie, la corta en otro y sólo en otro.*

II. *Existen rectas cuyos puntos son todos exteriores a la superficie.*

III. *Lo mismo el interior que el exterior son regiones conexas*, es decir, *se puede unir sus pares de puntos por quebradas que no cortan a la superficie.*

IV. *Toda quebrada que une un punto interior con otro exterior corta a la superficie.*

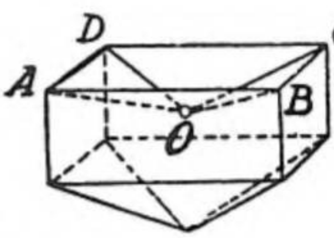
Para demostrar I basta cortar el poliedro por el plano determinado por la recta r y un punto de una arista que se cruce con ella. La sección será un polígono convexo en cuyo interior está O. La semirrecta r corta, pues, al contorno en un punto M que pertenece a la superficie del poliedro. Y no puede haber otro punto que M de intersección, pues uno de los dos puntos (y por lo tanto el plano de la cara que pasa por él) separaría al otro de O, en contra de la definición de poliedro convexo.

Las proposiciones II y III se demuestran de modo parecido mediante las propiedades análogas de las secciones planas (lec. 2.ª). Para III bastará tomar una sección plana que contenga los dos puntos dados.

La demostración de IV es análoga a la indicada en la lección 2.ª para los polígonos.

Los rayos que proyectan los puntos de un poliedro convexo desde un punto exterior V forman un ángulo poliedro también convexo; pues cualquier sección plana por V es un ángulo convexo, proyección del polígono sección del poliedro por el mismo plano (lec. 3.ª). Le llamaremos *anguloide circunscrito* desde V. Cada cara de él es proyección de una sola arista del poliedro cuando no está en el plano de una cara de éste. Cada arista del anguloide es proyección de un sólo vértice, cuando V no está alineado con ninguna arista del poliedro. Por lo tanto, si V no está en el plano de ninguna cara, la superficie del anguloide circunscrito es la proyección de una línea poligonal cerrada formada por aristas del poliedro y que llamaremos *contorno aparente* de éste desde V.

9. Superficies poliédricas y poliedros no convexos.—Existen superficies poliédricas *no convexas;* para construir una de ellas basta, por ejemplo, sustituir una cara $ABCD$ de la superficie de un poliedro convexo por triángulos que resultan de proyectar sus lados desde un punto O interior al poliedro.



Las caras de la nueva superficie obtenida siguen verificando las condiciones 1 y 2 del § 7, pero no la 3.

Entenderemos por *poliedro no convexo* limitado por la superficie del ejemplo anterior al conjunto de puntos resultante de suprimir del poliedro convexo de partida los del poliedro $OABCD$ (menos los puntos de las caras triangulares que forman parte de la nueva superficie). Llamaremos puntos *interiores* a dicho poliedro los pertenecientes a él y no pertenecientes a su superficie y puntos *exteriores* a los restantes del espacio.

El lector podrá definir con igual facilidad los pocos poliedros particulares no convexos que habremos de considerar en lo sucesivo.

El ejemplo anterior pertenece a una clase de superficies poliédricas más general que las convexas, y que dividen al espacio en dos regiones conexas: es la de las superficies llamadas *simples*, definidas por las condiciones siguientes (*).

1. Las caras son polígonos simples, cada uno de cuyos lados pertenece a dos caras y sólo a dos llamadas *contiguas*.

2. Dos caras contiguas no son coplanarias.

3. Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas, cada una con la anterior y la siguiente.

4. Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice de ambas, y si le tienen deben pertenecer ambas a un mismo anguloide de la superficie (es decir, a un mismo conjunto ordenado de caras concurrentes, cada una contigua con la anterior y la siguiente y la última con la primera, conjunto llamado también *ciclo*).

Como hemos dicho, estas condiciones son *suficientes* (aunque no necesarias en su totalidad) para poder demostrar que la superficie divide al espacio en dos regiones conexas, una

(*) También son superficies de esta clase las figuras *b*) *d*) del párrafo 11; no lo es en cambio la *c*) por no cumplir la condición 4. Modernamente se tiende a prescindir de la condición 2 y a manejar *redes triangulares* descomponiendo las caras en triángulos.

llamada *interior* y otra llamada *exterior*, de modo análogo a las superficies convexas. Omitimos la demostración por brevedad (*).

Se llama *cuerpo poliédrico* o *poliedro simple* al conjunto de puntos interiores a una superficie simple más los de la superficie. Según se considere esta superficie unida a una u otra región interior o exterior, diremos que define una u otra *cara* de dicha superficie, y en este sentido diremos que la superficie del poliedro es de *dos caras*.

10. Teorema de Euler.—*En todo poliedro convexo la suma del número* c *de caras más el número* v *de vértices excede en dos unidades al número* a *de aristas.*

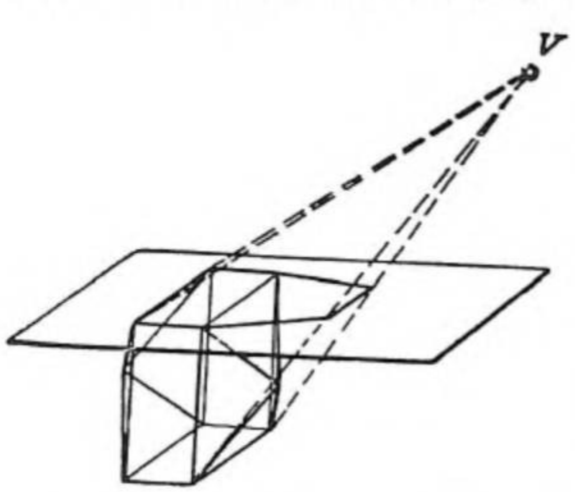
$$c+v=a+2$$

La demostración consiste en trazar en la superficie una línea poligonal cerrada, formada por aristas de tal modo que divida la superficie en dos regiones. Como esta poligonal tiene tantos vértices como aristas, la suma r_1+v_1 del número de regiones más el de vértices de la poligonal excede en dos unidades al número a_1 de sus aristas, es decir, $r_1+v_1=a_1+2$.

Trazando ahora en una de las regiones obtenidas una nueva línea poligonal abierta (formada por aristas), cuyos extremos estén en la poligonal anterior, quedará dividida la tal región en otras dos, de modo que el número de regiones habrá aumentado en una unidad, pero como el número de las aristas introducidas excede en una unidad al de los vértices intermedios añadidos, sigue verificándose la igualdad $r_2+v_2=a_2+2$; y continuará verificándose al repetir el razonamiento por división análoga de las regiones obtenidas, hasta conseguir que cada región sea una cara, con lo que resultará el teorema enunciado (**).

La posibilidad de tales divisiones de la superficie es cuestión que suelen admitir tácitamente las demostraciones corrientes, por lo que carecen de rigor. Creemos que puede establecerse rigurosamente del siguiente modo:

Consideremos un punto V *no coplanario con ninguna cara* y exterior al poliedro, es decir, situado en semiespacio distinto respecto del plano de alguna cara. Este plano cortará al anguloide circunscrito desde V según un polígono convexo (por serlo dicho anguloide) proyección del contorno aparente sobre el plano. Todo rayo interior proyectante de un punto de la superficie corta a ésta en otro punto. Ordenando los dos puntos de intersección en el sentido que marca cada rayo proyectante, y llamando *visto* al primero y *oculto* al segundo, podemos clasificar los puntos de la superficie en dos regiones: *vista y oculta* unidas por el contorno aparente.



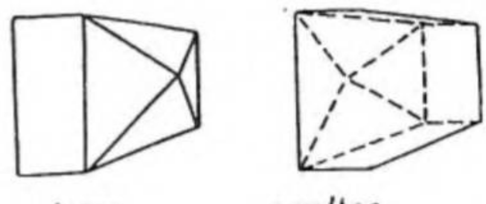
Las caras contenidas en cada región se proyectarán según polígonos de igual clase contenidos en el polígono proyección del contorno aparente. Estos polígonos cumplirán la condición 1.ª de las caras del poliedro, constituyendo así lo que se llama una *red poligonal plana*.

Representadas de esta forma, biunívocamente, las caras, vértices y aristas de cada región mediante los correspondientes de una red poligonal plana que llena un polígono convexo, la

(*) El lector a quien interese estas cuestiones puede consultar *Steinitz Rademacher*: «Vorlesungen über die Theorie der Polyeder». La demostración simplificada del teorema de Jordan que pudimos obtener en el plano para los polígonos simples mediante el recurso del polígono convexo circundante no parece fácilmente generalizable a los poliedros.

(**) Enunciado por primera vez en las memorias de Euler sobre poliedros e implícitamente contenido en relaciones análogas de un trabajo juvenil de Descartes.

descomposición de cada región de la superficie en regiones parciales, hasta llegar a los polígonos de las caras, puede efectuarse así en su imagen plana con el apoyo del teorema de Jordan para polígonos planos *simples*, y los corolarios del mismo demostrados en la lección 3.ª



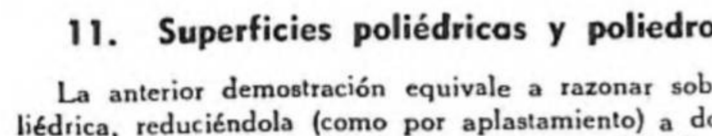
vistas ocultas

Y, como en esta representación no se ha perdido vértice, arista, ni cara alguna, por haber supuesto V no coplanario con ninguna cara, la igualdad numérica a que se llega: polígonos+vértices=lados+2 (contando una sola vez los vértices y las aristas del contorno aparente) traduce el teorema de Euler que queríamos demostrar (*).

11. Superficies poliédricas y poliedros eulerianos.

La anterior demostración equivale a razonar sobre una transformada de la superficie poliédrica, reduciéndola (como por aplastamiento) a dos redes poligonales planas unidas por su borde común y situadas una en cada cara del plano. Se concibe así la validez del teorema para otras muchas superficies poliédricas no convexas como, por ejemplo, la superficie construída en el párrafo 9, que tiene el mismo número de caras, vértices y aristas que la de la figura anterior.

De un modo general, dadas dos superficies poliédricas simples, diremos que son *isomorfas* si entre sus caras respectivas puede establecerse una correspondencia tal, que



1.º A cada cara n-gonal de una de las superficie corresponde una cara n-gonal en la otra.

2.º A cada vertice de una, corresponde un vértice y uno sólo en la otra.

3.º A caras contiguas de una, corresponden caras contiguas de la otra.

Estas superficies tienen evidentemente el mismo número de caras, de vértices y de aristas. Si una de ellas cumple el teorema de Euler la otra también.

Por consiguiente: Toda superficie isomorfa de una poliédrica convexa cumple el teorema de Euler.

Las superficies isomorfas de las poliédricas convexas se llaman, por esta razón *eulerianas* y los poliedros por ellas limitados se llaman *poliedros eulerianos*. Son eulerianas las superficies de los poliedros *a*) y *b*) (isomorfas) y no lo son las *c*) y *d*).

12. Consecuencias del teorema de Euler.

Como cada cara contiene tres o más aristas, el número de ésta será $\geqslant 3c/2$ porque cada arista está en dos caras. Es decir, $3c \leqslant 2a$.

Análogamente, como en cada vértice concurren tres o más aristas y cada una de ellas une dos vértices, se tendrá $3v \leqslant 2a$.

Combinando *las dos* desigualdades con la igualdad de Euler $a+2=c+v$ resulta

$$3a+6=3c+3v \leqslant 4a, \quad \text{de donde} \quad a \geqslant 6.$$

Combinando *una sola* de ellas se obtiene $3a+6=3c+3v \leqslant 2a+3v$, de donde $a+6 \leqslant 3v \leqslant 2a$ y análogamente $a+6 \leqslant 3c \leqslant 2a$. Combinadas con $a \geqslant 6$ dan $c \geqslant 4$, $v \geqslant 4$.

(*) Otra de las demostraciones del teorema de Euler consiste en ir extrayendo caras de la superficie y observando la variación de la expresión $c+v-a$. Los razonamientos corrientes suelen admitir tácitamente que se conserva la conexión de la proporción de superficie restante en cada operación; de lo contrario no es cierta la invariancia de la dicha expresión en todas las extracciones intermedias entre la primera y última extracción.

Estas desigualdades prueban la *imposibilidad de un poliedro euleriano de siete aristas* ya que entre $a+6=13$ y $2a=14$ no existe número entero.

En las desigualdades anteriores los signos = corresponden al caso en que cada cara sea un triángulo y en cada vértice concurran tres aristas, es decir, el tetraedro. Supongamos en general un poliedro cuyas caras sean polígonos de m lados y en cuyos vértices concurran n aristas. Se tendrá $mc=2a$, $nv=2a$. Estas dos ecuaciones con la relación de Euler forman un sistema que determina c, v y a, y cuya solución es

$$a=\frac{2\,mn}{2(m+n)-mn} \qquad c=\frac{4\,n}{2(m+n)-mn} \qquad v=\frac{4\,m}{2(m+n)-mn}$$

Si las caras son triangulares ($m=3$) el denominador $6-n$ sólo tiene valores positivos para

$n=3$	de donde	$c=4$	$v=4$	$a=6$	tetraedro
$n=4$	»	$c=8$	$v=6$	$a=12$	octaedro
$n=5$	»	$c=20$	$v=12$	$a=30$	icosaedro

Si las caras son cuadriláteros ($m=4$) el denominador $8-2n$ sólo tiene valor positivo para

$n=3$	de donde	$c=6$	$v=8$	$a=12$	hexaedro.

Si las caras son pentagonales ($m=5$) el denominador $10-3n$ sólo tiene valor positivo para

$n=3$	de donde	$c=12$	$v=20$	$a=30$	dodecaedro.

Si ponemos $m=6$, para que el denominador $12-4n$ sea positivo debe ser $n<3$, lo cual es imposible. Por lo tanto, *los únicos poliedros eulerianos posibles cuyas caras son polígonos de igual número de lados y cuyos ángulos poliedros tienen entre sí el mismo número de aristas son los cinco poliedros hallados.*

EJERCICIOS

1. Llamando t al número de triángulos, q al de cuadriláteros, p al de pentágonos, h al de hexágonos, h' al de heptágonos, etc...., demostrar que

$$2a=3t+4q+5p+6h+7h'+...$$

y establecer una relación análoga relativa a los ángulos poliedros: $2a=3T+4Q+5P+...$

2. Hallar la paridad del número total de caras cuyo número de lados es impar. Idem para anguloides.

3. Demostrar que el número de caras triangulares de un poliedro euleriano más el de triedros es por lo menos ocho. (Súmense las relaciones anteriores y substitúyase el resultado en la relación de Euler multiplicada por cuatro.) Es, pues, imposible la existencia de un poliedro euleriano sin caras triangulares ni triedros.

4. Demostar que $2v=4+t+2q+3p+4h+5h'+...$ (Sustitúyase en la fórmula de Euler multiplicada por 2, el duplo del número de aristas por la fórmula obtenida en ejercicio 1.)

5. Relación análoga a la anterior para expresar el número de caras en función del número de ángulos triedros, tetraedos...

6. Demostar la inexistencia de un poliedro euleriano cuyas caras todas tengan más de cinco lados. [Sustitúyase en la desigualdad $3v \leqslant 2a$, demostrada en § 12, las fórmulas antes obtenidas para $2a$ y $2v$.]

7. Teorema análogo al anterior para anguloides.

8. Demostrar que la suma de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo es tantas veces cuatro rectos como indica el número de vértices menos dos.

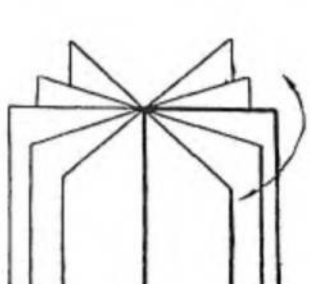
9. ¿Cómo hallar una recta que pasa por un punto P y se apoya en dos rectas cruzadas?

10. Poner ejemplos de poliedros (en el sentido intuitivo de cuerpos limitados por polígonos planos) cuyas superficies no cumplan alguna de las condiciones 1 a 4 del § 9.

LECCIÓN 38.—EL SENTIDO EN EL ESPACIO

1. Los dos sentidos en un haz de semiplanos.—Todos los semiplanos que tienen por borde una misma recta constituyen un *haz de semiplanos*. Cada par de ellos no coplanarios definen un diedro convexo y otro cóncavo. Por consideraciones idénticas a las efectuadas en el haz de semirrectas de un plano (lec. 3.ª) podemos llegar a las siguientes conclusiones

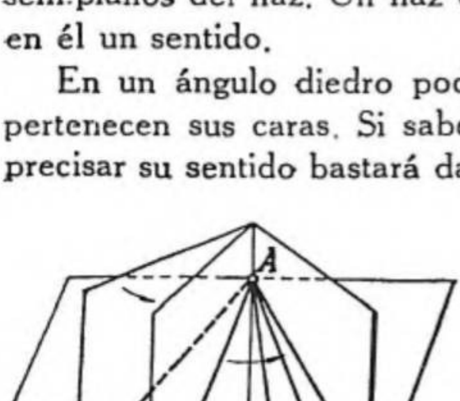
Si en un haz de semiplanos se supone suplimido uno de ellos, llamado *origen*, los demás forman un conjunto ordenado, abierto y denso. Esto significa, como en el plano, lo siguiente:



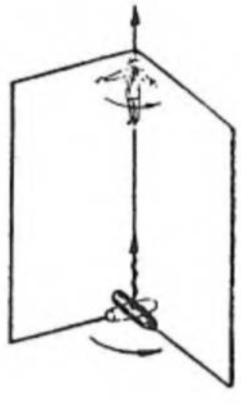
Es posible establecer una *ordenación* entre los semiplanos restantes, es decir, un criterio de precedencia tal que: 1.° *Dados dos semiplanos* α *y* β, *o* α *precede a* β, *o* β *precede a* α. 2.° *Si* α *precede a* β *y* β *a* γ, α *precede a* γ. *Dado un semiplano cualquiera siempre existen otros que le preceden y otros que le siguen. Entre dos semiplanos cualesquiera existen siempre otros intermedios.*

Todo ello permite considerar dos sentidos en un haz de semiplanos lo mismo que en el haz de rayos; siendo preciso para fijar uno de ellos ordenar *tres* semiplanos del haz. Un haz de semiplanos se llamará *orientado* cuando se fija en él un sentido.

En un ángulo diedro podemos considerar los dos sentidos del haz a que pertenecen sus caras. Si sabemos que el diedro es *convexo* (o cóncavo), para precisar su sentido bastará dar un orden entre sus caras. Un plano secante a la arista cortará el diedro convexo según un ángulo convexo. Haciendo corresponder a cada plano del haz el rayo sección que en él produce el plano secante, quedará establecida una correspondencia entre el haz de planos y el de rayos sección, en la cual se corresponden los sentidos de uno y otro. Por consiguiente también se corresponde el sentido del haz de semiplanos con el de una serie de puntos sección rectilínea de sus planos. (Basta cortar por un plano que pase por la recta secante r y un punto A de la arista.)



2. Individualización de los sentidos.—Ya dijimos en Geometría plana que la absoluta identidad de propiedades entre las ordenaciones que determinan los dos sentidos en la recta y en un haz, hace imposible distinguirlos por vía geométrica pura, y que es necesario acudir, a tal fin, a elementos ajenos a la Geometría.

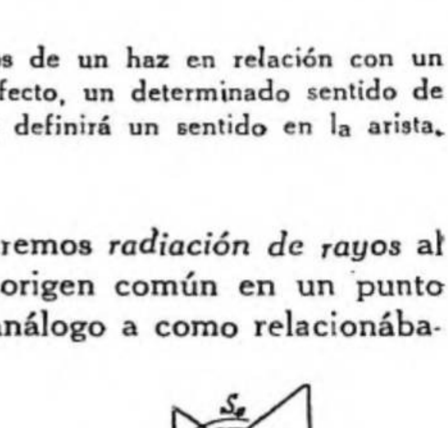


Lo mismo ocurre con los sentidos de un haz de semi planos. Para distinguir uno de otro podemos imaginar un observador colocado a lo largo de la arista del haz y llamar *positivo*, por ejemplo, al sentido en que ve ordenados los semiplanos de *derecha* a *izquierda*, y *negativo* el sentido contrario.

Claro es que esto presupone la elección previa de un sentido en la arista para orientar al observador, ya que al invertir la orientación de éste variaría el criterio. Por consiguiente lo que en definitiva podemos definir es un sentido positivo o negativo del haz en *relación con un determinado sentido previamente asignado a la arista*, del mismo modo que no es posible en el espacio definir un sentido positivo absoluto de un plano, sino con relación a uno de los semiespacios que determina y en el que se supone situada la esfera del reloj y el observador que la mira.

Otro de los elementos usados para distinguir los sentidos de un haz en relación con un sentido en su arista es el *sacacorchos*. Este establece, en efecto, un determinado sentido de avance para otro de rotación (sentido helicoidal). El avance definirá un sentido en la arista, la rotación un sentido en el haz.

3. Los dos sentidos en la radiación.—Llamaremos *radiación de rayos* al conjunto de todas las semirrectas que tienen su origen común en un punto V, llamado *vértice* de la radiación. De un modo análogo a como relacionábamos los sentidos de los haces de rayos en el plano, podemos relacionar entre sí los sentidos de los haces de semiplanos cuyas aristas concurren en un punto V.



Sean a y b dos semirrectas de origen V; α el semiplano que contiene b y cuyo borde es la recta de a; α' el semiplano opuesto. Sea β' el semiplano que contiene a y cuyo borde es la recta de b, y β el semiplano opuesto. Sean finalmente δ y ε dos semiplanos de bordes respectivos por a y b, contenidos ambos en un mismo semiespacio respecto del plano ab. Diremos que los sentidos definidos en uno y otro haz por las ternas $\alpha'\delta\alpha$ y $\beta'\varepsilon\beta$ son iguales.

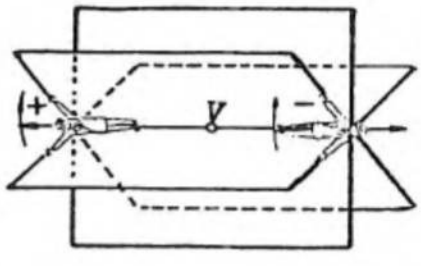
Definiendo según este criterio un sentido en un tercer haz de arista c, concurrente con a y b, que sea igual a uno de los sentidos iguales anteriores, se observa que es también igual al otro (propiedad transitiva). La demostración indicada en la figura para aristas no coplanarias (*) es análoga a la que dimos

(*) Si a, b y c son coplanarias la transitividad es consecuencia casi inmediata de la definición.

en el plano (lec. 3.ª) para los haces, sustituyendo el triángulo de los vértices por el triedro *abc* de las aristas ($s_a = s_b$, $s_b = s_c$, $s_c = s_a$).

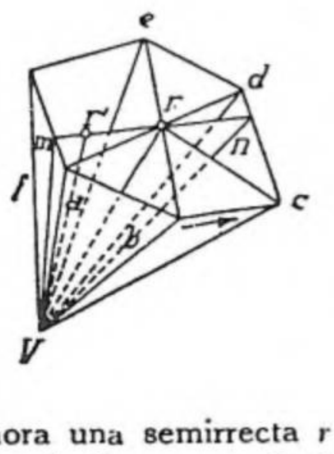
En lugar de hablar de sentidos iguales en varios haces de semiplanos se prefiere hablar de un mismo sentido, común a todos ellos, y decir: En todos los haces de una radiación, o abreviadamente en *toda radiación existen dos sentidos opuestos.* Fijado un sentido en uno de los haces de semiplanos queda fijado un sentido igual en todos los demás de la radiación. Diremos entonces que la radiación está *orientada.*

NOTA.—Para que los observadores a que se refiere el párrafo anterior, situados a lo largo de las aristas de la radiación puedan apreciar la igualdad de sentidos en la forma en que se ha establecido, es preciso convenir en colocarlos *todos ellos* con los pies (o la cabeza) hacia el vértice de la radiación. (V. fig. anterior.)



De acuerdo con estos convenios, un haz de planos orientado en una radiación tiene un sentido distinto con respecto a cada una de las dos semirrectas que el vértice *V* de la radiación determina en la arista; es decir, para los dos observadores dirigidos según estas semirrectas con los pies hacia el vértice *V*, los sentidos del mismo haz son opuestos. Lo que concuerda con lo dicho en § 2

4. Los dos sentidos en un ángulo poliedro.—Recorriendo las aristas de un ángulo poliedro convexo, en el orden en que se han tomado para definirlo, se establece un sentido en cada cara que nos permite ordenar sus rayos. Como el último de cada cara es el primero de la siguiente, el conjunto de los rayos de las caras del anguloide aparece así ordenado en un sentido. Invirtiendo el orden de las aristas, siguen siendo consecutivas las que antes lo eran, el anguloide que definen sigue siendo el mismo, pero el sentido que establece este orden es opuesto al anterior.

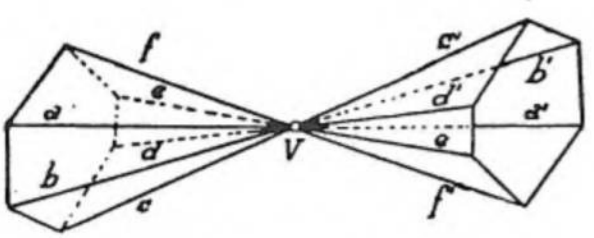


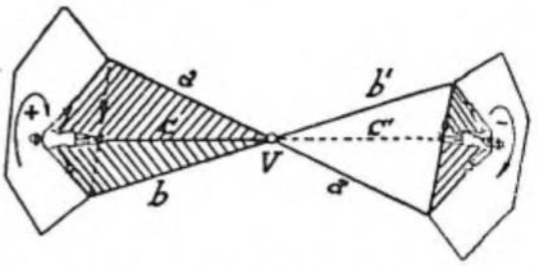
Elegido uno de los dos sentidos, si consideramos ahora una semirrecta *r interior* al anguloide y hacemos corresponder, a cada uno de los rayos de las caras, el semiplano que pasa por él y cuyo borde es la recta de *r*, todos estos semiplanos aparecerán ordenados en un sentido del haz de la arista *r*, sentido que es independiente del rayo interior elegido.

En efecto, *r* es, por definición, interior al diedro *b*, por ejemplo. Por tanto, el plano *rb* separa las aristas *a* y *c* y, por consiguiente, los diedros *bra* y *brc*. Análogamente, *rc* separa los diedros *crb* y *crd*, etc. De donde resulta que los semiplanos *ra*, *rb*, *rc*, *rd*, ... están ordenados en un sentido del haz *r* por estar cada uno «entre» el anterior y el siguiente. Trazando ahora otro rayo *r'* interior, el plano *rr'* corta al anguloide según un ángulo convexo *mn* en el que son interiores *r* y *r'*, y por tanto, el sentido *r*(*mbn*) es igual al *r'*(*mbn*) en virtud de la definición de igualdad de sentido en haces concurrentes, que acabamos de dar.

De lo dicho se desprende que el sentido de una radiación puede también definirse dando las aristas de un ángulo poliedro convexo y en particular de un triedro en un cierto orden a, b, c y de aquí que se utilicen también los tres dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha (o izquierda) puestos en disposición de triedro para caracterizar, en dicho orden, el sentido de una radiación. El sentido que define la mano derecha es el mismo que llamaría positivo (de derecha a izquierda) un observador situado en la arista correspondiente al pulgar con los pies hacia el vértice del triedro, al calificar el sentido definido por los dedos índice y medio, en este orden.

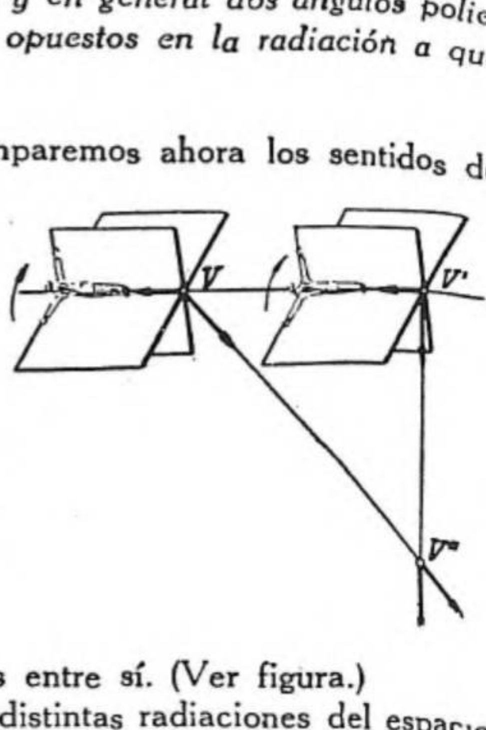
5. Sentidos de triedros y anguloides opuestos por el vértice.— Las semirrectas opuestas a las que definen un triedro o un ángulo poliedro definen, en el mismo orden, otro triedro o ángulo poliedro (interferencia de semiespacios opuestos a los que definieron aquél) cuyas caras son los ángulos opuestos por el vértice de las caras del primero y cuyos diedros son los diedros opuestos por la arista de los de éste. Por esta razón se llama a este nuevo triedro o ángulo poliedro *opuesto por el vértice al primero.*





En virtud de lo anterior (§ 3), *dos triedros y en general dos ángulos poliedros opuestos por el vértice son de sentidos opuestos en la radiación a que pertenecen.* (V. fig.).

6. Los dos sentidos en el espacio.—Comparemos ahora los sentidos de las distintas radiaciones del espacio. Dadas dos radiaciones orientadas de vértices distintos V y V', diremos que son iguales sus sentidos, si el haz de planos de arista VV' tiene el mismo sentido en ambas radiaciones con respecto a dos rayos de orígenes V y V' y dirigidos en el mismo sentido en dicha arista.



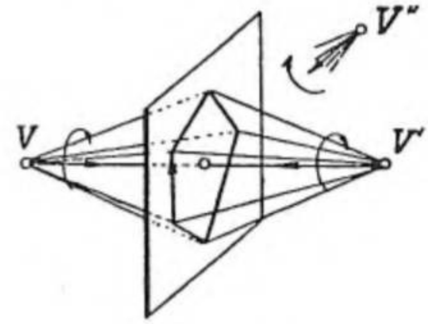
De acuerdo con esta definición y la anteriormente establecida para la igualdad de sentidos en una misma radiación, es fácil ver que este criterio de igualdad es transitivo, o sea, que los sentidos en V' y V'' iguales a un mismo sentido en V son iguales entre sí. (Ver figura.)

En lugar de hablar de sentidos iguales en distintas radiaciones del espacio se habla también de un *mismo sentido* en todas ellas, o de un *sentido en el espacio*.

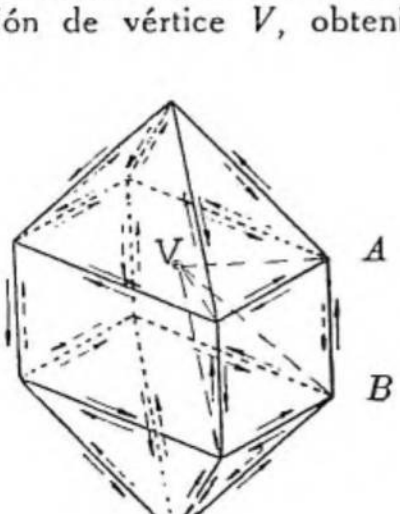
Diremos, pues, en resumen: *En el espacio cabe definir dos sentidos opuestos. Para determinar uno de ellos basta fijar:* a) *un sentido en un haz de planos correspondiente a un sentido en su arista* (haz orientado), o bien: b) *las aristas de un triedro en un orden* (triedro orientado). En el primer caso se materializa la individualización del sentido mediante el observador (regla de Ampère en electromagnetismo), en el segundo mediante los dedos pulgar, índice y medio de una mano (reglas de Fleming en electromagnetismo).

Cuando se ha fijado un sentido en el *espacio* se dice que éste *está orientado.*

7. Los dos sentidos en una superficie poliédrica convexa.—De los convenios anteriores se desprende fácilmente que al proyectar los polígonos de un plano orientado desde puntos V y V' situados a distinto lado del plano se obtienen anguloides de opuesto sentido en las radiaciones V y V'; y, por tanto, serán de igual sentido al proyectarlos desde vértices situados a un mismo lado.



Si proyectamos, pues, todas las caras de un poliedro convexo desde un punto interior V al poliedro podemos orientar todos los anguloides obtenidos según uno de los sentidos de la radiación de vértice V, obteniendo así sentidos que llamaremos *iguales* en las caras del poliedro. Proyectando nuevamente estas caras desde otro punto interior, el sentido de los anguloides y, por lo tanto, el de la radiación, se conservará, en virtud de lo anterior

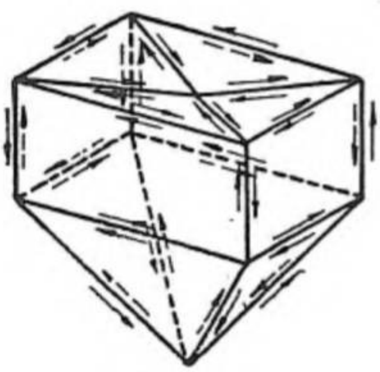


En resumen, fijado un sentido en el espacio, queda también fijado un sentido en toda superficie poliédrica convexa del mismo y recíprocamente. Para fijar el sentido en una superficie poliédrica convexa bastará dar el sentido de contorno de una de sus caras, con lo que quedará determinado el de las demás, siendo de advertir que *los sentidos iguales de dos caras contiguas determinan ordenaciones opuestas en la arista común.*

En efecto, los anguloides que proyectan ambas caras desde un punto interior V quedarán a distinto lado del plano VAB determinado por V y dicha arista AB, puesto que V es interior al diedro de ambas caras. El haz de planos de arista VA orientado positivamente determina, por tanto, sentidos iguales en ambas caras, pero distintos en las aristas concurrentes en B (sentido que se dirige hacia B en una de ellas y que parte de B en la otra).

8. Sentidos en las superficies poliédricas no convexas.

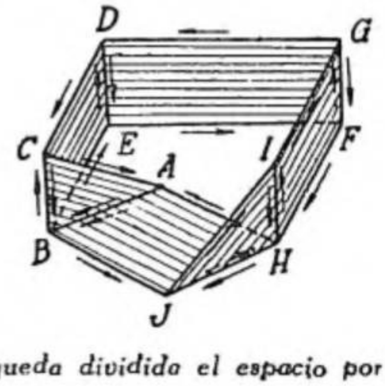
La posibilidad de establecer un sentido concorde en contornos poligonales enlazados por lados comunes, de tal suerte que se invierta la ordenación de los puntos de cada lado común al pasar de un polígono a otro contiguo no es privativa de las superficies poliédricas convexas. La superficie obtenida en el párrafo 9 de la lección anterior no es convexa y, sin embargo, puede definirse un sentido concorde en sus caras, exactamente lo mismo que si se tratara de la superficie convexa de la figura del párrafo anterior. (V. figura.)



También puede establecerse tal sentido en las caras de los poliedros no eulerianos de las figuras *c* y *d* del párrafo 11 de la lección anterior. Esta propiedad es característica de las superficies poliédricas que dividen el espacio en *dos regiones*, de tal modo que para pasar de una a otra región hay que atravesar la superficie, superficies que hemos llamado, en este aspecto, *de dos caras* (derecho y revés en una tela). Estas superficies poliédricas se llaman también *orientables*. En particular, lo son las superficies poliédricas *simples* definidas en el § 9 de la lección anterior.

Para hacer ver la existencia de superficies poliédricas en las que esta ordenación no es posible, se indica en la figura siguiente, no una superficie completa, pero sí una banda o trozo de superficie poliédrica (banda de Möbius) de *una cara*, llamada así porque, materializada en cartulina, se puede pasar del derecho al revés de la cartulina recorriendo la banda *sin cuzar su borde* ni atravesarla. Se observa en ella cómo variando el sentido de las aristas comunes a cada dos caras contiguas y partiendo de la cara orientada ABC se llega (por $CBED$, $DEFG$, etc.) a la cara $BJHA$ contigua a la ABC de partida y *con el mismo sentido* en la arista AB.

Para completar con esta banda una superficie poliédrica cerrada basta agregar a los polígonos de la banda los triángulos que resulten de proyectar los lados de su borde (único) $ACDGIJBEFHA$ desde un punto V. Claro es que la superficie (cerrada y de una cara) que así resulta tiene caras que se atraviesan mutuamente; basta que el lector imagine V situado en su propio punto de vista para comprender que las caras VAH y VIJ se cruzarán, así como las VAC y VBE, VEF y VIG; por tanto, esta superficie no cumple la condición 4 del § 9. lección anterior, es decir, no es *simple*.



NOTA AL CAPITULO XII.—*Número de regiones en que queda dividido el espacio por n planos no concurrentes cuatro a cuatro.*

n puntos dividen una recta en $n+1$ regiones.

n rectas, no concurrentes tres a tres, dividen al plano en $r_n=\binom{n+1}{2}+1$ regiones. En efecto, la n^a recta es fraccionada por las anteriores en n fragmentos, cada uno de los cuales desdobla una región de plano de las r_{n-1} antes existentes. Por tanto, $r_n=r_{n-1}+n$ con $r_1=2$; de donde

$$r_n=2+2+3+4+\ldots+n=\binom{n+1}{2}+1.$$

Repitiendo el razonamiento para calcular las R_n regiones en que queda dividido el espacio por n planos (no concurrentes 4 a 4), el plano n^o, en virtud de lo anterior, queda fraccionado por los $n-1$ planos restantes en $\binom{n}{2}+1$ regiones planas, cada una de las cuales ha desdoblado una región de las R_{n-1} anteriormente existentes Por tanto, $R_n=R_{n-1}+\binom{n}{2}+1$, con $R_1=2$; de donde

$$R_n=2+\binom{2}{2}+1+\binom{3}{2}+1+\binom{4}{2}+1+\ldots+\binom{n}{2}+1=\binom{n+1}{3}+n+1$$

(Para la suma de los números combinatorios ver *Análisis algebraico*, de Rey Pastor, § 139.)

Capítulo XIII.—LOS MOVIMIENTOS Y LA CONGRUENCIA EN EL ESPACIO

LECCIÓN 39.—MOVIMIENTO, CONGRUENCIA Y PERPENDICULARIDAD

1. Concepto de movimiento.—Ya dijimos al tratar de los movimientos del plano que sus propiedades venían sugeridas por la observación de los cambios de posición de los cuerpos rígidos, sin que sea posible dar una definición satisfactoria de uno y otro concepto: «movimiento» y «cuerpo rígido», ya que ambos conceptos se apoyan mutuamente. Cuerpo rígido es aquél que conserva invariables las distancias mutuas de sus puntos al moverse. Pero, a su vez, mover un cuerpo es variar de posición sus puntos sin alterar sus distancias mutuas. El concepto de distancia nace precisamente, por abstracción, como cualidad invariante en los movimientos. De aquí que el movimiento sólo pueda definirse indirectamente estableciendo un sistema de axiomas que traduzca sus propiedades esenciales, de acuerdo con lo que la experiencia y la intuición nos dictan.

Como en el plano, al hablar del movimiento de una figura del espacio entendemos la transformación o correspondencia que resulta entre las posiciones inicial y final de sus puntos, sin tener en cuenta ni el tiempo ni las posiciones intermedias.

2. Axiomas del movimiento.—La experiencia o la intuición nos dicen que el movimiento de un sólido queda perfectamente determinado en cuanto se determina el movimiento de un plano rígidamente unido al mismo. En consecuencia de ello, los axiomas III, 1 a 6, que caracterizaban las propiedades del movimiento de un plano, puede servir para caracterizar las del movimiento del espacio, sin más que modificar sus términos en lo preciso para darles la nueva interpretación espacial. Enunciaremos, pues, como axiomas modificados del movimiento los siguientes. (V. lec. 4.ª)

Ax. III, 1.—*Los movimientos del espacio son transformaciones puntuales biunívocas del mismo.*

Ax. III, 2.—*Todo movimiento del espacio conserva las relaciones de incidencia, ordenación y* SENTIDO.

Ello significa que a elementos alineados o coplanarios corresponden elementos homólogos también alineados o coplanarios. A una serie ordenada o haz ordenado de rayos o de semiplanos corresponde otra serie o haz ordenado y de igual sentido. Por conservarse las relaciones de separación, a un rayo o semirrecta, a un semiplano, a un semiespacio y a toda figura definida por interferencia de éstos como segmento, ángulo convexo, diedro convexo, anguloide, poliedro convexo, etc., corresponde una figura transformada por movimiento, de igual especie.

Ax. III, 3. (Axioma de rigidez).— *Ningún movimiento puede transformar un segmento, ángulo o diedro en parte del mismo.*

Ax. III, 4-5.—*Los movimientos del espacio forman grupo* Es decir: *El producto o transformación resultante de dos movimientos es otro movimiento. La transformación recíproca de todo movimiento es otro movimiento.* De donde, la identidad es caso particular del movimiento, como producto de un movimiento cualquiera por su recíproco

Ax. III, 6 (Axioma de determinación).—*Existe un movimiento y sólo uno que transforma una semirrecta en otra y un semiplano limitado por la recta primera en un semiplano limitado por la segunda.*

Nota.—Es muy importante observar que la distinción entre movimientos directos e inversos en el plano deja aquí de tener objeto, pues al invertir el plano se arrastra en la inversión el semiespacio desde el cual se supone observado y, por consiguiente, esta alteración del punto de vista restituye el sentido primitivo, de acuerdo con el axioma III, 2. Por esta razón hemos añadido la *conservación del sentido* en la modalidad espacial de dicho axioma

3. Congruencia en el espacio.—Diremos que dos figuras F y F' son *congruentes* o *iguales* cuando una de ellas puede obtenerse transformando la otra mediante un movimiento.

En virtud de esta definición y de los axiomas del movimiento, la relación de congruencia tiene los caracteres *idéntico, transitivo* y *recíproco*. (V. lec. 4.ª)

La relación de congruencia es a su vez invariante en todo movimiento. Es decir: *Si dos figuras* A *y* B *congruentes se transforman por un mismo movimiento en otras dos* A′ *y* B′, *éstas son también congruentes entre sí.* Pues el producto de los movimientos que transforman A' en A, A en B y B en B' es otro movimiento en el cual son congruentes A' y B'.

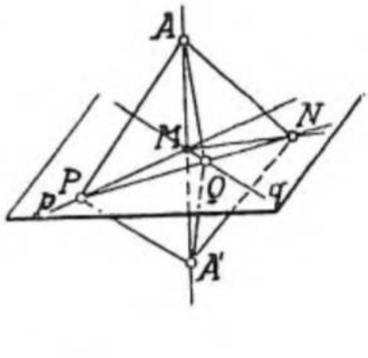
En particular, *la perpendicularidad entre rectas secantes se conserva en el movimiento,* por ser una relación de igualdad entre ángulos adyacentes.

Al conservarse los axiomas del movimiento del plano en el espacio, se conservarán también sus consecuencias (excepto las que exigen distinción entre movimiento directo e inverso). En particular:

Son válidos en el espacio los criterios de igualdad de triángulos y polígonos estudiados en geometría plana, aun cuando las figuras comparadas no se hallen en un mismo plano.

Veamos algunas aplicaciones inmediatas de la congruencia

4. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos.— Dados dos puntos A y A', en cada plano que pasa por ellos hay una mediatriz del segmento AA'; consideremos dos de ellas p y q, que por ser concurrentes en el punto medio M definen un plano. Otra recta cualquiera de este plano, que corte a p y q en P y Q, determinará con A y A' dos triángulos PQA y PQA' congruentes, por ser $PQ=PQ$, $PA=PA'$, $QA=QA'$. El movimiento que transforma un triángulo en otro dejará fijo todo punto N de la recta PQ por ser fijos P y Q (axioma de rigidez aplicado a PN). Serán, pues, congruentes los segmentos $NA=NA'$ y la recta MN será también mediatriz de AA'. Como por todo punto N del plano podemos trazar una secante a p y q resulta: Todo punto del plano pq equidista de A y A'



Toda recta del plano pq que pasa por M es mediatriz de AA'.

Recíprocamente: Si N equidista de A y A', la intersección del plano NAA' con el plano pq será la mediatriz de AA' única en el plano NAA', luego N está en dicha mediatriz y, por tanto, en el plano pq. De donde:

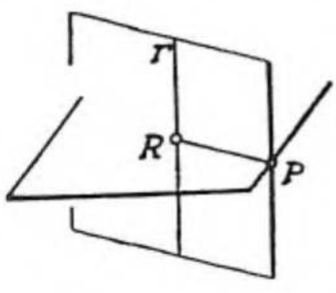
El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos A *y* A' *es un plano que pasa por el punto medio del segmento* AA' *y que contiene todas las perpendiculares a* AA' *que pasan por* M *(mediatrices).*

Los puntos A y A' se dice que son *simétricos* respecto de dicho plano, que se llama *plano de simetría* del segmento AA'.

5. Plano perpendicular a una recta.— Corolario del teorema anterior es el siguiente:

Todas las perpendiculares a una recta r *que pasan por un punto* M *de ell. están en un plano,* que se llama *plano perpendicular a la recta por este punto,* y la recta se llama *perpendicular al plano*

Basta considerar en r un segmento AA' cuyo punto medio sea M y aplicar el teorema anterior.

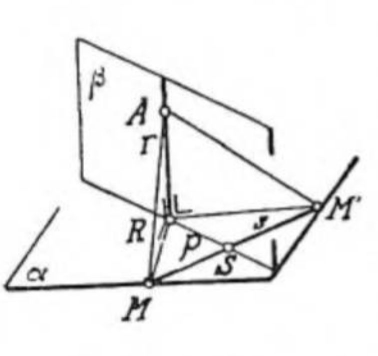


El plano obtenido es independiente del segmento AA' elegido, pues cualquier otro BB' cuyo punto medio sea también M tiene las mediatrices comunes con AA'

Por un punto P *pasa un plano y sólo uno perpendicular a una recta* r.

Si P está en r la propiedad es consecuencia de la definición. Si P no está en r, el plano perpendicular ha de contener la perpendicular a r en el plano Pr y, por tanto, ha de pasar por el pie único R de dicha perpendicular; bastará trazar, pues, por dicho punto R el plano perpendicular único a r.

6. Perpendicularidad entre rectas cruzadas.—*Dadas dos rectas cruzadas* r *y* s, *si por una de ellas* s *se puede trazar un plano* α *perpendicular a la otra* r, *por ésta se puede también trazar un plano* β *perpendicular a* s.

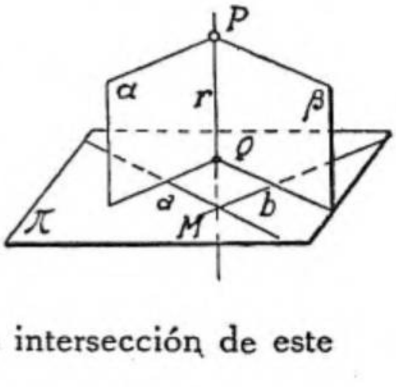


Sea R la intersección de r y α. Tracemos por R la perpendicular p a s y sea S su pie. Tomemos en s, a uno y otro lado de S, $SM=SM'$, con lo que serán oblicuos $RM=RM'$. Pero éstos son perpendiculares a r, y tomando un punto A de r resultarán iguales los triángulos rectángulos ARM y ARM' de iguales catetos; por tanto, $AM=AM'$, es decir, A equidista de M y M', como R y S. El plano $\beta=ARS$ es, pues, el plano de simetría de MM', lo que demuestra el teorema.

Los dos planos α y β se cortan según la recta p perpendicular a ambas rectas r y s. Las dos rectas cruzadas r y s se llaman *perpendiculares entre sí.*

7. Recta perpendicular a un plano.—El concepto de perpendicularidad entre rectas cruzadas permite generalizar la propiedad de la recta perpendicular a un plano diciendo:

Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a toda recta de éste. Si una recta r *es perpendicular a dos rectas* a *y* b *secantes entre sí, que se cruzan con ella, es perpendicular al plano que éstas determinan.* En efecto, si M es el punto de intersección de a y b, el plano perpendicular a r por M es único y, por tanto, coincide con los planos perpendiculares a r por a y b, es decir, no es otro que ab.



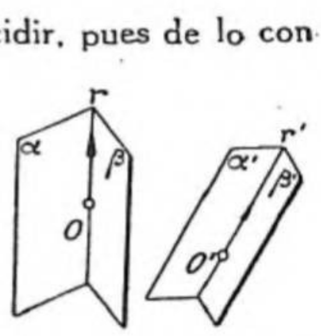
Por un punto P *pasa una perpendicular, y sólo una, a un plano* π.

Basta trazar por P los planos α y β perpendiculares a dos rectas secantes a y b del plano π. La intersección r de estos planos es perpendicular a a y b por pertenecer a uno y otro plano, luego lo es también a π. Y no puede haber otra perpendicular r' por P, pues entonces en el plano rr' estas dos secantes serían perpendiculares a la intersección de este plano con π.

El segmento PQ limitado por el punto P y el eje Q de la perpendicular se llama *distancia* del punto P al plano π (cuando no son incidentes).

8. Sección recta de un diedro.—La sección producida en un diedro por un plano perpendicular a la arista, es decir, el conjunto de los puntos comunes a este plano y al diedro, es un ángulo plano llamado *sección recta* del diedro. Sus lados son, pues, perpendiculares a la arista.

Si dos diedros $\alpha\beta$ *y* $\alpha'\beta'$ *son iguales, podemos hacerlos coincidir en forma que se superpongan dos puntos cualesquiera* O *y* O' *elegidos en sus aristas.* Basta superponer (Ax. III, 6) dos semirrectas Or y $O'r'$ de las aristas y dos caras $\alpha\alpha'$, elegidas de tal modo (Ax. III, 2) que la segunda cara determine en cada diedro el mismo sentido con respecto a dichas semirrectas. Las segundas caras ββ' quedarán así en el mismo semiespacio y deberán coincidir, pues de lo contrario existirían diedros iguales, uno parte del otro, en contradicción con el axioma III, 3 de rigidez.



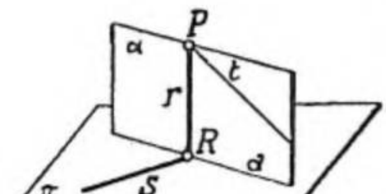
Al coincidir los diedros coincidirán sus secciones rectas por conservarse la perpendicularidad en el movimiento; de donde:

Todas las secciones rectas de diedros iguales, y en particular de un mismo diedro, son iguales.

Recíprocamente: *Si las secciones rectas de dos diedros son iguales los dos diedros lo son también*. Pues el movimiento que hace coincidir estas secciones hará coincidir también la perpendicular única a sus lados por el vértice, y, en consecuencia, coincidirán los semiplanos que definen los diedros.

Corolario: *Los diedros opuestos por la arista son iguales*. Por tener las secciones rectas opuestas por el vértice.

9. Planos perpendiculares.—Si la sección recta de un diedro es un ángulo recto el diedro se llama también *recto* y se dice que los planos son *perpendiculares* entre sí. Son también rectos los otros tres diedros que forman los planos de las caras, por serlo las secciones rectas.



Todo plano α que pasa por una perpendicular r a un plano π es perpendicular a él.

Sea a la intersección $\alpha\pi$. La perpendicular a a en α es r y la perpendicular s en π es también perpendicular a r. Luego la sección recta rs es un ángulo recto

Recíprocamente: *Todo plano α perpendicular a π trazado por un punto* P *contiene la perpendicular* r *por* P *a dicho plano π*. Pues al ser la sección recta sr del diedro $\pi\alpha$ un ángulo recto, la recta r será perpendicular a s y a la arista a, es decir, a dos rectas del plano π.

Por un punto P *pueden, por tanto, trazarse infinitos planos perpendiculares a un plano dado π*. Todos los que pasan por la perpendicular al plano por P.

Por una recta t *no perpendicular a un plano π pasa un plano perpendicular a π y sólo uno*. El plano determinado por la recta t y la perpendicular r a π por un punto P de la misma cumple la condición del enunciado y es único por contener todas las perpendiculares a π por los puntos de t (recíproco anterior).

EJERCICIOS

1. Lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto P a los infinitos planos que pasan por una recta r que no contiene P

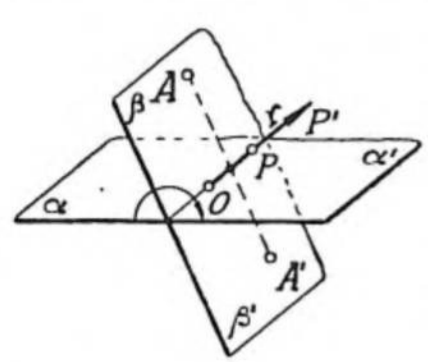
2. Demostrar que si dos pares de aristas opuestas de un tetraedro son ortogonales lo son también el tercer par. [Llámanse aristas *opuestas* de un tetraedro dos aristas no concurrentes.]

3. Llamando *alturas* de un tetraedro las rectas perpendiculares a cada cara trazadas por el vértice no contenido en ella, demostrar que las alturas del tetraedro del ejercicio anterior se cortan en un punto.

4. Condición necesaria y suficiente para que las cuatro alturas de un tetraedro sean concurrentes.

LECCIÓN 40.—LAS SIMETRÍAS EN EL ESPACIO

1. La simetría axial.—Dada una semirrecta r de origen O y un semiplano α cuyo borde es la recta que contiene r, llamaremos *simetría axial* al movimiento del espacio que transforma r en sí misma y el semiplano α en su opuesto α'. La recta de r se llama *eje de simetría* y las figuras transformadas por este movimiento se llamarán *simétricas respecto de dicho eje.*



Aplicando dos veces la misma simetría axial el movimiento resultante es la identidad, movimiento *único* que transforma r y α en sí mismos (Ax. III, 6), por lo tanto:

La simetría axial es una transformación involutiva. Las figuras simétricas se corresponden doblemente. Si F tiene por simétrica F', F' tiene por simétrica F.

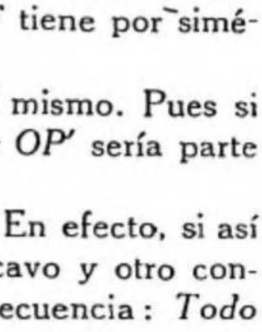
Todo punto P *del eje es doble,* es decir, homólogo de sí mismo. Pues si fuese P' su homólogo, uno de los segmentos homó ogos OP y OP' sería parte del otro, en contradicción con el axioma de rigidez.

Todo semiplano β *de borde* r *se transforma en su opuesto.* En efecto, si así no fuera se corresponderían los diedros $\beta\alpha'\beta'$ y $\beta'\alpha\beta$, uno cóncavo y otro convexo, en contra de lo dicho en la lección anterior. En consecuencia: *Todo plano que pasa por el eje es doble.*

Todo diedro cuya arista está en el eje se transforma en su opuesto, lo que prueba nuevamente la *igualdad de los diedros opuestos por la arista.*

Por ser dobles todos los p'anos del haz r, para hallar el simétrico de un punto cualquiera A basta hallarlo en la simetría de eje r en el plano Ar. De donde resulta:

El eje de simetría es mediatriz de los segmentos que unen puntos homólogos. Toda recta secante y normal al eje es doble. Todo plano normal al eje es doble. Los puntos homólogos en estos planos dobles son simétricos en la simetría plana central que tiene por centro el punto de intersección del eje con el plano.



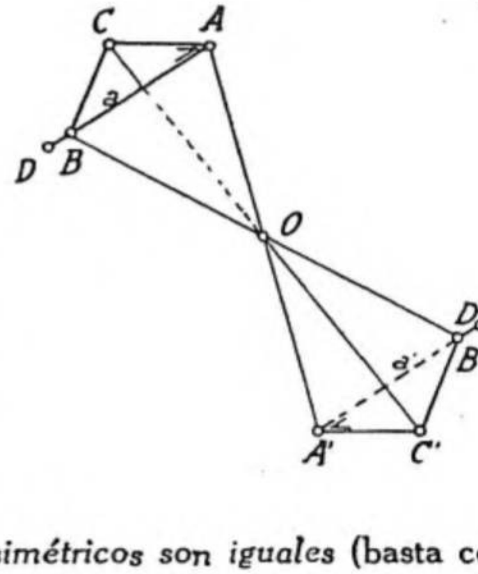
Toda recta a perpendicular al eje y cruzada con él tiene por simétrica una recta paralela a ella (Aplíquese la simetría central en el plano perpendicular a r por a.)

2. La simetría central.—El movimiento que acabamos de estudiar es una transformación en la que cada par de puntos homólogos son simétricos en una simetría p'ana respecto del eje.

Estudiemos por analogía la transformación puntual que se obtiene haciendo corresponder a cada punto A su simétrico A' respecto de un punto O y a éste el mismo. Llamaremos a esta transformación *simetría central de centro* O.

De esta definición se desprende: *La simetría central es una transformación involutiva*, por corresponderse doblemente cada par de puntos homólogos.

Se observa, desde luego, que esta transformación no puede ser un movimiento por cuanto transforma un triedro en su opuesto por el vértice *invirtiendo su sentido*, pero tiene propiedades muy parecidas a las del movimiento.



Si varios puntos están alineados y ordenados en la recta a sus homólogos también lo están (basta considerar la simetría central en el plano aO). De donde. *Si dos rectas se cortan, sus homólogas también.*

La simetría central conserva las relaciones de incidencia y orden.

Los segmentos simétricos son iguales, por serlo en una simetría plana de centro O. En consecuencia: *Los triángulos simétricos son iguales*, por tener lados iguales. *Los ángulos simétricos son iguales* (basta con llevar sobre sus lados segmentos iguales y aplicar la igualdad de los triángulos simétricos obtenidos). Al ser iguales los ángulos *se conserva en la simetría la perpendicularidad*. Si dos rectas o una recta y un plano son perpendiculares, sus simétricos también lo son. Por tanto: *Los diedros simétricos son iguales*, por serlo sus secciones rectas.

Además de estas propiedades, análogas a las de todo movimiento, tiene la simetría central las siguientes:

Las rectas y los planos que pasan por el centro son dobles, es decir, simétricos de sí mismos (resulta de la definición). *Son las únicas rectas y planos dobles*, ya que se verifica además:

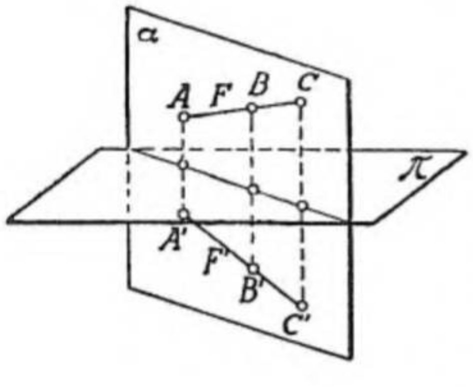
Toda recta a que no pasa por el centro tiene por simétrica otra paralela (considérese la simetría central en el plano Oa) y, análogamente: *Todo plano α que no pasa por el centro tiene por simétrico otro α' que no tiene con él punto alguno común.* En efecto, si lo tuviera, la recta de intersección $\alpha\alpha'$ tendría por homóloga la $\alpha'\alpha$ que es ella misma, y al ser doble contendría al centro, en contra de la hipótesis.

Dos planos sin ningún punto común se llaman *paralelos*, y podemos decir: *Los planos simétricos no dobles son paralelos.*

3. Simetría respecto de un plano.—Acabamos de obtener una transformación puntual del espacio que conserva las relaciones de incidencia y orden y en la que los segmentos, ángulos y diedros homólogos son iguales.

Propiedades idénticas tiene la transformación que se obtiene dejando fijos todos los puntos de un plano π y haciendo corresponder a cada punto exterior A

su simétrico respecto de él, es decir, el punto A' situado en la perpendicular por A y π, a igual distancia del pie P, y a distinto lado de π. Llamaremos a esta transformación *simetría especular* respecto del plano π (*).



De la definición resulta: *La simetría especular es una transformación involutiva. Todos los puntos, rectas y figuras de π son dobles. Todas las rectas y los planos perpendiculares a π son dobles;* más concretamente: *Si una figura* F *está contenida en un plano α perpendicular a π, su simétrica* F' *está en el mismo plano,* por contener éste todas las perpendiculares a π por sus puntos. Por consiguiente, F' no es otra que la figura simétrica de F en la simetría plana en α respecto de la recta de intersección $\alpha\pi$.

Como consecuencia de lo anterior resulta: Si varios puntos ABC ... están alineados y ordenados, sus simétricos $A'B'C'$ ... también lo están. Los segmentos simétricos AB y $A'B'$ son iguales.

Y de la igualdad de los segmentos simétricos se desprende como en la simetría central la igualdad de los triángulos, la conservación de la perpendicularidad y la igualdad de diedros.

La simetría especular invierte también el sentido, pues al triedro proyectante de un triángulo en π corresponde el que proyecta el mismo triángulo desde el punto simétrico A' situado en distinto semiespacio, triedro que es de opuesto sentido, según vimos en lección 38.

4. Comparación entre las simetrías central y especular.—Lo mismo la simetría central que la especular cumplen, en virtud de lo dicho, los axiomas III, 1, 2 y 3 del movimiento, excepto la conservación del sentido. El producto de dos de estas simetrías será, pues, una transformación que cumplirá dichos axiomas, incluso la conservación del sentido. Elegidos en esta transformación dos semirrectas homólogas r y r' y dos semiplanos α y α' limitados por las rectas respectivas r y r', esta transformación coincidirá, pues, con el movimiento que transforma $r\alpha$ en $r'\alpha'$. Es decir: *El producto de dos simetrías centrales o especulares, o una central y otra especular, es un movimiento.* Por lo tanto: *Transformando una misma figura mediante una simetría central y otra especular, las figuras resultantes son iguales.* En este sentido diremos que la simetría central y la especular son equivalentes.

5. Pseudomovimieno y pseudoigualdad.—El producto de un movimiento por una simetría central o especular es una transformación puntual que tiene las siguientes propiedades:

1.ª Ser biunívoca. 2.ª Conservar las relaciones de incidencia y orden. 3.ª Invertir el sentido. 4.ª Transformar los segmentos, ángulos y diedros en otros iguales a ellos.

(*) Por ser la simetría existente entre un objeto y su imagen en un espejo plano.

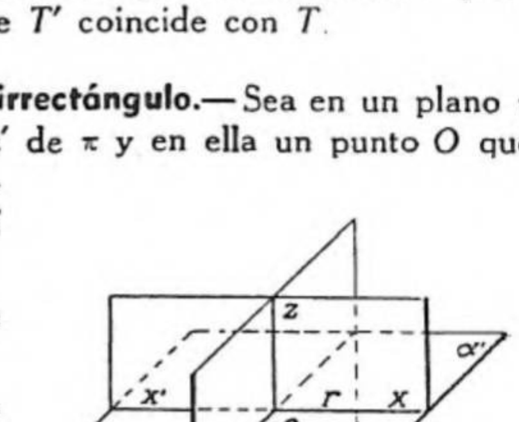
Como estas propiedades son también las del movimiento, salvo la inversión del sentido, llamaremos a toda transformación que las cumpla *pseudomovimiento*, y dos figuras correspondientes en un pseudomovimiento se llamarán *pseudoiguales* o *pseudocongruentes*.

Razonando como en las simetrías, se demuestra fácilmente que:

El producto de dos pseudomovimientos es un movimiento. El producto de un movimiento por un pseudomovimiento es un pseudomovimiento. *Los movimientos y pseudomovimientos forman conjuntamente un* GRUPO.

Existe un pseudomovimiento, y sólo uno, que transforma una semirrecta r en otra r' y un semiplano α limitado por la recta que contiene r en otro semiplano α' limitado por la recta de r'. En efecto, el producto del movimiento que transforma $r\alpha$ en $r'\alpha'$ por la simetría respecto del plano α' es un pseudomovimiento T que cumple la condición del enunciado. Si hubiese otro T', al transformar el espacio mediante T y mediante T', los dos espacios transformados se corresponderían en un movimiento en el que serían dobles r' y α', es decir, serían idénticos, lo que prueba que T' coincide con T.

6. Simetrías asociadas a un triedro trirrectángulo.— Sea en un plano π una recta r que limita dos semiplanos α y α' de π y en ella un punto O que la divide en dos semirrectas x y x'. Los movimientos que transforman O, r y π en sí mismos son:



1.° La *identidad*, movimiento único que transforma x en x y α en α

2.° La *simetría axial de eje* r, movimiento único que transforma x en x y α en α'.

3.° La *simetría axial de eje* y *perpendicular a* r *por* O *en el plano* π, movimiento único que transforma x en x' y α en α.

4.° La *simetría axial de eje* z *perpendicular a* π *por* O, movimiento único que transforma x en x y α en α'.

Estos cuatro movimientos *forman grupo*, por ser los únicos que transforman O, r y π en sí mismos. En particular:

El producto de dos simetrías axiales respecto de dos ejes x, *y perpendiculares secantes es la simetría axial respecto de la recta* z *perpendicular a ambos en su punto de intersección*. Pues el producto transforma x en x' y α en α'

Junto a estos movimientos existen los pseudomovimientos que dejan asimismo invariables O, r y π, que son:

1.° *La simetría especular respecto del plano* $\pi = xy$, pseudomovimiento único que transforma x en x y α en α.

2.° *La simetría especular respecto del plano* xz, pseudomovimiento único que transforma x en x y α en α'

3.° *La simetría especular respecto del plano* yz, pseudomovimiento único que transforma x en x' y α en α.

4.° *La simetría central respecto del punto* O, pseudomovimiento único que transforma x en x' y α en α'.

Estas cuatro simetrías forman grupo con los movimientos anteriores. En particular: *El producto de dos simetrías especulares respecto de dos planos* xy, xz *perpendiculares, es una simetría axial respecto de la intersección de los referidos planos.* Pues transforma x en sí mismo y α en α'. Análogamente: *El producto de una simetría especular respecto de un plano* xy *por la simetría central respecto de un punto* O *de este plano es la simetría axial respecto del eje* z, *perpendicular al plano por* O.

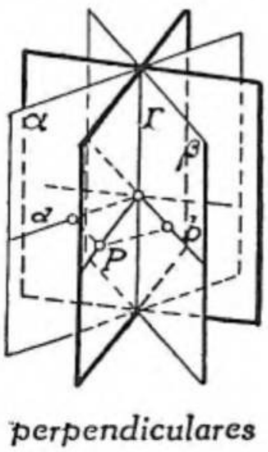
El producto de una simetría especular respecto de un plano xy *por la simetría axial respecto de un eje* x *de este plano es la simetría especular respecto del plano normal por* x *al* xy.

El producto de una simetría especular respecto de un plano xy *por la simetría axial respecto de un eje* z *perpendicular es la simetría central respecto del punto* O *de intersección del eje* z *con el plano* xy.

7. Semiplano bisector de un diedro.—El semiplano determinado por la arista de un diedro y la bisectriz de una de sus secciones rectas, divide al diedro en dos iguales, por serlo sus secciones rectas, y se llama *semiplano bisector* del diedro, el cual contiene asimismo las bisectrices de las restantes secciones rectas, por determinar ángulos iguales en todas ellas.

Los semiplanos bisectores de los diedros formados por dos planos son dos a dos opuestos y están en dos planos perpendiculares entre sí. Por estar en dos rectas perpendiculares entre sí las bisectrices de las secciones rectas.

El semiplano bisector de un diedro es el lugar geométrico de los puntos *interiores equidistantes de los planos de sus caras.*



En efecto, las perpendiculares desde un punto P a ambos planos $\alpha\beta$ son perpendiculares a la arista r del diedro (contenida en ellos) y, por tanto, determinan el plano de una sección recta. Las distancias de P a cada cara son, pues, las distancias de P a los lados ab de dicha sección. Pero en cada sección recta el lugar geométrico en cuestión es la bisectriz, y el lugar de todas ellas es el plano bisector, según se ha visto.

Corolario: *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos secantes es el conjunto de dos planos perpendiculares entre sí llamados bisectores de los diedros formados por aquéllos.*

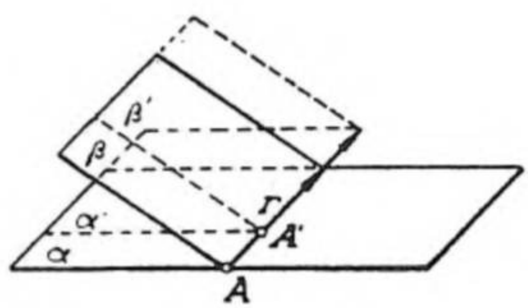
Cada uno de estos planos es *plano de simetría* de los dos dados, puesto que forma ángulos iguales con ellos.

EJERCICIOS

1. Producto de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares.
2. Producto de una simetría axial por otra especular cuyo plano pasa por el eje. de plano perpendicular al eje.
3. Producto de una simetría axial por otra central de centro en el eje.

LECCIÓN 41.—TRASLACIÓN Y PARALELISMO EN EL ESPACIO

1. Definición y propiedades de la traslación.— Dados dos puntos A y A' consideremos la recta r que determinan y un semiplano α limitado por ella. Como en Geometría plana, llamaremos *traslación* al movimiento que transforma la semirrecta de origen A que contiene A' en la de origen A' y del mismo sentido, y el semiplano α en sí mismo. La recta AA' se llama *guía de la traslación*.



Es fácil ver que cualquier otro semiplano β limitado por r se transforma también en sí mismo, pues, por ser iguales y del mismo sentido los diedros $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$, el semiplano β debe confundirse con β' (lección 39, § 8).

De aquí resulta que *todos los planos que pasan por la guía son dobles*, y las figuras planas en ellos contenidas experimentan una traslación en su plano definida por el vector $\overrightarrow{AA'}$, el cual sirve asimismo para definir la traslación en el espacio. Recordando, pues, las propiedades de la traslación en el plano, podemos afirmar:

Todas las traslaciones con una misma guía forman grupo. El lugar geométrico de los puntos homólogos de uno A *exterior a la guía en todas las traslaciones de este grupo es la paralela por* A *a la guía.* Brevemente dicho. *Las trayectorias del grupo son rectas paralelas a la guía, todas ellas son dobles y pueden servir igualmente de guía de las traslaciones del grupo.* Por tanto, *los planos que pasan por ellas son también dobles.* De ello se desprende·

Dos rectas a *y* b *paralelas a una tercera* r *lo son entre sí* (propiedad transitiva del paralelismo de rectas); pues podemos tomar cualquiera de ellas por guía de una traslación en que son también dobles las otras dos.

Todas las rectas paralelas entre sí, se dice que tienen la misma *dirección*.

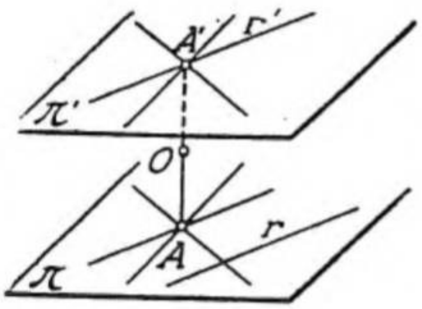
Dos puntos homólogos $\overrightarrow{PP'}$ *es una traslación* $\overrightarrow{AA}$ *determinan un vector* $\overrightarrow{PP'}$ *igual y paralelo al vector* $\overrightarrow{AA'}$, *ambos vectores definen la misma traslación.*

Dos rectas homólogas p *y* p' *en una traslación son paralelas* Basta considerar la traslación plana $\overrightarrow{PP'}$ que une dos de sus puntos homólogos y transforma p en p'.

El producto de dos traslaciones es una nueva traslación independiente del orden en que se efectúen las traslaciones componentes. Todas las traslaciones del espacio forman, pues, también, un grupo abeliano.

Las demostraciones de la lección 7.ª pueden repetirse aquí sin alteración.

2. Paralelismo de planos y de recta y plano.— Ya hemos dicho en la lección anterior que se llaman *paralelos* los planos que no tienen punto alguno común. Análogamente, toda recta que no tiene ningún punto común con un plano se llama *paralela* a él. Para obtener por un punto exterior A' a un plano π una recta paralela a él basta trazar la paralela r' a una recta r del plano. La recta r', perteneciente al plano rr', no podrá cortar a π más que en un punto de la recta r común a ambos planos, y esto no ocurre por construcción.



Existen, pues, por un punto A' *infinitas paralelas a un plano.* En virtud de la propiedad transitiva del paralelismo de rectas, para tener todas las paralelas a un plano π por un punto exterior A' bastaría trazar por A' las paralelas a las rectas de un haz de vértice A en el plano π. Ahora bien, la traslación $\overrightarrow{AA'}$ transforma el haz A en el de sus paralelas por A', luego, todas ellas están en el plano transformado de π por la traslación. Como cada dos rectas paralelas son simétricas respecto del punto medio O del segmento AA' (v. lec. 7.ª), los dos planos son también simétricos respecto de dicho punto y, por tanto, paralelos entre sí (v. lec. anterior). En resumen:

El lugar geométrico de todas las paralelas a un plano π por un punto exterior A' *es otro plano paralelo π'.*

En toda traslación los planos homólogos (no dobles) *son paralelos.*

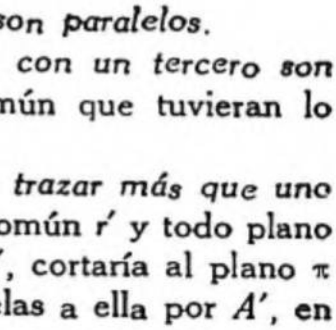
Además: *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son rectas paralelas,* pues son coplanarias y todo punto común que tuvieran lo sería a los dos planos, contra lo supuesto.

Por un punto A' *exterior a un plano π no se puede trazar más que uno paralelo a éste.* Pues si hubiesen dos tendrían una recta común r' y todo plano que pasara por A' y por un punto B de π sin contener r', cortaría al plano π según una recta y a sus paralelos según dos rectas paralelas a ella por A', en contra de lo establecido en Geometría plana.

Dos planos paralelos π y π' pueden transformarse uno en otro mediante la traslación definida por el vector AA' *que une dos cualesquiera de sus puntos.* En efecto, el plano paralelo a π por A' es único y coincide por tanto con el homólogo del otro en la traslación.

Dos planos paralelos a un tercero lo son entre sí. Pues si tuviesen un punto común estaríamos en contradicción con lo anterior.

Si un plano α corta a otro π, corta a todo paralelo π' a éste. Pues si no lo cortara, α y π serían ambos paralelos a π', en contra lo anterior.



Si una recta r *corta a un plano π corta a todo paralelo π'.* Pues si r fuese paralela a π' estaría contenida en el plano π paralelo a π' por el punto de intersección de r y π.

Del mismo modo: *Si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas.* (Demuéstrese.)

De la definición de paralelismo entre recta y plano, resulta además:

Por un punto P *exterior a una recta* r *pasan infinitos planos paralelos a ella.* Son los que pasan por r' paralela a r por P. De donde: *si una recta es paralela a dos planos secantes lo es a su intersección.*

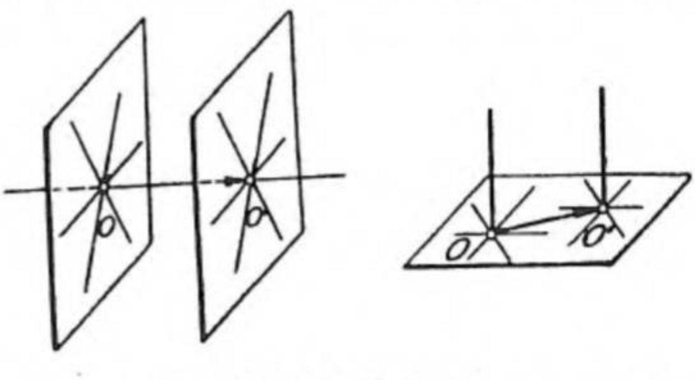
Por una recta s *que se cruza con otra* r *pasa un plano paralelo a ella y sólo uno* Trazando, por un punto de s, r' paralela a r, el plano sr' es el pedido. Otro análogo sr'' coincide con sr' por el paralelismo de r' y r''

Todos los planos *paralelos* entre sí se dice que tienen *la misma orientación.*

3. Perpendicularidad y paralelismo.—La traslación, como todo movimiento, conserva la perpendicularidad entre rectas secantes y, por tanto, entre recta y plano. De donde:

Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a todos sus paralelos.

Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí. Pues se corresponden en la traslación que lleva uno de los puntos de intersección sobre el otro.

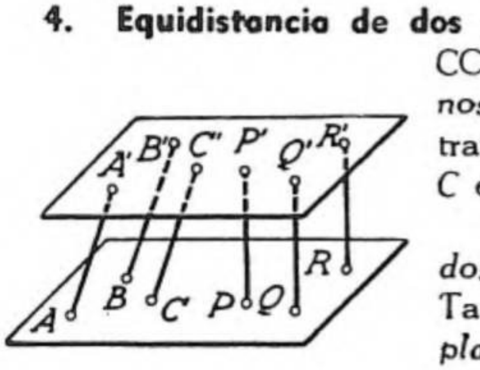


Si un plano es perpendicular a una recta lo es a todas sus paralelas.

Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas entre sí. Pues se corresponden en la traslación OO' definida por sus pies.

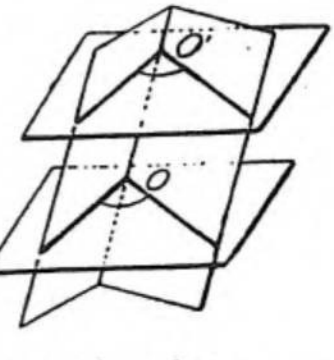
Si una recta r *es perpendicular a otra* s *lo es a toda paralela* s'. En efecto, r es por hipótesis perpendicular a un plano π que pasa por s, luego lo será al plano paralelo π' por s'.

4. Equidistancia de dos planos paralelos.—*Los segmentos AA', BB', CC', ... de rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos son iguales.* Pues la traslación AA' transforma un plano en otro y, por tanto, B en B' C en C', etc. En particular:



Los segmentos de perpendiculares comunes a dos planos y comprendidos entre ellos son iguales. También se expresa esta propiedad diciendo. *Dos planos paralelos son equidistantes.*

5. Angulos de lados paralelos.—Llamando, como en el plano, *semirrectas paralelas y de igual sentido* a las situadas en rectas paralelas y a un mismo lado de la recta que une los orígenes, se verifica igualmente:



Los ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos y de igual sentido, son iguales; pues se corresponden en la traslación que definen sus orígenes. También son iguales los ángulos cuando los sentidos de los lados son opuestos. En particular, resulta:

Las secciones producidas en un mismo diedro o en diedros opuestos por la arista por planos paralelos secantes a dicha arista son ángulos iguales.

6. Zona de espacio.—El paralelismo de dos planos exige que cada uno de ellos esté por completo en un semiespacio limitado por el otro. El conjunto de los puntos comunes a ambos semiespacios se llama *zona de espacio*.

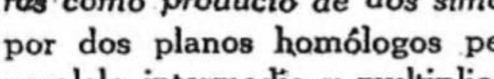
Si trazamos por el punto medio de un segmento de perpendicular común a ambos planos el plano paralelo a ellos, este plano pasa también por el punto medio de todo otro segmento perpendicular, por la igualdad de segmentos de paralelas comprendidos entre planos paralelos; por lo tanto, es plano de simetría de los dos dados, y se llama *plano paralelo medio*. Tiene la propiedad de bisecar, análogamente, todo otro segmento comprendido entre ambos planos. (Demuéstrese.)

7. Producto de simetrías especulares respecto de planos paralelos.—Efectuemos el producto de dos simetrías respecto de dos planos paralelos. Toda perpendicular común a ambos y todo semiplano limitado por ésta se transforman en sí mismos en ambas simetrías; por consiguiente, su producto es un *movimiento* en el que son dobles un sistema de rectas paralelas y los semiplanos por ellos limitados, sin ser dobles sus puntos; es decir:

El producto de dos simetrías respecto de dos planos paralelos es una traslación.

Recíprocamente: *Toda traslación puede obtenerse de infinidad de maneras como producto de dos simetrías especulares.* Basta dividir la zona limitada por dos planos homólogos perpendiculares a las guías mediante un plano paralelo intermedio y multiplicar las simetrías respecto de los planos paralelos medios de las dos zonas parciales.

8. Producto de simetrías centrales.—Análogamente: *El producto de dos simetrías centrales respecto de centros* O *y* O' *distintos es una traslación.*

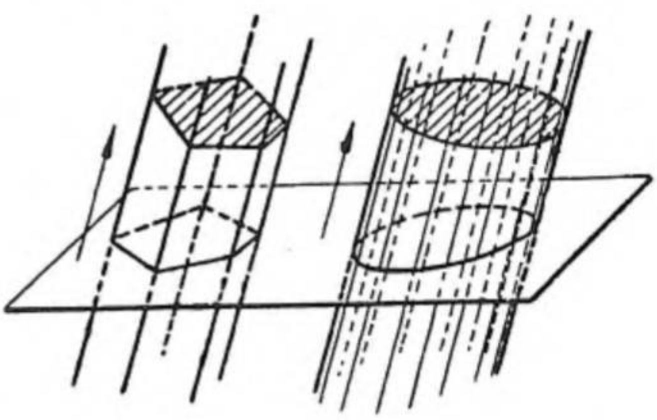


Pues si llamamos O'' al simétrico de O respecto de O', el producto indicado es un movimiento en el que a la semirrecta OO' le corresponderá la semirrecta prolongación de $O'O''$ y a todo semiplano limitado por la recta OO' le corresponde el mismo semiplano trasladado.

Recíprocamente: *Toda traslación* AA' *puede obtenerse como producto de dos simetrías centrales.* Basta para ello dividir el segmento AA' en dos parciales AB y BA' y multiplicar las simetrías respecto de los puntos medios de ambos segmentos.

9. Superficies y espacios prismáticos y cilíndricos.—Consideremos un polígono plano y un grupo de traslaciones con un mismo sistema de guías, secantes al plano del polígono. El lugar geométrico de las trayectorias de los distintos puntos del contorno se llamará *superficie prismática*, y está formada por fajas planas llamadas *caras*, unidas por rectas paralelas, llamadas *aristas* de la superficie. El conjunto de las trayectorias de los puntos del polígono se llama *espacio prismático*.

Si el polígono dado es *convexo*, cada lado deja en un mismo semiplano al polígono y, por consiguiente, todos sus puntos y las trayectorias de los mismos quedan en un mismo semiespacio respecto de la cara que contiene dicho lado. Es decir, el *espacio prismático es convexo* y puede definirse como el conjunto de los puntos comunes a los referidos semiespacios. La sección que en él produce un plano secante a sus aristas es un polígono convexo, y en particular lo es la sección producida por un plano perpendicular a las aristas, llamada *sección recta*.



Si en lugar de un polígono consideramos una circunferencia, el lugar geométrico de todas las trayectorias de sus puntos se llama *superficie cilíndrica de sección circular* y las referidas trayectorias, *generatrices* de la superficie. Las trayectorias de todos los puntos del *círculo* constituyen en ese caso lo que se llama un *espacio cilíndrico*. Las secciones producidas en la superficie por planos secantes a sus generatrices son líneas que estudiaremos en el segundo tomo de este curso.

Las secciones producidas en un espacio prismático o cilíndrico por dos planos paralelos entre sí y secantes a las generatrices, son iguales. Puesto que podrán hacerse coincidir por una traslación en la dirección de las guías que definen dicho espacio.

En particular: *Todas las secciones rectas son iguales.*

Un espacio prismático o cilíndrico es, pues, el *lugar geométrico de los polígonos o círculos homólogos a una sección en* TODAS *las traslaciones que tienen el mismo sistema de guías*. En tal sentido diremos que son «engendrados» por la traslación en la referida sección, usando el lenguaje corriente

EJERCICIOS

1. Hemos dicho que si una recta es perpendicular a otra lo es a toda paralela. ¿Es cierto el recíproco? Concretamente: Si s y s' son perpendiculares a r, ¿son paralelas entre sí?

2. Demostrar que dos perpendiculares a una recta son coplanarias o están en planos paralelos entre sí.

3. ¿Qué transformación se obtiene al multiplicar dos simetrías respecto de dos ejes paralelos?

4. El producto de una simetría de eje e por una traslación $\overrightarrow{AA'}$ de dirección perpendicular a e es otra simetría axial de eje e' paralela media de ee_1, siendo e_1 la recta homóloga de e en la traslación $\overrightarrow{AA'}$.

5. El producto de una traslación $\overrightarrow{AA'}$ por una simetría de eje e perpendicular a $\overrightarrow{AA'}$ es una simetría axial de eje e'' simétrico del anterior e' respecto de e.

6. Todas las traslaciones de direcciones paralelas a un plano y las simetrías axiales de eje perpendicular forman un grupo. Este grupo no es abeliano.

7. Demostrar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero alabeado son vértices de un paralelogramo.

8. Demostrar que el producto de cuatro simetrías centrales respecto de los vértices consecutivos de un paralelogramo es la identidad.

9. Si se traslada un extremo de un segmento AB dejando fijo el otro extremo el punto medio experimenta una traslación mitad.

10. Hallar el lugar geogétrico de los puntos medios de los segmentos que unen puntos homólogos en dos rectas homólogas en un movimiento del espacio

LECCIÓN 42.—PROYECCIONES, DISTANCIAS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

1. Proyección paralela sobre un plano.—Llamaremos *proyección* P' de un punto P sobre un plano π en la dirección de una recta r a la intersección del plano π con la paralela por P a r; esta paralela se llama *rayo proyectante* y el plano π *plano de proyección*. Si la dirección dada es perpendicular al plano de proyección ésta se llama *ortogonal*, o simplemente *proyección*, cuando no ha lugar a confusiones. Si r no es perpendicular al plano la proyección se llama *oblicua*.

Llamaremos proyección de una recta, de un segmento, y en general de una

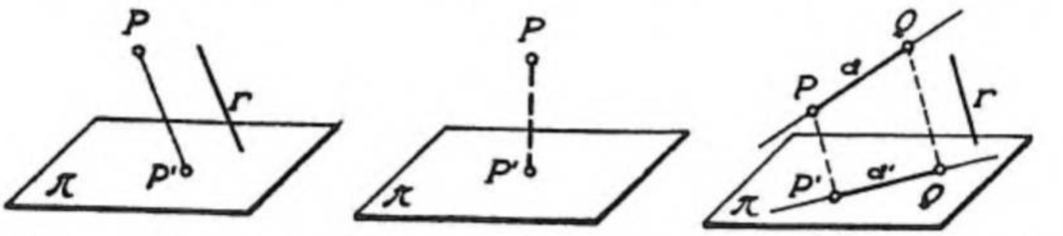
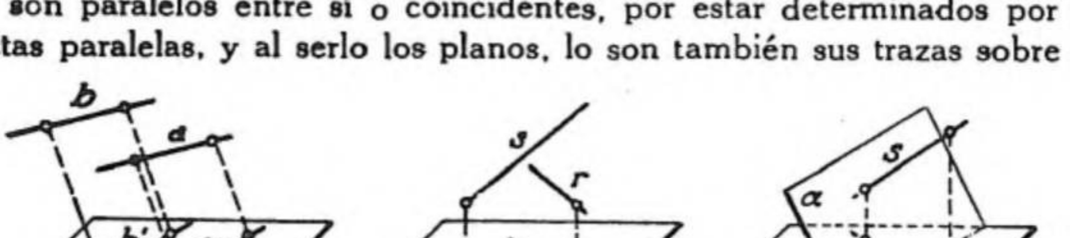


figura sobre un plano a la figura que forman las proyecciones de sus puntos. La proyección de una recta a no paralela a la dirección de proyección es otra recta a' intersección del plano π con el que forman las paralelas a r por los puntos de a, plano llamado *proyectante*; de donde, la *proyección de un segmento es otro segmento* comprendido en la faja de plano limitada por los rayos proyectantes extremos. Si la recta proyectada es paralela a la dirección de proyección, ella misma es la proyectante de todos sus puntos y su proyección se reduce a su propia traza sobre el plano.

2. Paralelismo y perpendicularidad entre proyecciones.—*Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones sobre un plano* (en dirección no paralela a ellas) *son dos rectas paralelas entre sí o coincidentes*. Pues los planos proyectantes son paralelos entre sí o coincidentes, por estar determinados por pares de rectas paralelas, y al serlo los planos, lo son también sus trazas sobre π.



Si dos rectas r *y* s *son perpendiculares entre sí, sin serlo ninguna al plano de proyección, y una de ellas* r *es paralela a dicho plano, las proyecciones ortogonales de dichas rectas son perpendiculares entre sí.*

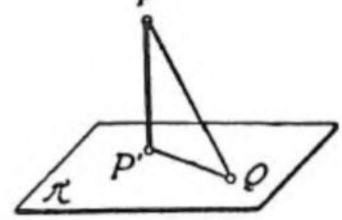
En efecto, la proyección r' de r es paralela a r, el rayo proyectante de un punto cualquiera de s es perpendicular a r' (por serlo a π). También es s perpendicular a r' por serlo a r. El plano proyectante de s es, pues, perpendicular a r', por contener dos rectas secantes entre sí y perpendiculares a dicha recta, y la traza s' de este plano es perpendicular a r', como queríamos demostrar.

Recíprocamente: *Si las proyecciones ortogonales de dos rectas* r *y* s *sobre un plano son perpendiculares entre sí y una de ellas* r *es paralela al plano de proyección o está contenida en él, ambas rectas son perpendiculares entre sí.* Puesto que s está contenida en el plano proyectante que es perpendicular a r.

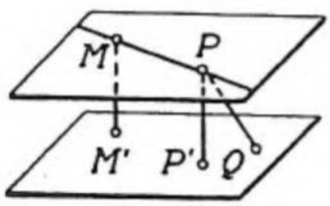
Corolario del teorema directo es: *Toda perpendicular* s *a un plano* α, *que corta al plano de proyección, se proyecta ortogonalmente sobre éste según una perpendicular a la traza* r *de* α *con* π.

Estas proposiciones son de uso constante en Geometría descriptiva

3. Distancia de un punto a un plano.— Ya dijimos en lección 39, § 7, que el segmento limitado por un punto y su proyección ortogonal sobre un plano π se llama *distancia* del punto P al plano π. Se llama así por ser menor que cualquier otro segmento oblicuo PQ que une P con otro punto Q del plano. Basta observar que el triángulo $PP'Q$ es rectángulo en P' y, por tanto, la hipotenusa $PQ > PP'$.

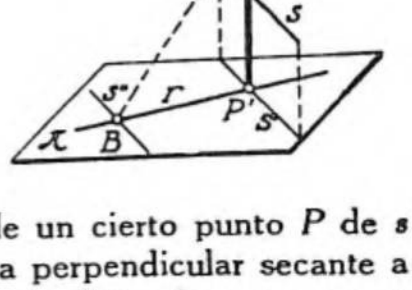


4. Distancia entre dos planos paralelos.—Se llama así a la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro; es independiente del punto elegido por la igualdad de los segmentos de perpendiculares entre ambos planos. Cualquier otro segmento oblicuo, comprendido entre ambos planos, es por lo tanto mayor.



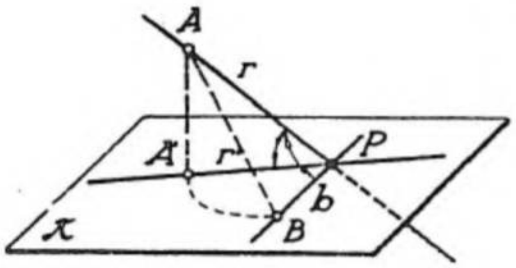
5. Distancia entre una recta y un plano paralelo.—Se llama así a la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano; siendo independiente del punto elegido y mayor que cualquier otro segmento oblicuo, por análoga razón a la anterior.

6. Distancia entre dos rectas que se cruzan.—Sean r y s las rectas. Todas las paralelas a s por los puntos de r están en el plano paralelo a s que contiene r. Este plano π es, pues, único y queda determinado por r y por una cualquiera s'' de dichas paralelas. Toda perpendicular a r y s debe, pues, serlo a r y s'' y, por tanto, al plano π. Ahora bien, todas las perpendiculares a π por los puntos de s cortan a π según la proyección ortogonal s' de s sobre π, que es paralela a s y no a r, por no serlo r y s entre sí. El punto P' de intersección de r y s' es, pues, pie de una perpendicular bajada desde un cierto punto P de s sobre el plano π. La recta PP' es, por tanto, la única perpendicular secante a las dos rectas dadas r y s y el segmento PP', igual a la distancia entre s y π, es menor, por lo antes demostrado, que cualquier otro segmento AB, oblicuo a π, que une puntos de r y s distintos de P y P'. En resumen:



Dadas dos rectas cruzadas r *y* s *existe una, y sólo una, secante perpendicular a ambas, y el segmento determinado por los puntos de intersección es* *menor que cualquiera otro que une dos puntos respectivamente situados en una y otra recta.* Este segmento se llama *distancia* entre las rectas r y s.

7. Angulo de recta y plano.—Si una recta es perpendicular a un plano diremos que forma *ángulo recto* con él, y si es paralela diremos que forma *ángulo nulo*. Si la recta r no es paralela ni perpendicular (oblicua) al plano π, llamaremos *ángulo de la recta con el plano* al ángulo agudo que forma la recta con su proyección sobre el plano. Se llama así por ser menor que cualquier otro de los ángulos que forma la recta con las semirrectas que pasan por la traza de la recta sobre el plano.



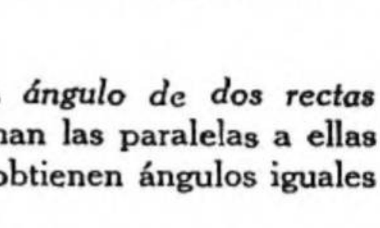
En efecto: Proyectemos un punto A de la recta sobre π, sea A' la proyección, y tomemos sobre otra semirrecta b de origen en la traza P, $PB=PA'$; se tendrá $AA'<AB$ y, por tanto, en virtud del teorema de los triángulos incongruentes, $\sphericalangle APA'<\sphericalangle APB$.

8. Angulo de dos rectas cruzadas.—Llamaremos *ángulo de dos rectas cruzadas* no perpendiculares al ángulo agudo que forman las paralelas a ellas por un punto. Cualquiera que sea el punto elegido se obtienen ángulos iguales por lección 41, § 5.

Si las rectas son perpendiculares se dice que su ángulo es recto, por ser también perpendiculares las paralelas en cuestión.

9. Invariancia de las distancias y ángulos en el movimiento.—Las distancias o ángulos antes definidos lo han sido mediante relaciones de paralelismo y perpendicularidad, que se conservan en todo movimiento; por lo tanto, el ángulo o la distancia entre dos elementos (planos, rectas, puntos) es igual al ángulo o distancia entre los elementos homólogos en todo movimiento.

10. Lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de un punto exterior.—Si desde un punto P exterior a un plano π trazamos la perpendicular PO y diversas oblicuas iguales PA, PB, PC, la igualdad de los triángulos rectángulos POA, POB, POC, prueba que $OA=OB=OC$; y recíprocamente, la igualdad de estas distancias implica la igualdad de las oblicuas.

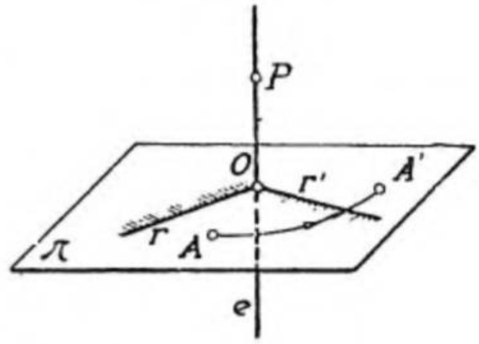


El lugar geométrico de los puntos de un plano π equidistantes de un punto exterior P es una circunferencia cuyo centro está en el pie de la perpendicular desde P *a* π.

COROLARIO.—*El lugar geométrico de los puntos equidistantes de tres* ABC *no alineados es la perpendicular al plano* ABC *por el circuncentro* O *del triángulo que estos puntos determinan.* En efecto, por lo anterior, todo punto de esta perpendicular equidista de A, B y C y recíprocamente si $PA=PB=PC$, A, B y C equidistan del pie de la perpendicular; pero el único punto del plano ABC equidistante de estos puntos es el circuncentro del triángulo ABC.

LECCIÓN 43.—GIROS EN EL ESPACIO

1. Concepto de giro. Propiedades.—Definamos un movimiento del espacio en el que se correspondan dos semirrectas Or y Or' de origen común O, y dos semiplanos en el plano π que ambas determinan, limitados por sus rectas respectivas, situados a un mismo lado de ellas. En este movimiento son dobles el plano π, el punto O, y, por consiguiente, la perpendicular e por O a π. También es doble todo otro punto P de e por el axioma de rigidez y la conservación de sentido. El movimiento se llama *giro* y la recta e, que tiene *dobles todos sus puntos*, se llama *eje de giro*.



Todos los planos perpendiculares al eje son dobles, por conservarse la perpendicularidad en el movimiento; y en cada uno de ellos se verifica un giro cuyo centro es la intersección del plano con el eje. De ello resulta:

Dos puntos homólogos A, A′ *están en una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje y de centro en él. Dos puntos homólogos equidistan del eje.* Este se halla, pues, *en el plano de simetría de* A *y* A′ (lec. 39, § 4).

Por ser dobles todos los puntos del eje, resulta: *Todos los puntos del eje equidistan de cada par de planos homólogos;* de donde: *El eje de giro está en el plano bisector del diedro definido por dos semiespacios homólogos.*

2. Construcción del eje.—Los teoremas anteriores permiten hallar fácilmente el eje de giro: 1.° Eligiendo dos pares de puntos homólogos AA' y BB', cuyos planos de simetría no coincidan y determinando el eje por intersección de dichos planos. 2.° Cuando se dan dos semirrectas homólogas y dos semiplanos homólogos limitados por las rectas respectivas, se determinará el eje mediante la intersección del plano de simetría del segmento definido por los orígenes o por dos puntos homólogos cualesquiera en ambas remirrectas, con el plano bisector del diedro definido por los dos planos y situado en semiespacios correspondientes.

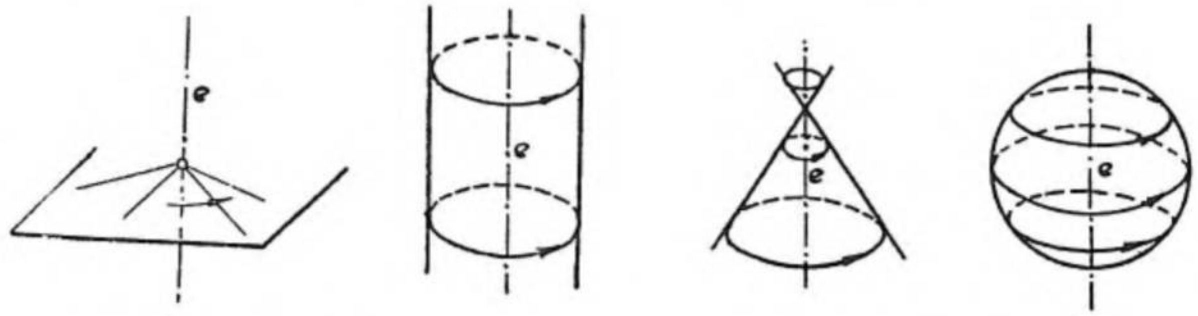
3. Angulo de giro.—Todo semiplano de borde e se transforma en otro del mismo borde y el diedro convexo que ambos semiplanos determinan tiene por sección recta un ángulo formado por dos semirrectas homólogas y se llama *ángulo de giro*, por ser independiente de los semiplanos o semirrectas homólogas perpendiculares al eje, consideradas (v. lec. 8.ª). Si ese diedro fuese llano el movimiento sería una simetría axial que puede considerarse, por tanto, como un giro de un ángulo llano.

4. Grupo de los giros con un mismo eje. Trayectorias.—Si convenimos en considerar la identidad como caso particular del giro (giro de ángulo nulo), podemos afirmar que:

Todos los giros con un mismo eje forman grupo, puesto que el producto de dos de ellos es también un giro con el mismo eje.

De lo dicho antes se desprende que *las trayectorias del grupo*, es decir, los lugares geométricos de los puntos homólogos de uno dado en todos los giros del grupo, *son circunferencias situadas en planos perpendiculares al eje y de centros en él.* Usando el lenguaje habitual diremos que son «engendradas» por la rotación o giro completo de uno de sus puntos.

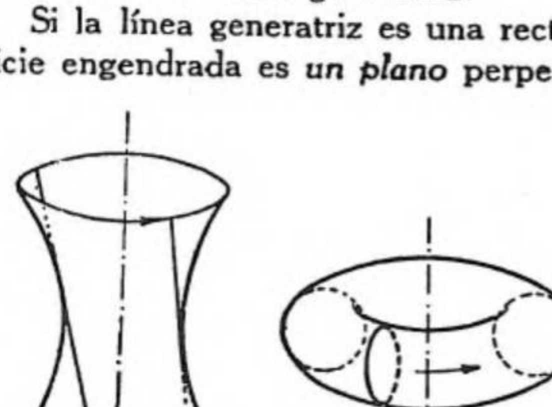
5. Superficies de revolución.—Si en lugar de un punto giramos una línea (recta o circunferencia), que llamaremos *generatriz*, el conjunto de todas sus homólogas en los giros del grupo se llama *superficie de revolución*, que puede también considerarse como lugar de las trayectorias de los distintos puntos de la línea, es decir, formada por circunferencias de planos normales al



eje y con centro en él. Estas circunferencias se llaman *paralelos* de la superficie, mientras reciben el nombre de *meridianos* las secciones de esta superficie por planos que pasan por el eje, llamados planos *meridianos*. Todos los meridianos son iguales por transformarse uno en otro mediante un giro del grupo.

Diremos también que la superficie de revolución es «engendrada» por la rotación de la línea generatriz.

Si la línea generatriz es una recta perpendicular y secante al eje, la superficie engendrada es *un plano* perpendicular a él. El plano puede, pues, considerarse como superficie de revolución de eje perpendicular a él.



Si la generatriz es paralela al eje la superficie engendrada es una *superficie cilíndrica, cuyos paralelos son circunferencias iguales*, y por ello puede engendrarse también por traslación de dichos paralelos. (V. lec. 41.)

Si la generatriz es secante oblicua al eje la superficie engendrada se llama *superficie cónica de revolución*. Sus meridianos están formados por dos rectas cuya bisectriz es el eje.

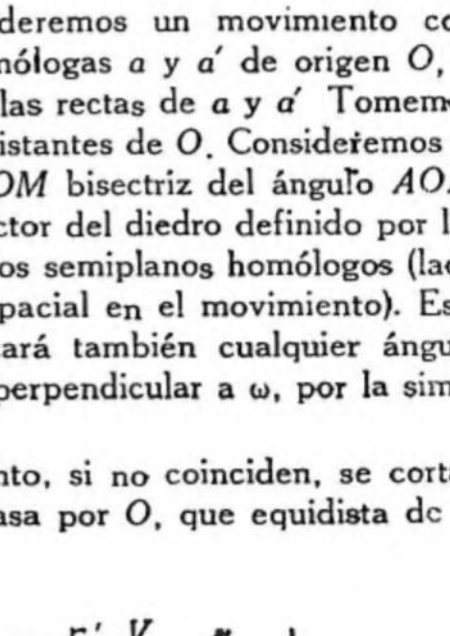
Si la generatriz es una circunferencia de diámetro en el eje la superficie engendrada se llama *superficie esférica*, y puede definirse también como el lugar geométrico de puntos del espacio equidistantes de un punto fijo O, llamado *centro*, puesto que todos sus puntos, y sólo ellos, equidistan del centro de la circunferencia generatriz Esta distancia se llama *radio*

Si la generatriz es una recta que se cruza oblicuamente con el eje la superficie engendrada se llama *hiperboloide de revolución*. Si la generatriz rectilínea se cruza ortogonalmente con el eje, engendra al haz de tangentes a una circunferencia de radio igual a la distancia de la generatriz al eje.

Si la generatriz es una circunferencia de centro exterior al eje y coplanaria con él, la superficie se llama *superficie toral* o *toro*

6. Movimiento con un punto fijo.—Consideremos un movimiento con un punto fijo, definido por dos semirrectas homólogas a y a' de origen O, y dos semiplanos homólogos α y α' limitados por las rectas de a y a' Tomemos sobre a y a' *dos puntos homólogos* A y A' equidistantes de O. Consideremos el plano σ de simetría de AA' (el cual pasa por OM bisectriz del ángulo AOA' y es perpendicular a su plano) y el plano ω bisector del diedro definido por los semiespacios situados a un mismo lado de los dos semiplanos homólogos (lado determinado por la conservación del sentido espacial en el movimiento). Este plano ω bisector del diedro en cuestión bisecará también cualquier ángulo sección producido en este diedro por un plano perpendicular a ω, por la simetría respecto a ω de los planos de las caras.

Los dos planos σ y ω pasan por O, por tanto, si no coinciden, se cortan según una recta e perpendicular a AA', que pasa por O, que equidista de A y A' y cuyos puntos equidistan de α y α' El plano π perpendicular a e por AA' es perpendicular a σ y a ω; por tanto corta a σ según la mediatriz MP del segmento AA' y a ω según la bisectriz VP de la sección del diedro $\alpha\alpha'$. El punto P de intersección de ambas rectas es, pues (lec. 8.ª), centro de un giro plano que transforma r en r' (intersecciones de α y α' con π). En consecuencia (§ 2) e es el eje de un giro del espacio que transforma A en A', r en r' y, por tanto, a en a' y α en α'. Es decir, coincide con el movimiento dado (Ax. III, 6)



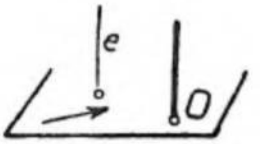
El eje de giro es la propia recta OV cuando ésta forma con a y a' ángulos VOA y VOA' iguales y del mismo sentido, es decir, homólogos en el movimiento Entonces σ es plano bisector de $\alpha\alpha'$ normal a ω.

La construcción falla si σ y ω coinciden, entonces también son iguales VOA y VOA' pero de distinto sentido, y el eje de giro es la intersección de los planos respectivamente normales a α y α' por a y a' En efecto, siendo estas rectas simétricas, respecto de $\omega=\sigma$, lo son también los planos normales por ellas y su intersección estará en ω, formando ángulos iguales con a y a'.

En resumen:

Todo movimiento del espacio con un punto fijo O es un giro alrededor de un eje que pasa por O.

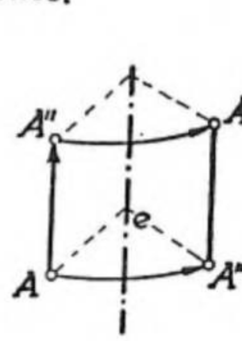
7. Producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a la dirección de la traslación.—*El producto de una traslación por un giro de eje perpendicular a las guías de la traslación es un giro alrededor de un eje paralelo a aquél.*



En efecto, todo plano normal al eje de giro será doble en el giro y en la traslación. En él se verifican, pues, una traslación y un giro planos cuyo producto es un giro alrededor de un cierto punto O; y el movimiento del espacio será, por tanto, (§ 1'), un giro alrededor del eje perpendicular al plano, es decir, paralelo al anterior por O.

8. Movimiento helicoidal.— El producto de una traslación por un giro alrededor de una de sus guías se llama *movimiento helicoidal*. Este producto *es independiente del orden en que se efectúan ambos movimientos.*

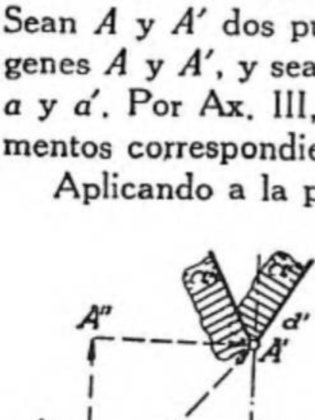
Sea, en efecto, A'' el homólogo de A en la traslación y A' el homólogo de A'' en el giro. Sea, finalmente, A''' el homólogo de A en el mismo giro. Todo consiste en probar que A''' y A' son homólogos en la traslación, lo que resulta de la igualdad de los segmentos AA'' y $A'''A'$ homólogos en el giro y del paralelismo de AA'' con el eje, lo que implica el paralelismo de su homólogo.



Si consideramos la identidad como caso particular del giro y de la traslación (giro o traslación nulas), podemos considerar asimismo un giro o una traslación, o la propia identidad, como casos particulares del movimiento helicoidal.

9. Reducción de un movimiento cualquiera a un movimiento helicoidal. Sean A y A' dos puntos homólogos, a y a' dos semirrectas homólogas de orígenes A y A', y sean α y α' dos semiplanos homólogos limitados por las rectas a y a'. Por Ax. III, 6, hay un movimiento y sólo uno definido por estos elementos correspondientes.

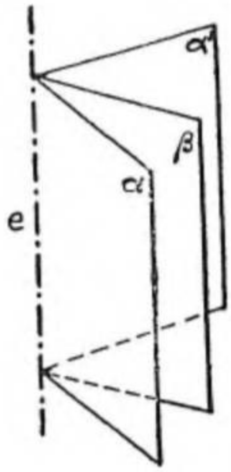
Aplicando a la primera figura F la traslación $\overrightarrow{AA'}$ se transforma en otra F'' y el movimiento que transforma F'' en F' es un giro alrededor de un eje e que pasa por el punto doble A'.



Ahora bien, la traslación $\overrightarrow{AA'}$ puede descomponerse en dos traslaciones, una $\overrightarrow{AA''}$ en la dirección del eje e y otra $\overrightarrow{A''A'}$ en dirección perpendicular a él. El producto de esta última por el giro e es otro giro de eje paralelo, y por tanto el movimiento dado puede obtenerse como producto de una traslación AA'' seguida de un giro alrededor de un eje paralelo a AA''.

Todo movimiento del espacio es, pues, un movimiento helicoidal. Este se reduce a un giro o a una traslación cuando la traslación o el giro que componen dicho movimiento helicoidal son, respectivamente, nulos.

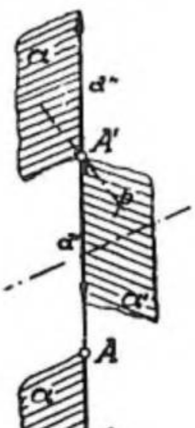
10. Producto de simetrías respecto de planos secantes.—El producto de dos simetrías respecto de dos planos secantes será un movimiento directo que tiene dobles todos los puntos de la intersección de ambos planos, es decir, se trata de un giro.



Recíprocamente: Todo giro puede descomponerse de infinitas maneras en producto de dos simetrías respecto de dos planos secantes, pues basta tomar como tales los bisectores de los diedros en que queda dividido un diedro de giro $\alpha\alpha'$ por un plano interior β. En efecto, el producto de las dos simetrías es un movimiento directo que transforma α en α' conservando dobles todos los puntos del eje; es decir, coincide con el giro dado.

11. Reducción de un movimiento a producto de simetrías especulares.—Como toda traslación y todo giro pueden obtenerse como producto de dos simetrías especulares, todo movimiento helicoidal, y, por tanto, todo movimiento en el espacio puede obtenerse como producto de cuatro simetrías especulares.

12. Reducción de un movimiento a producto de simetrías axiales.—Sean a y a' dos semirrectas homólogas en un movimiento helicoidal situadas sobre el eje e de giro; sean A y A' sus orígenes homólogos, y α y α' dos semiplanos homólogos limitados por dicho eje. La simetría respecto de la mediatriz de AA' en α, transforma α en sí mismo, A en A' y a en a''. La simetría respecto de la perpendicular p al eje en el plano bisector del diedro $\alpha\alpha'$ transforma A' en el mismo, a'' en a' y α en α'. El producto de ambas simetrías coincide, pues, con el movimiento helicoidal. Por consiguiente:



Todo movimiento del espacio puede reducirse a un producto de dos simetrías axiales.

EJERCICIOS (referentes a todo el capítulo XIII)

1. Trazar una recta paralelamente a otra dada y que corte a dos rectas dadas que se cruzan.
2. Trazar una recta que pase por un punto sea paralela a un plano dado y corte a una recta dada no paralela a él.
3. Idem una recta por un punto y paralela a dos planos dados no paralelos entre sí.
4. Imaginar procedimientos para asegurar el paralelismo de dos árboles de transmisión en el montaje de un taller y justificarlos.
5. Idear un procedimiento para montar sobre dos ejes paralelos dos poleas en un mismo plano perpendicular.
6. Definir la resultante de varias fuerzas (vectores) en el espacio y probar que tiene las propiedades conmutativa y asociativa.
7. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas secantes.
8. L. g. de los p. medios de los segmentos que unen puntos de dos rectas cruzadas.

9. Lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de paralelas a un plano fijo y cuyos extremos se apoyan en dos rectas fijas secantes al plano.

10. Idem de los puntos que dividen estos segmentos en una razón dada.

11. Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos exteriores a él sea constante.

12. Demostrar que en un cuadrilátero alabeado (no plano) los tres segmentos que unen los puntos medios de las diagonales y de los lados opuestos se bisecan mutuamente.

13. Demostrar que una figura carente de ejes de simetría no puede tener a la vez un centro y un plano de simetría.

14. Si una figura tiene un plano π de simetría y un eje e de simetría oblicuo a él, la recta e' simétrica de e respecto de π es también eje de simetría de la figura.

15. Si una figura tiene dos planos de simetría no perpendiculares entre sí tiene al menos un tercer plano de simetría.

16. El producto de una traslación $\overrightarrow{AB}$ por una simetría central O es otra simetría central O_1 tal que $\overrightarrow{O_1O}=\overrightarrow{AB}:2$. ¿Y si se invierte el orden del producto?

17. El producto de tres simetrías centrales respecto de tres centros no alineados es otra simetría central, cuyo centro forma paralelogramo con los otros tres.

18. Si $s_1\ s_2\ s_3$ son tres simetrías centrales se verifica $(s_1\ s_2\ s_3)^2=1$ (identidad).

19. Si un espejo gira alrededor de un eje de su plano, la imagen de una figura fija gira alrededor del mismo eje de un ángulo doble.

20. Demosctrar que todo plano que pasa por una diagonal de un paralelogramo equidista de los extremos de la otra diagonal.

21. Hallar sobre un plano π un punto equidistante de tres puntos dados exteriores al plano y no alineados.

22. Lugar geométrico de los puntos del espacio cuya suma de distancias a dos planos dados es un segmento dado. Idem a tres.

23. Lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de longitud constante cuyos extremos se apoyan en dos rectas que se cruzan ortogonalmente.

24. Producto de dos simetrías axiales respecto de dos ejes secantes.

25. Demostrar que el producto de dos simetrías respecto de dos ejes cruzados es equivalente al de una traslación por un giro.

26. Hallar una simetría axial en la que sean simétricas dos rectas cruzadas dadas. Número de soluciones.

27. Dadas dos circunferencias congruentes en el espacio, demostrar que existen dos giros que transforman una en otra. Caso en que los planos de ambas son paralelos.

28. Dados dos vectores congruentes v, v' situados en dos planos paralelos π, π', hallar un movimiento helicoidal que transforme v en v' y π en π'.

29. Lugar geométrico de los ejes de los movimientos helicoidales paralelos a una recta dada que transforman un punto dado A en otro A', también dado.

30. En dos figuras homólogas en un movimiento hallar dos puntos homólogos cuyo punto medio sea un punto prefijado. (Para facilitar la solución puede empezarse estudiando el caso en que el movimiento se reduzca a un giro.)

31. Idem cuyo plano de simetría sea un plano prefijado no paralelo al eje del movimiento helicoidal a que equivale el movimiento dado.

32. Demostrar que todo pseudomovimiento puede obtenerse como producto de una simetría central s_0 por un giro g.

33. Demostrar que los puntos medios de los segmentos que unen pares de puntos homólogos en un pseudomovimiento se hallan en un plano fijo.

34. Demostrar que todo pseudomovimiento puede obtenerse como producto de una simetría especular s_0 por un giro g' de eje perpendicular al plano de simetría.

(Descompóngase la s_c del ej. 32 en producto de una simetría especular de plano normal por el centro O de s_0 al eje e de g y de una simetría axial de eje paralelo a e por O.)

35. Todo pseudomovimiento puede obtenerse como producto de tres simetrías especulares (descompóngase g' del ejercicio anterior en producto de dos simetrías especulares $s'_e\ s''_c$).

36. Todo pseudomovimiento puede obtenerse como producto de una simetría axial por otra especular (efectúese el producto de s_e por s'_e).

Capítulo XIV.—PROPIEDADES METRICAS DE LOS ANGULOIDES Y POLIEDROS

LECCIÓN 44.—LOS ÁNGULOS POLIEDROS

1 Medida de diedros.—En la lección 39 hemos dicho que *A diedros congruentes corresponden secciones rectas congruentes.*

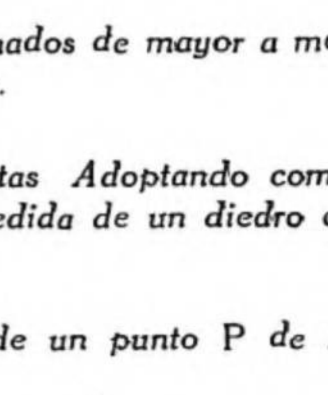
Diremos que un diedro δ es suma de varios α, β, γ cuando se puede descomponer, mediante semiplanos interiores, en diedros α', β', γ' congruentes a aquéllos. En virtud de la propiedad anterior, la sección recta de δ será la suma de las secciones rectas de α', β' y γ'. Por tanto: *A un diedro suma de varios, corresponde una sección recta suma de las secciones rectas de los sumandos.*

Definiendo $\delta > \alpha$ si $\delta = \alpha + \beta$; resulta: *A diedros ordenados de mayor a menor, corresponde secciones rectas igualmente ordenadas.*

En resumen (lección 18, § 5):

Los diedros son proporcionales a sus secciones rectas. Adoptando como diedro unidad el que tiene sección recta unidad, la medida de un diedro es igual a la de su sección recta.

2. Angulo plano y diedro suplementario.—*Si desde un punto* P *de la arista del diedro convexo* $\alpha\beta$ *trazamos las semirrectas* a, b *perpendiculares a sus caras y situadas respecto de cada cara en distinto semiespacio que el que contiene el diedro, el ángulo* ab *formado por estas semirrectas es suplementario del diedro* $\alpha\beta$.

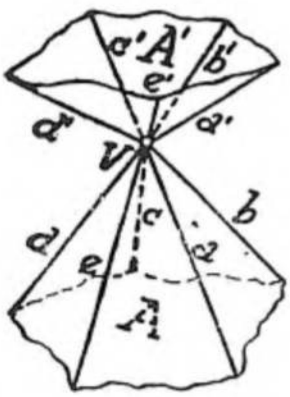


En efecto, a y b son perpendiculares a la arista, por serlo a α y β, respectivamente, por tanto el plano ab es perpendicular a dicha arista y corta al diedro según su sección recta mn

Pero $mn + nb + ba + am = 4$ rectos, y como $nb = am = 1$ recto, $mn + ab = 2$ rectos.

3. Anguloides polares.—*Si desde el vértice de un anguloide convexo* A *se trazan las semirrectas perpendiculares a sus caras, situadas respecto de cada una de ellas en distinto semiespacio que el que contiene el anguloide, todas ellas definen otro anguloide convexo* A′ *cuyas caras son suplementarias de los diedros de* A.

Basta aplicar el teorema anterior a los diedros de A. Así, en el anguloide $a'b'c'd'e'$ de la figura, a' es perpendicular a la cara ab del anguloide $abcde$; b' es perpendicular a bc; c' lo es a cd, etc.; y se verifica, designando con R el ángulo recto, ángulo $a'b'$ + diedro $abc=2\,R$, $b'c'+bcd=2\,R$, ...



El anguloide A' se llama *polar* del A. Demostremos que A' *es también convexo.*

Ordenadas circularmente las aristas de uno y otro anguloide en esta forma:

$$\begin{array}{lcccccc} A\ldots\ldots\ldots & a & b & c & d & e & a \\ A'\ldots\ldots\ldots & a' & b' & c' & d' & e' & a' \end{array}$$

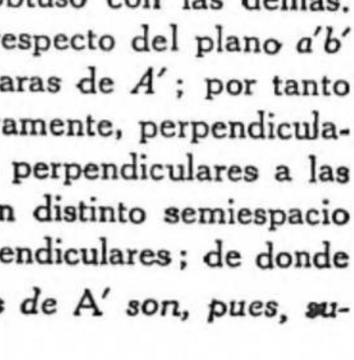
se observa que cada arista de A' forma, por construcción, ángulo recto con las dos de A que tiene encima, y ángulo obtuso con todas las demás, por estar en distinto semiespacio que ellas. Luego, recíprocamente, cada arista de A forma ángulo recto con las dos que tiene debajo y ángulo obtuso con las demás. Ello prueba que $c'd'e'$ están en un mismo semiespacio respecto del plano $a'b'$ (aquel en que no está b) y lo mismo para las demás caras de A'; por tanto A' *es convexo.* Y puesto que a, b, c, d, e son, respectivamente, perpendiculares a los pares de aristas $e'a'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'e'$, son perpendiculares a las caras de A', estando situadas respecto de cada cara en distinto semiespacio que A', por formar ángulo obtuso con las aristas no perpendiculares; de donde

El anguloide A *es también polar de* A'. *Los diedros de* A' *son, pues, suplementarios de las caras de* A.

Esta notable propiedad permite deducir relaciones métricas relativas a los diedros de un anguloide, conocidas relaciones métricas relativas a las caras y viceversa.

4. Propiedades métricas de las caras y diedros de un triedro.— I. *Toda cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos.*

Sea abc el triedro. Bastará demostrar el teorema para la cara mayor ab. Tomemos sobre ella $\sphericalangle ad = \sphericalangle ac$, unamos A y B, respectivamente, sobre a y b, y sea D el punto de intersección de d con AB. Tomemos, finalmente, $VC=VD$. Se tendrá $\Delta AVD = = AVC$ (1.er criterio); por tanto, $AC=AD$, y como en ABC es $BC > AB-AC = DB$ los triángulos VBC y VBD tienen dos lados respectivamente iguales $VB=VB$, $VD=VC$ y desigual el tercer lado $BC>DB$; de donde $bc>db=ab-ac$, es decir, $bc+ac>ab$, como queríamos demostrar.

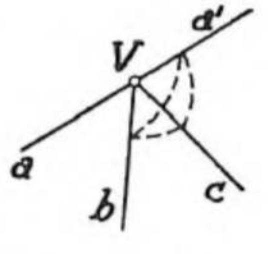


Si el triedro tiene dos caras iguales, mayores que la tercera o las tres iguales, la demostración no es aplicable, pero entonces el teorema es trivial.

COROLARIO.—*Toda cara de un triedro es mayor que la diferencia de las otras dos.*

II. *La suma de las caras de un triedro es menor que cuatro rectos.*

Apliquemos el teorema anterior al triedro $a'bc$ definido por las aristas b, c y la semirrecta a' opuesta a a



Se tiene. $bc<(2R-ab)+(2R-ac)$,

de donde $ab+bc+ac<4R$

III *La suma de dos diedros de un triedro está comprendida entre dos y seis rectos.*

Llamemos, respectivamente, α, β, γ los diedros de aristas a, b y c.

Apliquemos a las caras del triedro polar la propiedad II y se tendrá·

$$0<(2R-\alpha)+(2R-\beta)+(2R-\gamma)<4R$$

Restemos de 6 rectos estos tres valores angulares y quedará

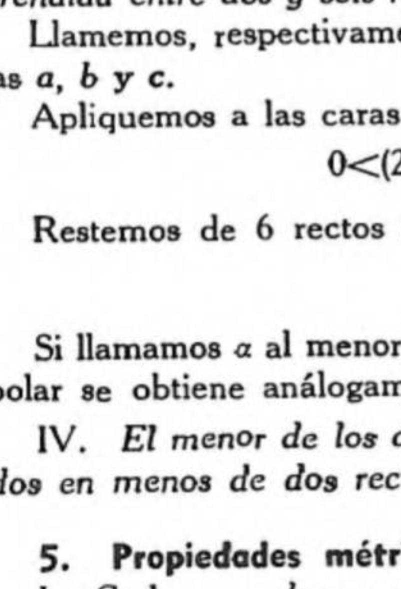
$$6R>\alpha+\beta+\gamma>2R$$

Si llamamos α al menor de los diedros y aplicamos la propiedad I al triedro polar se obtiene análogamente $\beta+\gamma-\alpha<2R$ O sea:

IV. *El menor de los diedros de un triedro difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.*

5. Propiedades métricas de las caras y triedros de un anguloide.—

I. *Cada cara de un anguloide* abcde *es menor que la suma de las restantes.*



Aplicando la propiedad I anterior a los triedros abc, acd, ade se tendrá:

$$ab<bc+ac$$
$$ac<cd+ad$$
$$ad<de+ea$$

y, sumando resulta

$$ab<bc+cd+de+ea$$

II. *La suma de las caras de un anguloide convexo es menor que cuatro rectos.* Prolonguemos las dos caras contiguas a la ab en los sentidos ea y cb, formando el diedro afb definido por los semiespacios limitados por sus planos y que contienen al anguloide. Sea f la arista de dicho diedro. El anguloide $fcde$ es también convexo y tiene *una cara menos* que el dado $abcde$; pero *la suma de sus caras es mayor que la de las caras de éste.* En efecto, la cara ab se ha sustituído por la suma $af+fb>ab$.

Repitiendo el proceso, llegaremos, por disminución de caras, a construir un triedro cuyas caras sumen más que las caras del anguloide dado. Pero como en todo triedro se cumple la propiedad II, se verificará igualmente para el anguloide de partida.

III. *La suma de los diedros α, β, γ ... de un anguloide convexo de n caras está comprendida entre $2n$ y $2n-4$ ángulos rectos.*

En efecto, aplicando la propiedad anterior al anguloide polar, resulta

$$0<(2R-\alpha)+(2R-\beta)+(2R-\gamma)+\ldots<4R$$

y restando de $2nR$, resulta:

$$2nR>\alpha+\beta+\gamma+\ldots>(2n-4)R$$

6. Triedro isósceles.—*Si dos caras de un triedro son iguales, lo son también los diedros opuestos.*

Basta observar que el triedro es simétrico respecto del plano bisector del diedro que forman las caras iguales. Recíprocamente:

Si dos diedros de un triedro son iguales, lo son las caras opuestas. Basta considerar el triedro polar.

Este triedro se llama *isósceles.*

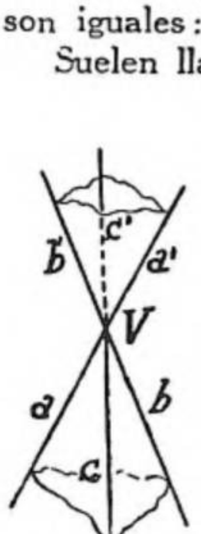
7. Igualdad de triedros.— Dos triedros congruentes o pseudo-congruentes abc y $a'b'c'$ (lec. 40, § 5) tienen sus caras y sus diedros respectivamente iguales.

Así, llamando α, β, γ y α', β', γ' los diedros de aristas a, b, c, a', b', c' se verificará

$$\begin{matrix} ab=a'b' & bc=b'c' & ac=a'c' \\ \alpha=\alpha' & \beta=\beta' & \gamma=\gamma' \end{matrix} \qquad [1]$$

Si los triedros son congruentes, los sentidos abc y $a'b'c'$ en ambos triedros son iguales: si son pseudo-congruentes dichos sentidos son opuestos.

Suelen llamarse simplemente *iguales* estos triedros cuando no interesa distinguir si son o no superponibles.



El ejemplo más sencillo de triedros iguales no superponibles lo constituyen dos triedros no isósceles abc y $a'b'c'$ opuestos por el vértice, es decir, simétricos respecto de éste.

Las caras ab, bc y ac son opuestas por el vértice de las $a'b'$, $b'c'$, $a'c'$ y los diedros α, β, γ opuestos por la arista de α', β', γ'. Los sentidos de ambos triedros son opuestos de tal modo que al hacer coincidir a y b con a' y b' los dos triedros quedan en distinto semiespacio respecto del plano de esta cara, y si se invierte el ángulo $a'b'$ haciendo coincidir b' con a y a con b' para que ambos triedros queden en el mismo semiespacio, tampoco coincidirán, a menos que coincidan los diedros α' con β y β' con α, lo que exige $\alpha=\beta$, es decir, el triedro isósceles. En resumen:

Dos triedros opuestos por el vértice sólo son congruentes si son isósceles.

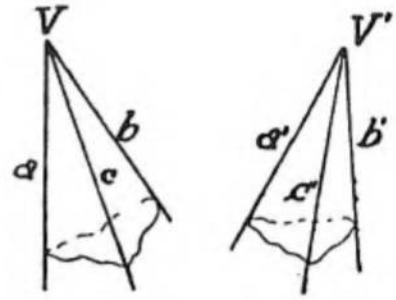
8. Criterios de igualdad de triedros.— Las igualdades [1] del párrafo anterior no son independientes. Basta con que se verifiquen algunas de ellas para poder asegurar la igualdad de los triedros y, por consiguiente, las igualdades restantes, como vamos a ver en los siguientes teoremas. En ellos supondremos los dos triedros de igual sentido Si no lo fueran, sustituiríamos uno de ellos por su opuesto por el vértice, razonando sobre éste.

1.^{er} CRITERIO DE IGUALDAD.—*Si dos triedros tienen respectivamente iguales dos caras y el diedro comprendido, son iguales.*

Se verifica $ab=a'b'$, $ac=a'c'$, $\alpha=\alpha'$.

Supuestos ambos del mismo sentido, apliquemos al triedro $a'b'c'$ el movimiento que hace coincidir $a'b'$ con ab, y los semiespacios en que se sitúan c' y c.

Por ser $\alpha=\alpha'$ coincidirán los semiplanos ac y $a'c'$ y, por ser iguales los ángulos ac y $a'c'$, coincidirán c y c' y, por tanto, los triedros. Si los sentidos fueran opuestos, aplicaríamos el razonamiento a uno de los diedros y al opuesto por el vértice al otro, con lo que los dos diedros dados serían pseudocongruentes.



2.° CRITERIO.—*Si dos triedros tienen respectivamente iguales una cara y los dos diedros contiguos, son iguales.*

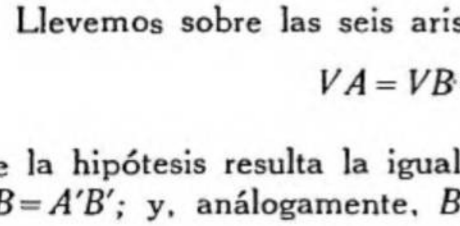
Se demuestra análogamente al anterior, o pasando al triedro polar

3.^{er} CRITERIO.—*Dos triedros que tienen sus caras respectivamente iguales, son iguales.*

Llevemos sobre las seis aristas segmentos iguales

$$VA=VB=VC=V'A'=V'B'=V'C'.$$

De la hipótesis resulta la igualdad de los triángulos $VAB=V'A'B'$, de donde $AB=A'B'$; y, análogamente, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$



Por tanto, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes.

Por virtud de la lección 42, § 10, los vértices V y V', respectivamente equidistantes de A, B, C y A', B', C', están sobre las perpendiculares a los planos ABC y $A'B'C'$ trazadas por los circuncentros O y O' de los triángulos respectivos.

El movimiento que haga coincidir los triángulos congruentes ABC y $A'B'C'$ hará, pues, coincidir estas perpendiculares. Y como $AO=A'O'$ y $AV=A'V'$, será también $VO=V'O'$; por tanto, V y V' coincidirán después del movimiento si los triedros tienen el mismo sentido, o serán simétricos respecto del plano ABC si tienen sentidos opuestos. Es decir, después del referido movimiento, los triedros coinciden o son simétricos; lo que demuestra el teorema.

4.° CRITERIO.—*Dos triedros que tienen los diedros respectivamente iguales, son iguales.* En efecto, los triedros polares lo son, en virtud del criterio anterior

LECCIÓN 45.—PROPIEDADES MÉTRICAS DE LOS POLIEDROS. PRISMAS Y PIRÁMIDES

En la lección 37 hemos dado ya la noción de poliedro convexo y hemos demostrado algunas propiedades generales del mismo (teorema de Jordan, teorema de Euler), en las que sólo entran en juego axiomas de ordenación. Veamos ahora algunas propiedades métricas de los poliedros convexos en general y de los poliedros convexos especiales.

1. Suma de los ángulos de las caras de un poliedro convexo.— Los ángulos de cada cara suman tantas veces dos rectos como lados tiene la cara menos dos. Si n_1, n_2, ... n_c son los números de lados de las c caras del poliedro, la suma de los ángulos de todas ellas valdrá, pues,

$$(n_1+n_2+\ldots+n_c-2c)\cdot 2R$$

Pero $n_1+n_2+\ldots+n_c$ es igual al doble del número a de aristas del poliedro, por ser cada una de ellas lado de *dos* caras. Tendremos, pues:

$$\text{Suma de ángulos de caras}=4(a-c)R.$$

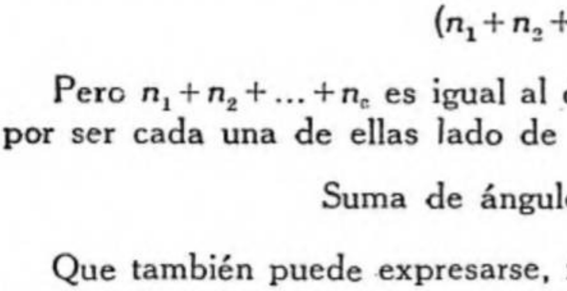
Que también puede expresarse, recordando que $c+v=a+2$ (Euler), de este otro modo:

$$\text{Suma de ángulos de caras}=4(v-2)R.$$

La suma de los ángulos de las caras de un poliedro convexo es igual a tantas veces cuatro rectos como vértices tiene el poliedro menos dos.

El teorema es aplicable, igualmente, a todo poliedro euleriano de caras convexas.

2. El prisma.— Llamaremos *prisma* al conjunto de puntos pertenecientes a un *espacio prismático* (lec. 41, § 8) y a una *zona* (lec. 41, § 5) limitada por dos planos paralelos secantes a las aristas de dicho espacio. La parte de superficie prismática comprendida en la zona se llama *superficie lateral* del prisma, y *aristas laterales* los segmentos de arista a ella pertenecientes. Las secciones producidas en el espacio prismático por los planos secantes que limitan el prisma, se llaman *bases* del mismo y sus lados *aristas básicas*. La distancia entre los planos de las bases se llama *altura* del prisma.



prisma oblicuo prisma recto

Si los planos de las bases son perpendiculares a las aristas laterales, el prisma se llama *recto*. En caso contrario se llama *oblicuo* y entonces la sección producida en el espacio prismático por un plano perpendicular a las aristas laterales se llama *sección recta* del prisma. Los planos determinados por aristas laterales no consecutivas se llaman *planos diagonales* del prisma.

Recordando que *las secciones producidas en un espacio prismático por dos planos paralelos, son iguales,* resulta:

Todas las secciones rectas de un prisma oblicuo son iguales.

Las bases de un prisma son iguales y de lados respectivamente paralelos, por ser homólogos en una traslación.

De donde: La superficie lateral está formada por *paralelogramos* llamados *caras laterales* del prisma. *Todas las aristas laterales son iguales.*

El prisma se llama triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, ... n-gonal, según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, ... n-gonos.

3. El paralelepípedo.— Un prisma recto u oblicuo cuya base es un paralelogramo se llama *paralelepípedo.* Tiene, pues, seis caras; todas ellas son paralelogramos y pueden servir de base al paralelepípedo. Cada cara y la paralela se llaman *opuestas* y diremos:

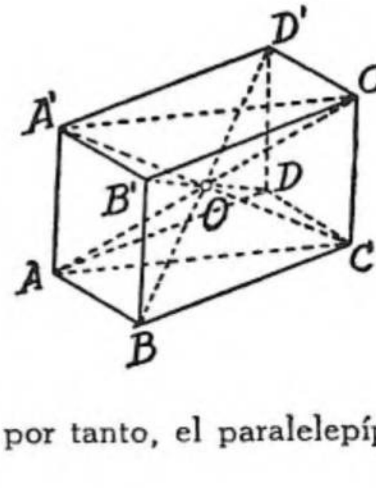
Dos caras de un paralelepípedo son paralelogramos iguales.

Las doce aristas del paralelepípedo son, pues, cuatro a cuatro paralelas e iguales.

Llámanse vértices *opuestos* los que no están en una misma cara. Las rectas que unen vértices opuestos se llaman *diagonales;* como los vértices son ocho, las diagonales son *cuatro.*

Las cuatro diagonales del paralelepípedo se cortan en su punto medio.

Consideremos el paralelogramo $AA'C'C$ sección del paralelepípedo por un plano diagonal. A y C' son vértices opuestos en dicho paralelogramo y en el paralelepípedo; lo mismo ocurre con A' y C; por tanto, las dos diagonales AC' y $A'C$ se cortan en su punto medio O. Análogamente para AC' y BD' y para AC' y $B'D$.



El punto de intersección de las diagonales es centro de simetría del paralelepípedo.

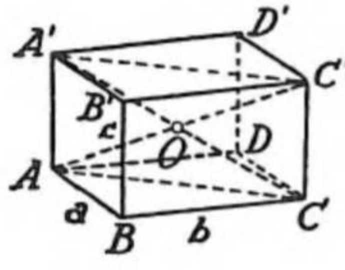
En efecto, en la simetría central que tiene dicho punto por centro, cada vértice se transforma en su opuesto y cada cara en su opuesta; por tanto, el paralelepípedo se transforma en sí mismo.

4. El ortoedro.— A todo paralelepípedo recto de base rectangular le llamaremos, para abreviar, *ortoedro* (*).

Las seis caras de un ortoedro son, pues, rectángulos dos a dos iguales. Las tres aristas a, b, c concurrentes en un vértice definen, dos a dos, dichos rectángulos y sus medidas se llaman las *tres dimensiones* del ortoedro.

(*) Denominación introducida por Rey Pastor en nuestra colección elemental y que nos pareció acertada y cómoda.

Las diagonales del ortoedro son iguales. En efecto, $A'C = AC'$ por ser diagonales del rectángulo $ACC'A'$ Análogamente las demás.

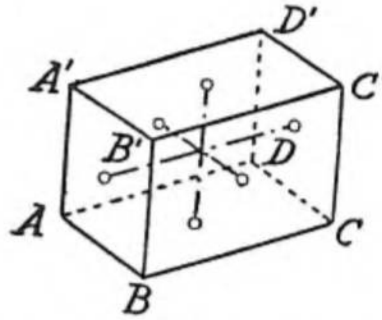


El centro de simetría equidista, pues, de los ocho vértices.

Además de la simetría respecto del punto de intersección de las diagonales, el ortoedro presenta las simetrías siguientes:

SIMETRÍAS ESPECULARES.—Todo plano paralelo a dos caras opuestas $ABCD$ y $A'B'C'D'$ trazado por el centro O, es plano de simetría. En efecto, será perpendicular a las aristas AA', BB', CC', DD'; y por pasar por el punto O, que equidista de sus extremos, será plano de simetría de todas ellas (lecs. 39 y 40) y, por tanto, del ortoedro.

SIMETRÍAS AXIALES.—Como el producto de dos simetrías especulares respecto de dos planos perpendiculares es una simetría axial respecto de la recta de intersección, resulta:

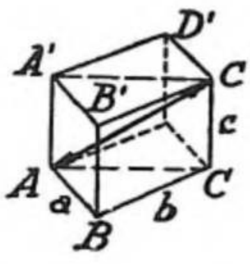


El ortoedro tiene tres ejes de simetría, que son las rectas que unen los centros de caras opuestas. Puesto que por cada par de estos puntos pasan dos planos de simetría perpendiculares.

5. Teorema de Pitágoras en el ortoedro.— *En todo ortoedro el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las aristas concurrentes en un vértice.*

Ya hemos dicho que las cuatro diagonales son iguales. En el rectángulo diagonal $ACC'A$ se tiene

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2$$



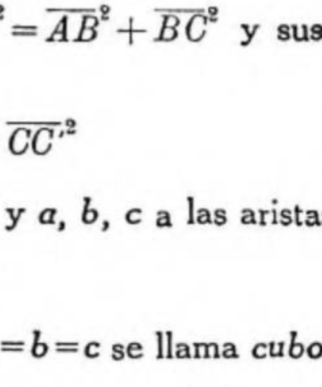
Pero en el rectángulo básico $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ y sustituyendo

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CC'}^2$$

Es decir, llamando d a la diagonal y a, b, c a las aristas

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

6. El cubo.— Un ortoedro cuyas aristas son iguales $a = b = c$ se llama *cubo*. Las seis caras del cubo son, pues, cuadrados iguales, concurriendo tres de ellas en cada vértice.



Si a es la arista, la diagonal vale $d = \sqrt{3}$ por ser $d^2 = 3a^2$.

Además de los planos de simetría propios del ortoedro, el cubo tiene:

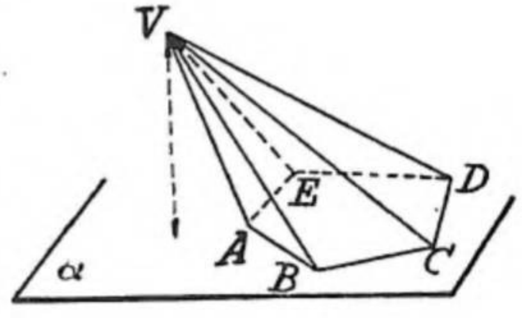
Los seis planos diagonales de simetría. En efecto: el plano $ACC'A'$ es plano de simetría de BD y de $B'D'$.

Los seis ejes de simetría que resultan de unir los puntos medios de las aristas opuestas. En efecto, la recta que une los puntos medios de AA' y CC' es intersección de dos planos de simetría perpendiculares: el diagonal $ACC'A'$ y el paralelo medio a las caras $ABCD$ y $A'B'C'D'$.

En total: Nueve planos de simetría, nueve ejes de simetría y un centro.

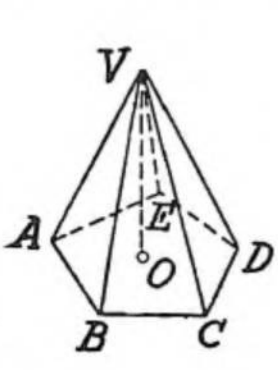
En cristalografía se consideran todavía otros ejes llamados de *simetría ternaria,* que son los cuatro que unen vértices opuestos, llamados así porque el cubo coincide consigo mismo mediante un giro de $360° : 3 = 120°$ alrededor de cada uno de ellos.

7. La pirámide.—La sección producida en un anguloide de vértice V por un plano α, que corte todas sus aristas sin contener V, es un *polígono,* que es convexo si el anguloide lo es. El conjunto de todos los puntos del anguloide situados en el semiespacio αV es un poliedro llamado *pirámide,* que puede, por tanto, definirse como el *conjunto de los puntos de todos los segmentos que unen un punto* V, *llamado* VÉRTICE *con los puntos de un polígono plano, llamado* BASE.



La pirámide es convexa si el polígono base $ABCDE$ lo es; pues si CDE, por ejemplo, están en un mismo semiplano respecto de AB están en un mismo semiespacio respecto de ABV.

Los triángulos VAB, VBC, ... determinados por el vértice y los lados del polígono base se llaman *caras laterales.* Los segmentos VA, VB, ... *aristas laterales;* los lados AB, BC, ... aristas básicas; la distancia del vértice V al plano α de la base se llama *altura* de la pirámide.



La pirámide se llama *triangular, cuadrangular, pentagonal, ... n-gonal,* según que la base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono, ... n-gono. La pirámide triangular se se llama *tetraedro* por ser un poliedro de cuatro caras.

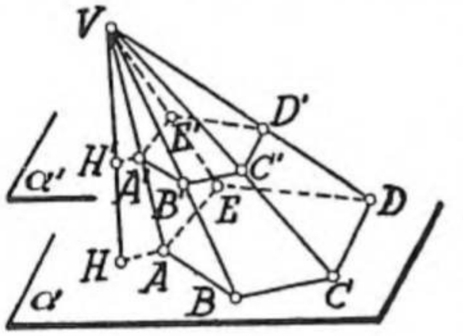
La pirámide se llama *regular* cuando la base es un polígono regular y el vértice está en la perpendicular al plano de la base por el centro O de esta base, perpendicular llamada *eje* de la pirámide.

En virtud de lección 10: *Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales. Las caras laterales son triángulos isósceles iguales.*

La altura común de estas caras se llama *apotema* de la pirámide.

8. Tronco de pirámide. Secciones paralelas de un anguloide.—Si cortamos una pirámide por un plano paralelo al de la base α, que separe ésta del vértice, la pirámide queda descompuesta en dos poliedros: 1) El situado en el semiespacio de V es otra pirámide $VA'B'C'D'E'$ que llamaremos *pirámide deficiente.* 2) El poliedro $ABCDEA'B'C'D'E'$ situado en el semiespacio opuesto, que se llama *tronco de pirámide.* Los polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ se llaman *bases* del tronco. Demostremos:

Las bases del tronco son polígonos semejantes. La razón de semejanza es igual a la que existe entre las alturas de la pirámide total y la deficiente.



En efecto: los ángulos de ambos polígonos son iguales por ser secciones paralelas de los mismos diedros (lec. 41, § 4); cada cara lateral queda cortada por α' según una paralela a la base, y aplicando sucesivamente el teorema de Thales a dichas caras así como a los triángulos semejantes VAH y $V'A'H'$, formados por las alturas VH y VH' con dos aristas laterales respectivas VA y VA', se tendrá

$$\frac{VH}{VH'} = \frac{VA}{VA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{VC}{VC'} = \dots$$

lo que demuestra el teorema. Este teorema puede enunciarse:

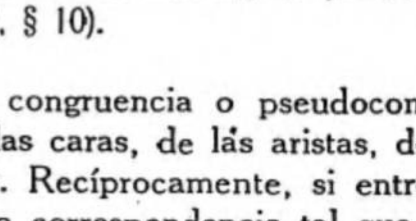
Las secciones producidas en un anguloide por dos planos paralelos son semejantes y la razón de semejanza es la que existe entre las distancias de dichas secciones al vértice.

En particular: *Las secciones paralelas a la base de una pirámide regular son polígonos regulares semejantes a la base y cuyo centro está en el eje* Por equidistar éste de los vértices de la sección (lec. 42, § 10).

9. Igualdad de poliedros y tetraedros.— La congruencia o pseudocongruencia de dos poliedros implica la igualdad de las caras, de las aristas, de los diedros y de los ángulos poliedros respectivos. Recíprocamente, si entre las caras de dos poliedros se puede establecer una correspondencia tal que: 1.°, las caras correspondientes sean iguales y, por tanto, iguales sus aristas correspondientes; 2.°, a dos caras contiguas correspondan caras contiguas formando un diedro igual; 3.°, a caras concurrentes en un vértice correspondan caras concurrentes formando un anguloide igual, es fácil demostrar la congruencia o pseudocongruencia de los dos poliedros

Pero no todas las condiciones 1.ª, 2.ª y 3.ª, son independientes. Basta con que se cumplan algunas para que se cumplan las demás. Por ejemplo, la igualdad de aristas y de ángulos poliedros correspondientes implica la igualdad de caras. Estudiemos condiciones suficientes de igualdad en los poliedros más sencillos: los tetraedros, entendiendo, para abreviar, por *igualdad* indistintamente la congruencia o la pseudocongruencia.

Sean, pues, dos tetraedros y hagamos corresponder a los vértices A, B, C, D del primero los A', B', C', D' del segundo. Demostremos:



1.er CRITERIO.—*Dos tetraedros que tengan respectivamente iguales dos caras* ABC=A'B'C', ABD=A'B'D' *y el diedro que forman, son iguales.*

En efecto, apliquemos al segundo tetraedro el movimiento que lleve $A'B'C'$ sobre ABC. Si los sentidos de los dos triedros son iguales, ambos caerán en el mismo semiespacio respecto de la cara coincidente. Y como los diedros de aristas AB y $A'B'$ son iguales, e iguales y del mismo sentido las caras contiguas ABD y $A'B'D'$, éstas coincidirán también, y, por tanto, coincidirán los tetraedros.

Si ambos tetraedros fuesen de sentidos opuestos, el segundo coincidiría con el simétrico del primero respecto del plano ABC y, por tanto, serían ambos pseudocongruentes.

2.° CRITERIO.—*Dos tetraedros que tienen respectivamente iguales una cara y los tres diedros contiguos son iguales.*

Apliquemos al segundo tetraedro el movimiento que hace coincidir las caras iguales $ABC=A'B'C'$. Si los tetraedros tienen el mismo sentido, el cuarto vértice D' caerá en el mismo semiespacio que el D y como los diedros homólogos de aristas $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ y $AC=A'C'$ son iguales, coincidirán los planos de sus caras y, por tanto, los respectivos puntos D y D' de intersección. Es decir, ambos tetraedros coinciden.

Si son de sentidos opuestos, el segundo tetraedro coincidirá con el simétrico del primero respecto de la cara coincidente, por ser simétricos los diedros después del movimiento.

3.er CRITERIO.—*Dos tetraedros que tienen tres caras respectivamente iguales son iguales.*

Si tienen igual sentido, los triedros que forman dichas caras serán congruentes en virtud del tercer criterio de igualdad de triedros, y el movimiento que los haga coincidir hará coincidir también los triángulos de dichas caras, iguales por hipótesis y, por tanto, coincidirán los tetraedros.

Si los tetraedros dados tienen sentidos opuestos, lo mismo ocurrirá a los triedros en cuestión, pero entonces podremos hacer coincidir uno de los tetraedros con el simétrico del otro, respecto del vértice del triedro correspondiente.

EJERCICIOS

1. ¿Cabrá un bastón de 90 cm. de largo en una caja de dimensiones $50 \times 70 \times 35$ cm.?
2. Construir un paralelepípedo que tenga tres aristas apoyadas en tres rectas cruzadas dos a dos.
3. Enunciar y demostrar criterios de igualdad de prismas. Idem de pirámides.
4. Los planos bisectores de los diedros de un triedro concurren en una recta.
5. Los planos bisectores de los seis diedros de un tetraedro concurren en un punto llamado *incentro* del tetraedro.
6. Los planos bisectores de los diedros exteriores a una cara de un tetraedro (formados por dicha cara y las prolongaciones de las contiguas) y los de los diedros interiores en el vértice opuesto, concurren en un punto, *exincentro* correspondiente a dicha cara. Hay, pues, *cuatro exincentros*, cada uno de los cuales se halla alineado con el incentro y un vértice.
7. Los planos perpendiculares en los puntos medios de las seis aristas de un tetraedro concurren en un punto llamado *circuncentro*. En este punto concurren las perpendiculares a las caras en sus respectivos circuncentros.
8. Los segmentos que unen los vértices de un tetraedro con los *baricentros* de las caras opuestas concurren en un punto que divide cada segmento en la razón $1:3$. En este punto concurren también (bisecándose) los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas, y se llama *baricentro* o *centro de gravedad del tetraedro*.

LECCIÓN 46.—LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

1. Poliedros regulares.— Llámase *poliedro regular* a todo poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren el mismo número de ellas.

Por ser convexo, todo poliedro regular cumple el teorema de Euler y ya vimos en la lección 37 que sólo pueden existir cinco especies de poliedros eulerianos, cuyas caras tienen el mismo número de lados y en cuyos vértices concurren el mismo número de aristas.

A la misma conclusión se llega más rápidamente, para los poliedros regulares, haciendo uso de la condición de ser las caras polígonos regulares.

En efecto: Si las caras del poliedro son *triángulos equiláteros* (cuyos ángulos son de 60°), en cada vértice pueden concurrir *tres, cuatro* o *cinco*, pero no más, pues seis ángulos de 60° suman ya cuatro rectos, y no pueden formar ángulo poliedro, en virtud de lo dicho en la lección 44.

Llamemos c al número de caras, v al vértice y a al de aristas.

Si concurren *tres* caras triangulares en cada vértice y, por tanto, tres aristas, el número de éstas será $a=3c:2=3v:2$ (por pertenecer cada arista a dos caras y unir dos vértices), ecuaciones que con el teorema de Euler $c+v=a+2$ forman un sistema del que resulta $c=4$, $v=4$, $a=6$ (*tetraedro*).

Si concurren *cuatro* caras triangulares, se obtienen análogamente

$$a=3c:2=4v:2, \qquad c=8,\ v=6,\ a=12 \text{ (\textit{octaedro})}.$$

Si concurren *cinco* caras triangulares, resulta

$$a=3c:2=5v:2, \qquad c=20,\ v=12,\ a=30 \text{ (\textit{icosaedro})}.$$

Si las caras son *cuadrados* (cuyos ángulos son de 90°), sólo *tres* de ellos pueden concurrir en un vértice para que su suma sea $<4R$.

Resulta así $a=4c:2=3c:2$, que con el teorema de Euler dan

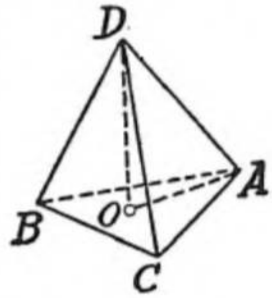
$$c=6,\ v=8,\ a=12 \text{ (\textit{hexaedro o cubo})}.$$

Análogamente: Si las caras son *pentágonos* regulares (ángulos de 108°), sólo *tres* de ellos pueden concurrir en un vértice, y resulta $a=5c:2=3v:2$, de donde $c=12$, $v=20$, $a=30$.

En resumen: sólo *pueden* ser poliedros regulares: el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*, de caras triangulares; el *hexaedro*, de caras cuadradas, y el *dodecaedro*, de caras pentagonales.

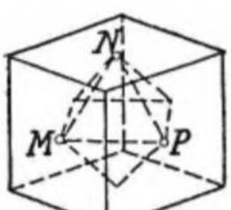
Pero hasta aquí no hemos probado más que la imposibilidad de otros poliedros regulares convexos, pero no la existencia efectiva de éstos. Vamos a demostrarla, construyéndolos uno por uno.

2. Existencia de los cinco poliedros regulares.— TETRAEDRO.—Construyamos un triángulo equilátero ABC y por el centro O levantemos la perpendicular OD a su plano; tomando sobre ella el punto D tal que sea $AD = AB$, este punto D equidistará de A, B, C (lec. 42, § 10). Por tanto los triángulos DAB, DBC y DAC son también equiláteros e iguales al ABC.



Se ha formado así el *tetraedro regular*, pues es convexo (pirámide) y en cada vértice concurren tres triángulos.

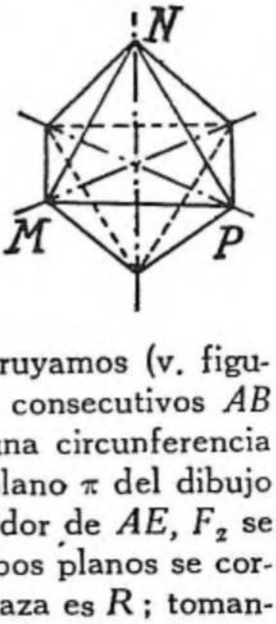
HEXAEDRO O CUBO.—Para construir un hexaedro o cubo, basta construir un ortoedro cuyas tres dimensiones sean iguales, según hemos visto en la lección anterior.



Observemos que lo mismo en el tetraedro que en el cubo, *todos los triedros son congruentes* (criterio 3.°) *y todos los diedros son también iguales*, por oponerse a caras iguales en un mismo triedro y ser todos éstos iguales entre sí.

OCTAEDRO.—Si aplicamos a un triedro del cubo el movimiento que hace coincidir dicho triedro consigo mismo, superponiendo dos caras contiguas, en este movimiento se superpondrá también consigo mismo el tríngulo MNP que determinan los centros de dichas caras. Por tanto, este triángulo es *equilátero*.

Repitiendo la construcción en los ocho vértices, los ocho triángulos obtenidos son congruentes, por serlo los triedros. Concurrirán cuatro en cada vértice por tener cuatro vértices cada cara del cubo. Estos triángulos definen, pues, un octaedro cuyos seis vértices pueden obtenerse directamente trazando tres rectas concurrentes perpendiculares dos a dos (ejes de simetría del cubo) y tomando en ellos seis puntos equidistantes del punto común. Se comprende con esto que el plano de cada tres vértices MNP deja en un mismo semiespacio los restantes. Es decir, que el poliedro es convexo. Se trata, en resumen del *octaedro regular.*

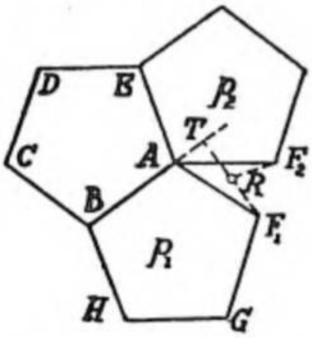


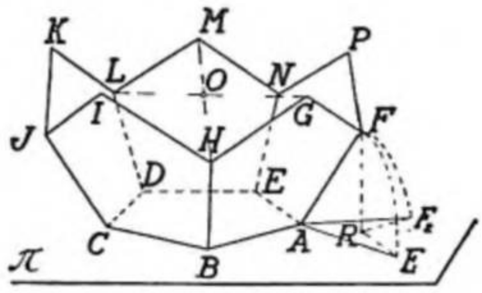
DODECAEDRO.—Sea $ABCDE$ un pentágono regular y construyamos (v. figura pág. siguiente) otros dos iguales p_1 y p_2 sobre los lados consecutivos AB y AE. Al girar p_1 alrededor de AB, el vértice F_1 describe una circunferencia situada en el plano perpendicular a AB cuya traza sobre el plano π del dibujo es F_1T perpendicular a AB. Análogamente, al girar p_2 alrededor de AE, F_2 se mueve sobre un plano perpendicular a AE de traza F_2R. Ambos planos se cortan según una recta perpendicular al plano del dibujo, cuya traza es R; tomando sobre esta perpendicular un punto F tal que $AF = AF_1 = AF_2$ (*) tendremos definido un punto común a las circunferencias descritas por F_1 y F_2 (lección 42, § 10) y, por tanto, tendremos definidos los giros que reúnen en una

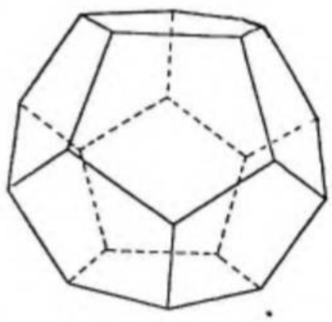
(*) Ello es posible por ser $AR < AF_1$. En efecto, por simetría, R está en la bisectriz AR de F_2AF_1; por tanto, AR es oblicua a F_1T, más próxima a la perpendicular AT que AF_1.

sola las aristas AF_1 y AF_2, de tal modo que los tres pentágonos dados formarán triedro. Repitiendo este triedro en cada vértice $ABCDE$ formaremos un casquete poliédrico convexo de seis pentágonos, cuyo borde libre $GHIJKLMNPF$ es un decágono alabeado (no plano).

Los segmentos GL, HM, IN, ... que unen los vértices opuestos de este decágono (1.° y 6.°, 2.° y 7.°, etc., ordenados en un sentido) se cortan en su punto medio. En efecto, respecto del plano bisector del diedro EA son simé-





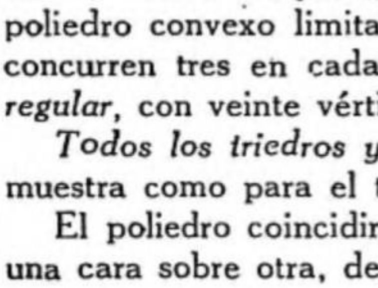


tricos F y B, luego FB es perpendicular a dicho plano y, análogamente, ND y, por tanto, las paralelas a estas rectas GH y ML serán paralelas entre sí, y además iguales. Luego GL y HM se cortan en su punto medio y análogamente MH y IN, IN y JP, .. El punto O es pues, centro de simetría de dicho decágono. Por tanto, si construímos el casquete simétrico del obtenido respecto de O, ambos casquetes se ensamblarán en este decágono y completarán un poliedro convexo limitado por doce caras pentagonales regulares, de las que concurren tres en cada vértice. Obtenemos, en una palabra, el *dodecaedro regular*, con veinte vértices y treinta aristas.

Todos los triedros y diedros de este poliedro son iguales entre sí (se demuestra como para el tetraedro y cubo).

El poliedro coincidirá, pues, consigo mismo en todo movimiento que lleve una cara sobre otra, dejando al poliedro en un mismo semiespacio.

ICOSAEDRO.—Razonando como para el cubo, los centros de las tres caras concurrentes en cada vértice de un dodecaedro determinan un triángulo equilátero.



Obtenemos de este modo *veinte* triángulos equiláteros congruentes que definen un poliedro en el que concurren cinco de ellos en cada vértice.

Este poliedro es, además, simétrico respecto del centro O de simetría del dodecaedro, de tal modo que obtenidos los seis vértices de cinco caras concurrentes, por simetría se obtiene los otros seis, de donde resulta que todos los vértices están en un mismo semiespacio (el que contiene O) respecto de cada una de dichas caras. Este poliedro convexo no es, pues, otro que el *icosaedro regular*.

Observemos, de paso, que al coincidir consigo mismo un dodecaedro en un movimiento que superponga una de sus caras con otra, coincidirá también consigo mismo el icosaedro derivado, de donde resulta:

Todos los diedros y todos los anguloides del icosaedro son iguales entre sí.

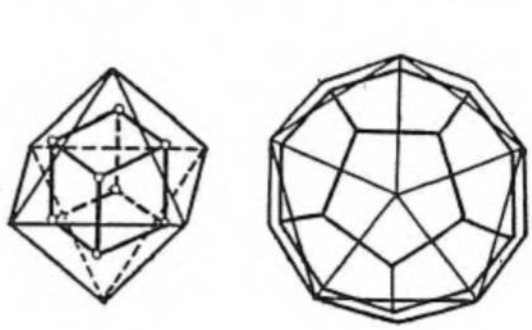
Es, pues, propiedad general de los poliedros regulares, tener los diedros y los ángulos poliedros iguales entre sí.

Por esta razón hemos omitido la condición de la igualdad de dichos ángulos poliedros en la definición (*), sustituyéndola por la igualdad del número de caras en cada vértice y la convexidad.

Fácil es darse cuenta que tanto la convexidad como la igualdad del número de caras en cada vértice son ya condiciones esenciales. Para la primera basta pensar en el poliedro no convexo que resulta de sustituir la superficie piramidal limitada por cinco caras concurrentes en un vértice del icosaedro por su simétrica respecto del plano de su base; este nuevo icosaedro cumple las restantes condiciones pero no la de convexidad. Para la segunda basta unir dos tetraedros regulares por una cara; el poliedro obtenido es convexo y está limitado por seis triángulos equiláteros iguales, pero en dos de sus vértices concurren tres triángulos y en los restantes concurren cuatro.

3. Poliedros regulares conjugados.—Hemos obtenido un octaedro uniendo los centros de las caras de un cubo, y un icosaedro uniendo los centros de las caras de un dodecaedro De modo análogo demostraríamos que:

Los polígonos obtenidos uniendo los centros de las caras concurrentes en los vértices de un octaedro, son seis cuadrados que limitan un cubo.



Los polígonos obtenidos uniendo los centros de las caras concurrentes en los doce vértices de un icosaedro, son doce pentágonos regulares que limitan un dodeçaedro.

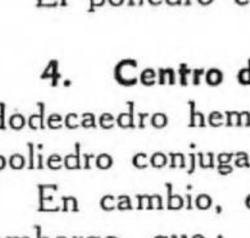
Se dice, por esta razón, que el cubo y el octaedro son *conjugados*, como también el dodecaedro y el icosaedro. El número de caras de cada poliedro es el de vértices del conjugado. Dos poliedros conjugados tienen el mismo número de aristas.

El poliedro conjugado de un tetraedro es otro tetraedro.

4. Centro de un poliedro regular.—En la obtención del octaedro y del dodecaedro hemos hecho uso del centro de simetría, que también lo es del poliedro conjugado respectivo (cubo e icosaedro).

En cambio, el tetraedro carece de centro de simetría. Demostremos, sin embargo, que:

En todo poliedro regular existe un punto, que llamaremos centro, que equidista de sus caras y equidista de sus aristas.



Consideremos, en efecto, dos caras contiguas del poliedro regular y el plano perpendicular en el punto medio de la arista común AB; en este plano se hallan las mediatrices de AB en cada cara y, por tanto, los centros C y C' de ellas, así como las perpendiculares por C y C' a dichas caras (que deben serlo a AB).

(*) En la Geometría de *Rouché Comberouse* se impone esta condición, que resulta superabundante.

Estas dos perpendiculares se cortan, pues, en un punto *O*. Unámoslo con el punto medio *M* de *AB*. La igualdad de los triángulos rectángulos *OCM* y *OC'M* (*MC*=*MC'*, *OM*=*OM*) prueba la de los segmentos *OC*=*OC'* y la de los ángulos *OMC* y *OMC'*; luego cada uno de éstos mide la mitad del diedro del poliedro, por ser *CMC'* su sección recta. Como este diedro es constante, cualquiera que sea el par de caras contiguas consideradas, los triángulos rectángulos que formaríamos al tomar otro par serían iguales a éstos por tener también constante un cateto (*CM*=*CM'*, apotema de las caras). Ahora bien, *OM* mide la distancia de *O* a la arista *AB*, *OC* la distancia de *O* a una cara.

En resumen, pues:

El punto O *equidista de todas las aristas.*

El punto O *equidista de todas las caras.* De donde (lec. 42, § 10):

El punto O *equidista de todos los vértices.*

Este punto único coincide con el *centro de simetría*, excepto en el tetraedro, que carece de él.

COROLARIO.—*Proyectando desde el centro las caras de un poliedro regular, se descompone éste en tantas pirámides regulares iguales como caras.*

NOTAS

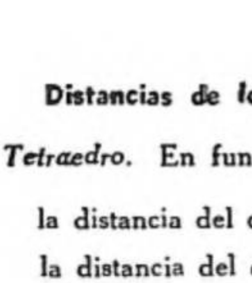
Distancias de los vértices, caras y aristas de un poliedro regular a su centro.

Tetraedro. En función de la arista *l* es fácil calcular:

la distancia del centro a los vértices $r_1 = l\sqrt{6} : 4$

la distancia del centro a las caras $r_2 = l\sqrt{6} : 12$

la distancia del centro a las aristas $r_3 = l\sqrt{2} : 4$



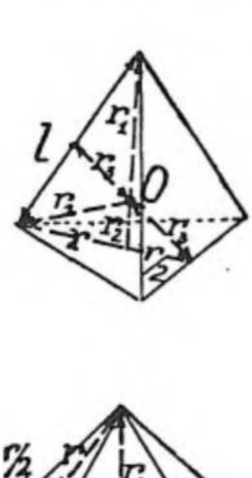
Resultan de las relaciones $r_1^2 - r_2^2 = r^2 = l^2 : 3$; $r_1 + r_2 = \sqrt{l^2 - r^2}$; $r_3^2 = r_1^2 - (l:2)^2$ que se desprenden de la figura.

Hexaedro.—Resulta fácilmente (hágase la figura)

$$r_1 = l\sqrt{3} : 2, \quad r_2 = l : 2, \quad r_3 = l\sqrt{2} : 2$$

Octaedro.—Con igual facilidad se obtienen r_1, r_3, y de las relaciones (v. fig.) $r_2^2 = r_3^2 - (r:2)^2$, $r^2 = l^2 : 3$ se obtiene r_2

$$r_1 = l\sqrt{2} : 2, \quad r_3 = l : 2, \quad r_2 = l\sqrt{6} : 6$$



Dodecaedro.—Recordemos (lec. 30, § 6 y Ejercicio 2) los valores del lado *l* de un pentágono regular convexo inscrito en una circunferencia de radio *r* y el del pentágono estrellado *l'* o diagonal del anterior

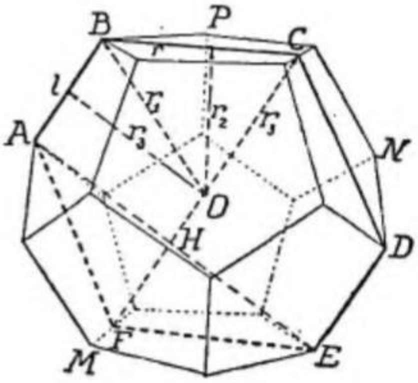
$$l^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) \qquad l'^2 = \frac{r^2}{4}(10 + 2\sqrt{5}) \qquad [1]$$

de modo que la razón *k* de la diagonal al lado verifica

$$k^2 = \frac{l'^2}{l^2} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, el pentágono regular $AMENP$ formado por diagonales de las caras, será a su vez $AE = kl' = k^2 l$. De todo ello resulta (véase fig):

$$r_3 = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} k^2 l = (3 + \sqrt{5})\, l : 4$$



$$r_1^2 = r_3^2 + l^2 : 4 = l^2 (1 + k^4) : 4$$

de donde

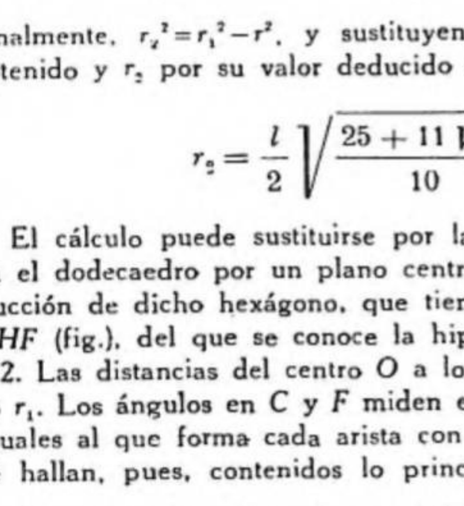
$$r_1 = \frac{l}{4} \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = \frac{l}{4} (\sqrt{15} + \sqrt{3})$$

Finalmente, $r_2^2 = r_1^2 - r^2$, y sustituyendo r_1 por el valor obtenido y r por su valor deducido de [1], resulta

$$r_2 = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

El cálculo puede sustituirse por la construcción del hexágono $ABCDEF$ sección producida en el dodecaedro por un plano central que contiene dos aristas opuestas AB y DE. La construcción de dicho hexágono, que tiene dos ejes de simetría, se desprende de la del triángulo AHF (fig.), del que se conoce la hipotenusa AF y la diferencia OH de los catetos, que vale $l:2$. Las distancias del centro O a los lados BC y AB son $r_2 r_3$, la distancia de O al vértice B es r_1. Los ángulos en C y F miden el diedro del dodecaedro. Los ángulos en A, B, D, E son iguales al que forma cada arista con las caras que pasan por sus extremos. En este hexágono se hallan, pues, contenidos lo principales elementos métricos del poliedro.

Icosaedro.—En el hexágono $ABCDEF$ determinado por la sección del plano central que pasa por una arista AB (y su opuesta DE) se hallan análogamente contenidos los elementos métricos similares del icosaedro, siendo su construcción análoga a la del hexágono del dodecaedro. Aquí AE es diagonal de un pentágono formado por aristas del icosaedro, de modo que $AE = kl$, de donde



$$r_3 = kl \cdot 2 = \frac{l}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$r_1^2 = r_3^2 + l^2 : 4 = l^2 (1 + k^2) : 4$$

de donde

$$r_1 = \frac{l}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

y, finalmente,

$$r_2 = r_1^2 - r^2 = \frac{l^2}{16} (10 + 2\sqrt{5}) - \frac{l^2}{3}$$

de donde

$$r_2 = \frac{l}{12} (3\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

Con estos cálculos hemos obtenido para cada poliedro regular convexo el radio r_1 de la esfera *circunscrita* al poliedro (es decir, que pasa por sus vértices), el radio r_2 de la esfera *inscrita* (es decir, tangente a sus caras) y el r_3 de la esfera tangente a las aristas (v. lección siguiente).

Los poliedros regulares estrellados.— En Geometria plana vimos que se podían unir los vértices no consecutivos de ciertos polígonos regulares convexos de tal modo que resultaran líneas poligonales regulares de lados entrecruzados que llamábamos *polígonos regulares estrellados*. Llamábamos especie del polígono así obtenido al número de vueltas dadas al cerrar el polígono; de otro modo, el número de veces que se cubre el plano proyectando sus lados desde el centro del polígono.

Ocurre preguntar si será posible unir análogamente los vértices no inmediatos de los poliedros regulares de modo que se siga obteniendo una superficie poliédrica cerrada (no simple) cuyas caras sean polígonos regulares iguales (convexos o estrellados), de modo que sigan concurriendo dos polígonos en cada lado, y en todos los vértices el mismo número de ellos (sacrificando, claro está, la condición 4 del § 9, lec. 37). *Poinsot* dió contestación afirmativa a esta pregunta demostrando la existencia de los cuatro siguientes *poliedros regulares estrellados, y sólo ellos*: 1.º) El *dodecaedro regular estrellado de caras pentagonales estrelladas* concurrentes *tres en cada vértice* (especie 7). Representado en la figura I y obtenido por unión de los vértices del dodecaedro convexo. En la figura se han rayado dos caras *ABCDE* y *ABC'D'E'* contiguas en la arista *AB*. 2.º) El *dodecaedro regular estrellado de caras pentagonales convexas* concurrentes *cinco en cada vértice* (especie 3). Representado en la figura II y obtenido por unión de vértices del icosaedro convexo. En la figura se ha rayado una cara *ABCDE*. 3.º) El *dodecaedro regular estrellado de caras pentagonales estrelladas*, concurrentes *cinco en cada vértice* (especie 3). Figura III. Obtenido uniendo de cinco en cinco los vértices del icosaedro convexo. En la figura se han rayado dos caras *ABCDE*, *ABC'D'E'* contiguas con la arista común *AB*. 4.º) El *icosaedro regular estrellado de caras triangulares*, concurrentes *cinco en cada vértice* (especie 7). Figura IV Obtenido uniendo de tres en tres vértices del icosaedro convexo En la figura se ha rayado una cara *ABC*. Dos caras contiguas son *MNP*, *MNQ*, arista común *MN*. La especie indica (análogamente a los polígonos estrellados) el número de veces que un rayo proyectante de las caras desde el centro cubriría al espacio. La demostración de la existencia de estos poliedros y sólo de ellos puede verse en *E. Torroja*: «Geometría de la Posición» (parte métrica), o en la obra ya citada de *Rouché Comberouse*.

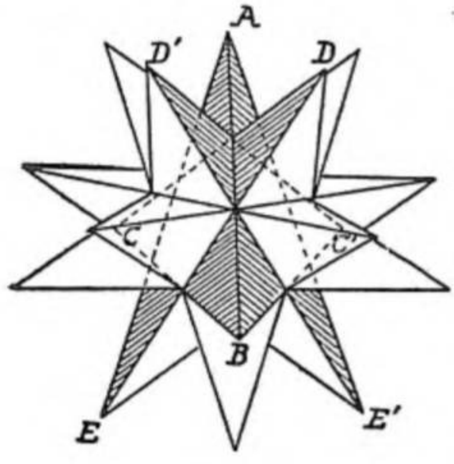


Fig. I

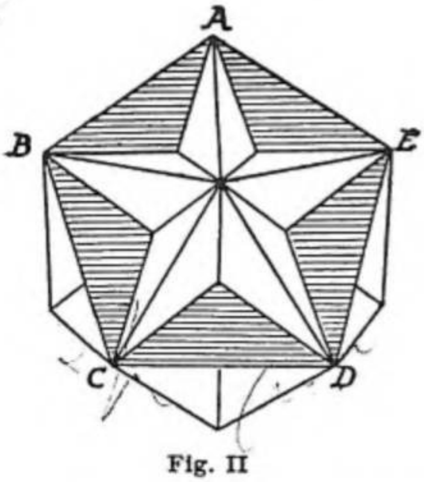


Fig. II

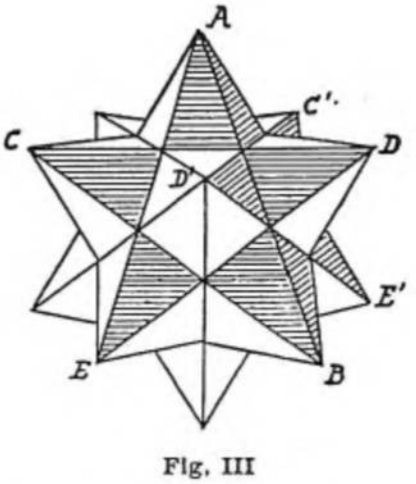


Fig. III

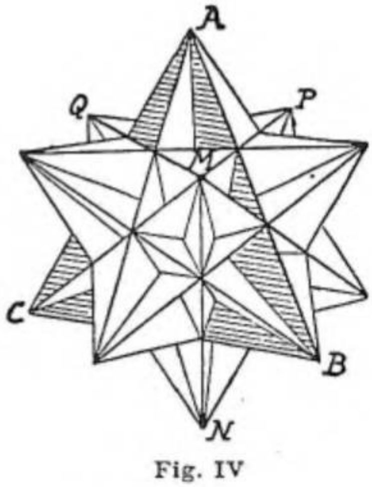
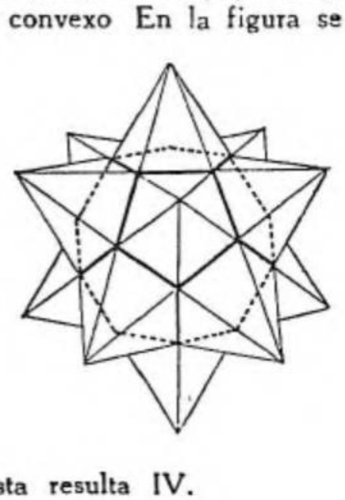


Fig. IV

Cauchy indicó un modo acaso más intuitivo de construirlos: El III se obtiene fácilmente prolongando las aristas del dodecaedro convexo, como se ve en la adjunta figura. Prolongando cada cara del dodecaedro hasta su intersección con las cinco caras contiguas a su opuesta se obtiene el II. Prolongando las aristas de II, se obtiene I. Finalmente, prolongando cada cara del icosaedro convexo hasta cortar las tres caras contiguas a la opuesta resulta IV.



EJERCICIOS (de todo el Capítulo XIV)

1. Demostrar que en un triedro no isósceles a mayor cara se opone mayor ángulo y recíprocamente.

2. Demostrar que la suma de los ángulos formados por las aristas de un triedro con las caras opuestas está comprendida entre la suma de las caras y la mitad de esta suma.

3. Demostrar que la suma de los ángulos formados con las aristas de un triedro trirrectángulo por una semirrecta situada en el interior está comprendida entre 225° y 135°.

4. Cortar un cubo por un plano de modo que la sección sea un hexágono regular. Calcular el área de este hexágono en función de la arista.

5. Cortar un triedro trirrectángulo por un plano de modo que la sección sea un triángulo acutángulo dado.

6. Calcular en función de los lados del triángulo acutángulo del problema anterior las distancias de sus vértices al origen del triedro

7. Dado un triángulo acutángulo, sección de un triedro trirrectángulo por un plano, hallar mediante construcciones gráficas, la inclinación de las caras y de las aristas del triedro sobre dicho plano.

8. Cortar un anguloide de cuatro caras de modo que la sección sea un paralelogramo.

9. Demostrar que en todo triedro los planos que unen cada arista con la bisectriz de la cara opuesta se cortan en una recta. [Considérese el triángulo ABC tomando, sobre las aristas, $VA = VB = VC$].

10. En todo triedro los planos perpendiculares a las caras por las aristas opuestas se cortan según una recta.

11. En todo triedro los planos bisectores de los diedros se cortan según una recta.

12. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de tres planos secantes, no concurrentes en una recta.

13. Tomados A, B, C sobre las tres aristas de un triedro trirrectángulo y proyectado el vértice O sobre el plano ABC en O', demostrar que el área $[AOB]$ es media proporcional entre $[AO'B]$ y $[ACB]$.

14. La distancia del centro de gravedad de un tetraedro (v. ej. 8, lecc. 45) a un plano es la media aritmética de las distancias de los vértices a dicho plano.

15. En todo cuadrilátero alabeado la suma de los cuadrados de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más el cuádruplo del cuadrado del segmento que une los puntos medios de éstas.

16. En todo hexaedro de caras cuadriláteras la suma de los cuadrados de las aristas es igual a la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales más el cuádruplo de la suma de los cuadrados de cuatro segmentos: dos que unen los puntos medios de dos pares de diagonales, y otros dos que unen los puntos medios de las diagonales de dos caras opuestas.

17. En todo prisma cuadrangular la suma de los cuadrados de las aristas es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más ocho veces el cuadrado del segmento que une el punto en que se cortan un par de diagonales del prisma con la intersección del otro par.

18 La suma de distancias de un punto interior de un tetraedro regular a sus caras es constante e igual a su altura .¿Y si el punto es exterior?

19. Uniendo los puntos medios de las aristas no opuestas de un tetraedro regular se obtiene un octaedro regular. Demostración.

20. Los diedros del octaedro regular son suplementarios de los del tetraedro regular.

21. Estudiar el cuerpo que se obtiene uniendo los puntos medios de las aristas concurrentes de un cubo. Idem de un octaedro. Idem íd. de un dodecaedro y de un icosaedro.

22. Demostrar la existencia de un cubo y de un tetraedro regulares inscritos en un dodecaedro regular; es decir, cuyos vértices sean vértices del dodecaedro convenientemente elegidos. Relaciones que ligan las aristas de los tres poliedros.

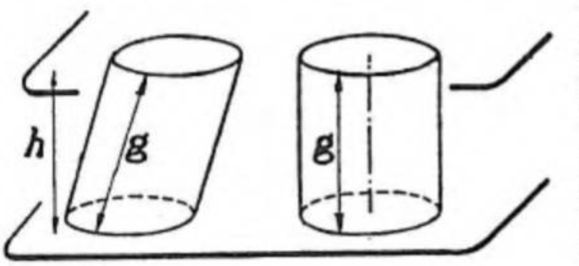
23. Construir con el compás las alturas de un tetraedro de aristas conocidas.

24. Dadas las cuatro alturas de un tetraedro y las distancias de un punto a tres de sus caras hallar la distancia a la cuarta cara.

Capítulo XV.—LOS CUERPOS REDONDOS

LECCIÓN 47.—CILINDRO, CONO Y ESFERA

1. El cilindro circular.— Llamaremos *cilindro de base circular* al conjunto de puntos pertenecientes a un espacio cilíndrico circular (lec 41 § 10) y a la *zona* (lec. 41, § 5) limitada por dos planos paralelos que corten a dicho espacio según círculos. La parte de superficie cilíndrica comprendida en la zona se llama *superficie lateral del cilindro* y se llama *generatriz* del mismo a la porción de generatriz de la superficie comprendida entre los planos que limitan la zona. Las secciones producidas por estos planos en el espacio cilíndrico se llaman *bases*.

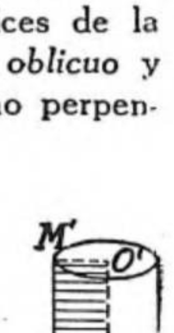


Las bases del cilindro son iguales, por ser secciones paralelas de un espacio cilíndrico.

La distancia entre los planos de las bases se llama *altura del cilindro*.

Si los planos de las bases son perpendiculares a las generatrices de la superficie el cilindro se llama *recto*. En caso contrario, se llama *oblicuo* y entonces la sección producida en el espacio cilíndrico por un plano perpendicular a las generatrices se llama *sección recta* del cilindro.

En el cilindro circular recto, llamado abreviadamente *cilindro*, la generatriz es igual a la altura ; la recta que une los centros de las bases se llama *eje* del cilindro y es perpendicular a ambas, por ser una de tantas guías de la traslación que engendra el espacio cilíndrico y, por tanto, es el lugar geométrico de los centros de todas las secciones circulares paralelas a las bases.



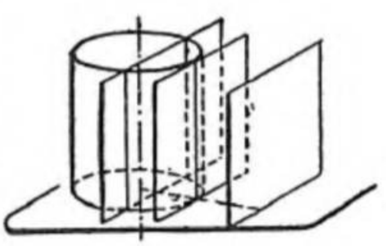
El *radio* de estos círculos se llama radio del cilindro.

Un conjunto de radios paralelos llena un rectángulo y el cilindro puede, también, considerarse como el lugar geométrico de todas las posiciones de este rectángulo al girar alrededor del eje y en este sentido diremos que está «engendrado» por la rotación del rectángulo. Por eso se llama *cilindro de revolución*.

Toda perpendicular al eje de un cilindro de revolución por su punto medio es eje de simetría del cilindro, por serlo de la superficie cilíndrica, y por ser homólogas en dicha simetría las bases del cilindro.

2. Planos secantes y tangentes al cilindro.—Según acabamos de ver, las secciones producidas en el cilindro por planos perpendiculares al eje son circulares. Las secciones producidas por planos oblicuos al eje serán estudiadas en el segundo tomo.

Los planos paralelos al eje tienen común con la superficie cilíndrica *dos rectas* (generatrices), *una* o *ninguna* según que su distancia al eje sea *menor*, *igual* o *mayor* que el radio.



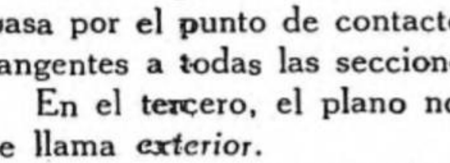
En efecto, esta distancia es la que existe entre el centro de una base y la traza sobre ella del plano considerado, de tal modo que esta traza es respectivamente secante, tangente o exterior. En el primer caso, las generatrices que pasan por los puntos de intersección son comunes a la superficie cilíndrica y plano considerado, y el plano se llama *secante*.

En el segundo caso, es común al plano y a la superficie la generatriz que pasa por el punto de contacto, y se llama el plano *tangente*, por contener las tangentes a todas las secciones rectas de la superficie.

En el tercero, el plano no tiene punto alguno común con la superficie, y se llama *exterior*.

Por un punto exterior al cilindro (o por una paralela al eje, exterior), pasan dos planos tangentes al cilindro. Los determinados por esta paralela y las tangentes a una sección recta.

3. El cono circular. — Llamaremos cono circular al conjunto de los puntos de los segmentos que unen un punto V, llamado *vértice* del cono, con los de un círculo situado en un plano que no contiene V, llamado *base*. El conjunto de los segmentos que unen V con los de la circunferencia base se llama *superficie lateral* del cono y cada uno de estos segmentos, *generatriz* de esta *superficie*.



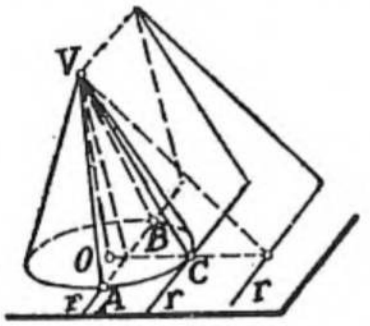
Si el vértice V está en la perpendicular por el centro O del círculo, todas las generatrices son iguales, la recta VO se llama *eje;* el cono se llama *recto* y en caso contrario, *oblicuo*. El cono recto se llama también de *revolución* por ser iguales todos los triángulos rectángulos VOA determinados en él por una generatriz VA y el eje VO lo que permite considerarlos como homólogos de uno de ellos en los distintos giros de eje VO. En este sentido diremos que el cono es «engendrado» por la rotación del triángulo. El ángulo constante AVO se llama en este caso *semiabertura* del cono. Se llaman *interiores* al cono todas las semirrectas que forman con el eje un ángulo agudo menor que la semiabertura y *exteriores* las que forman ángulo mayor.

La distancia del vértice al plano de la base se llama *altura* del cono. Coincide con el eje en el cono de revolución.

4. Planos tangentes al cono.— Consideremos las secciones producidas en una superficie cónica por planos que pasan por el vértice V. Obsérvese que si un tal plano tiene un punto A en la superficie cónica, tiene en ella la recta VA. La intersección está, pues, formada por generatrices.

Sea r la traza del plano considerado sobre el plano de la base.

Si r corta a la circunferencia de la base en dos puntos A, B, las rectas VA y VB pertenecen a la superficie cónica y al plano, que se llama *secante*.



Si r es tangente a la circunferencia en un punto C, sólo la recta VC es común a la superficie y al plano, que se llamará *tangente*. Obsérvese que el plano VOC es perpendiular a r (por contener VO y OC que lo son), por tanto: *Todo plano tangente es el perpendicular al plano meridiano que pasa por la generatriz de contacto y el ángulo que forma con el eje es igual a la semiabertura del cono.*

Si r es exterior, la superficie cónica y el plano no tienen más punto común que el V, y el plano se llama *exterior* al cono.

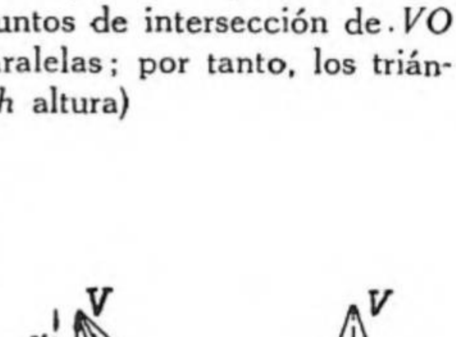
Un plano que pase por el vértice es, pues, secante, tangente o exterior, según que forme con el eje un ángulo menor, igual o mayor que la semiabertura del cono.

El lector demostrará fácilmente: *Por todo punto exterior, o por toda recta exterior por* V *pasan dos planos tangentes al cono.*

5. **El tronco de cono.**— *La sección producida en el cono circular por un plano paralelo a la base es un círculo.*

En efecto, unamos V con el centro O de la base y con un punto A cualquiera de la circunferencia, y sean O' y A' los puntos de intersección de VO y VA con el plano secante σ. AO y $A'O'$ son paralelas; por tanto, los triángulos VAO y $VA'O'$ son semejantes, de donde (h altura)

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{VO}{VO'} = \frac{h}{h'}$$



llamando h' la distancia de V a σ. Como la razón es fija y OA es constante, también lo será OA' y, por tanto, la sección es circular. De paso hemos demostrado que: *La razón de semejanza entre ambos círculos es igual a la razón de distancias de* V *al plano de la base y al plano secante.*

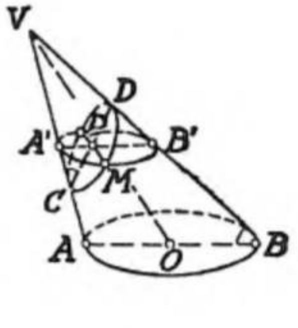
El cono queda así dividido por σ en dos cuerpos, uno de ellos, el situado en el semiespacio de V, es otro cono circular, el cuerpo situado en el semiespacio opuesto se llama *tronco de cono*, llamándose *de revolución* si lo era el cono seccionado.

Análogamente a lo dicho para el cono de revolución, el tronco de cono de revolución puede considerarse «engendrado» por el giro de un trapecio rectángulo $AOO'A'$ alrededor del eje O' (v. fig.).

6. **Secciones antiparalelas del cono circular oblicuo.**—Las secciones producidas en una superficie cónica circular por planos que no sean paralelos a la base y no pasen por el vértice, serán estudiadas, con toda generalidad,

en el segundo tomo. Veremos aquí solamente las secciones del cono oblicuo llamadas *antiparalelas* a la base, y que se definen del modo siguiente:

Sea O el centro de la base. El plano perpendicular a ésta por la recta VO es plano de simetría de la base y, por tanto, del cono. Sean VA y VB las generatrices contenidas en dicho plano, las cuales pasan por los puntos A y B, extremos del diámetro de la base situado en dicho plano de simetría. Consideremos otro plano perpendicular al plano de simetría por una recta CD antiparalela de la AB respecto de VA y VB. La sección producida en la superficie cónica por dicho plano se llama sección *antiparalela a la base*.



Demostremos que:

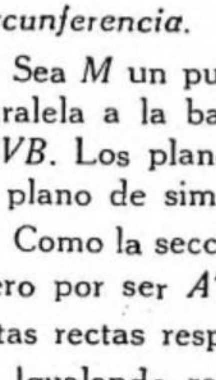
Toda sección antiparalela a la base de un cono circular oblicuo es una circunferencia.

Sea M un punto cualquiera de esta sección. Consideremos por él la sección paralela a la base y sean A' y B' sus intersecciones con las generatrices VA y VB. Los planos de ambas secciones se cortarán según la perpendicular MP al plano de simetría (por ser perpendiculares a dicho plano ambas secciones).

Como la sección paralela es circunferencia, en ella se tendrá $\overline{MP}^2 = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$. Pero por ser $A'B'$ y CD antiparalelas respecto de VA y VB, también lo son estas rectas respecto de aquéllas, de donde (lec. 22, § 2) $\overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Igualando resulta: Todo punto de la sección antiparalela cumple la condición $\overline{MP}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, que prueba que el triángulo CMD es rectángulo en M (lección 22, § 3, recíproco) y, por tanto, que el lugar de M es una circunferencia, como queríamos demostrar.

7. La esfera.— En la lección 43, § 5, hemos definido ya la superficie esférica como el lugar de los puntos del espacio que distan de uno fijo O, llamado *centro*, una misma distancia r llamada *radio*.



Toda recta y todo plano que pasan por el centro se llaman diametrales. La sección producida por un plano diametral se llama *circunferencia máxima*.

Elegida una recta diametral cualquiera a por el centro, todas las secciones de la superficie por los planos que pasan por a son circunferencias de radio r y diámetro en a; por tanto podrán hacerse coincidir mediante un giro alrededor de a.

La superficie esférica puede, pues, *ser engendrada por el giro de una circunferencia máxima cualquiera alrededor de uno cualquiera de sus diámetros.*

El conjunto de puntos del espacio cuya distancia a O es $\leqslant r$ se llama *esfera*. Los puntos cuya distancia a O es $< r$ se llaman *interiores* y aquéllos cuya distancia a O es $> r$, *exteriores*

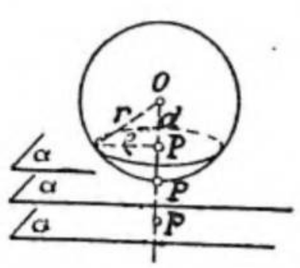
De las definiciones se desprende: *Dos superficies esféricas (dos esferas)* *de igual radio son congruentes.* Puesto que coincidirán en cualquier movimiento que haga coincidir los centros.

Todo plano diametral divide a la esfera y a la superficie esférica en dos partes llamadas *hemisferios*, que son simétricas respecto de dicho plano y además congruentes, ya que pueden hacerse coincidir mediante una simetría alrededor de un diámetro del círculo común.

8. Posiciones relativas de una esfera y una recta.— *Toda recta r cuya distancia al centro O de una superficie esférica es menor, igual o mayor que el radio tiene común con ella dos puntos, uno o ninguno, y se llama secante, tangente o exterior*

En efecto, todo punto común a la superficie y a la recta deberá estar en el plano diametral que pasa por ésta, en el cual se halla también la distancia Or. Por tanto, bastará considerar las posiciones de la recta respecto de la circunferencia máxima, sección de dicho plano diametral, de donde resulta el enunciado.

9. Posiciones relativas de una esfera y un plano.—*Todo plano α cuya distancia* d *al centro es menor, igual o mayor que el radio, tiene común con la superficie esférica, respectivamente, una circunferencia, un punto o ningún punto, y se llama, secante, tangente y exterior.*



En el primer caso, sabemos, en efecto (lec. 42, § 10). que el lugar geométrico de los puntos del plano α que distan del punto O, centro, una misma distancia $r>d$, es una circunferencia *cuyo centro está en la proyección de O sobre α.* Estos puntos pertenecen, pues, a la superficie esférica y forman una circunferencia llamada *menor,* por ser su radio $\rho<r$ (radio de la circunferencia *máxima*). Más concretamente $\rho=\sqrt{r^2-d^2}$; por tanto: *Las circunferencias menores cuyos planos equidistan del centro son iguales.*

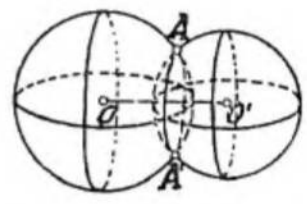
Si $d=r$ el pie de la perpendicular de O a α será el *único* punto que dista r de O, es decir, común al plano y a la superficie Todos los demás serán exteriores, por ser $r=d$ la mínima distancia de O a α. El plano es *tangente* Por todo punto A de la superficie esférica pasa, pues, *un* plano tangente a la misma, que es el perpendicular al radio en dicho punto y que *contiene todas las tangentes en* A *a las secciones planas de la superficie por* A. En efecto, todo plano secante por A corta a la superficie esférica y al plano tangente según una circunferencia y una recta que sólo tienen el punto A común

Si $d>r$ el pie de la perpendicular de O a α será *exterior* y con mayor razón serán exteriores los demás puntos del plano.

Si $d=0$ el plano es diametral. Dos planos diametrales se cortan según una recta diametral, por tanto *Dos circunferencias máximas se cortan en los extremos de un diámetro.*

10. Posiciones de dos esferas.—Cortemos dos superficies esféricas por un plano que pase por sus centros O y O' y consideremos las posiciones posibles de las circunferencias máximas obtenidas.

Si ambas son secantes, los dos puntos de intersección A y A' son simétricos respecto de OO' y al girar alrededor de dicha recta engendran una circunferencia que será común a las dos superficies, ya que éstas se pueden considerar engendradas por el giro de las referidas secciones alrededor de OO'. Las dos superficies esféricas se llaman *secantes.*



Si las circunferencias son tangentes exteriores (o interiores), su punto de contacto, situado en la recta OO', será análogamente el único punto común de las superficies esféricas engendradas al girar, mientras los restantes puntos de cada una de ellas serán exteriores a la otra (o los de una interiores a la otra), por conservarse las distancias a los centros al girar.

Razonando análogamente, si las circunferencias son exteriores, o una interior a la otra, resulta:

Si la distancia d *entre los centros de dos superficies esféricas de radios* r *y* r′ (r>r′) *cumple la condición:*

1.ª $d>r+r'$, *todos los puntos de cada superficie son exteriores a la otra y las superficies se llaman* EXTERIORES.

2.ª $d=r+r'$, *todos los puntos de cada superficie son exteriores a la otra excepto un punto único común, situado en la línea de los centros, y se llaman ambas* TANGENTES EXTERIORES.

3.ª $r-r'<d<r+r'$, *ambas superficies tienen una circunferencia menor común, y se llaman* SECANTES.

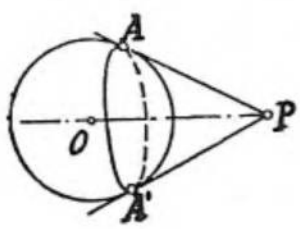
4.ª $d=r-r'$, *todos los puntos de la superficie de radio menor son interiores a la otra, excepto un punto alineado con los centros.* Se dice que esta superficie es TANGENTE INTERIOR a la otra.

5.ª $d<r-r'$, *todos los puntos de la superficie de radio menor son interiores a la otra y se dice que es* INTERIOR *a ésta.*

Si fuese $d=0$, ambas superficies esféricas se llaman *concéntricas.* Si es $r=r'$, sólo son posibles los casos 1.°, 2.° y 3.°

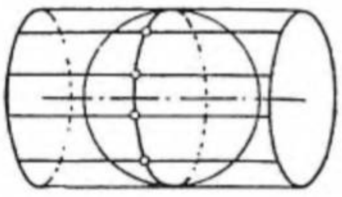
El lector enunciará los recíprocos que son ciertos en virtud del principio establecido en lección 13, § 5.

11. Cono y cilindro circunscrito a una esfera.—Sea P un punto exterior a una superficie esférica y cortémosla por un plano diametral que pase por P. Sean PA y PA' las tangentes desde P a la circunferencia sección, y A y A' los puntos de contacto, simétricos, según se sabe, respecto de OP.



Al girar la figura así obtenida alrededor de OP la circunferencia engendra la superficie esférica y las tangentes engendran una *superficie cónica* de revolución, que tendrá común con la superficie la circunferencia menor engendrada por A y A'. Diremos, pues:

Todas las tangentes a la superficie esférica desde un punto exterior, forman una superficie cónica de revolución cuyo eje es la recta que une dicho punto con el centro y que se llama CIRCUNSCRITA *a la esfera. El lugar de los puntos de contacto es una circunferencia menor situada en un plano perpendicular a dicho eje. Todos los segmentos de tangentes comprendidos entre el punto dado y los de contacto son iguales. Los planos tangentes a la esfera en estos puntos lo son al cono y recíprocamente*, por ser simultáneamente perpendiculares al radio OA y al plano meridiano OAP



Por un punto exterior P a una esfera pasan, pues, infinitos planos tangentes a la esfera todos los tangentes al cono circunscrito de vértice P

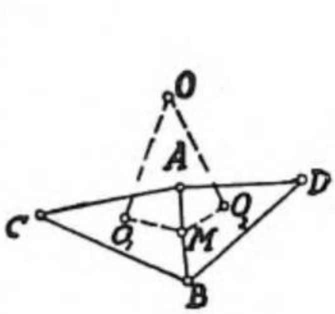
Razonando de modo análogo, obtendríamos:

Todas las tangentes a una esfera paralelas a una dirección, forman una superficie cilíndrica de revolución cuyo eje es la paralela a aquella dirección por el centro. El lugar geométrico de los puntos de contacto es una circunferencia máxima situada en un plano perpendicular a dicho eje. Todo plano tangente a la esfera en uno de estos puntos lo es al cilindro y recíprocamente.

Por una recta exterior a la esfera pasan dos planos tangentes a la misma. Los tangentes al cilindro de generatrices paralelas. *Por una recta tangente pasa un plano tangente*, el perpendicular al radio.

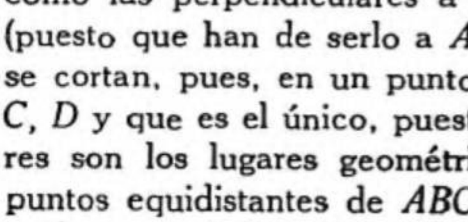
12. Determinación de la superficie esférica.— *Por cuatro puntos no coplanarios* A, B, C, D *pasa una superficie esférica, y sólo una.*

Consideremos el plano perpendicular a AB en su punto medio M. Este plano contiene las mediatrices de AB en los planos ABC y ABD y, por tanto, contiene los circuncentros O_1 y O_2 de los triángulos ABC y ABD, así como las perpendiculares a estos planos por O_1 y O_2 (puesto que han de serlo a AB). Ambas perpendiculares se cortan, pues, en un punto O que equidista de A, B, C, D y que es el único, puesto que dichas perpendiculares son los lugares geométricos (lec. 42, § 10) de los puntos equidistantes de ABC y ABD.



La superficie esférica de centro O y radio $OA = OB = OC = OD$ es, pues, la única que pasa por dichos cuatro puntos.

COROLARIO.—*Por dos circunferencias secantes no coplanarias pasa una superficie esférica, y sólo una.*

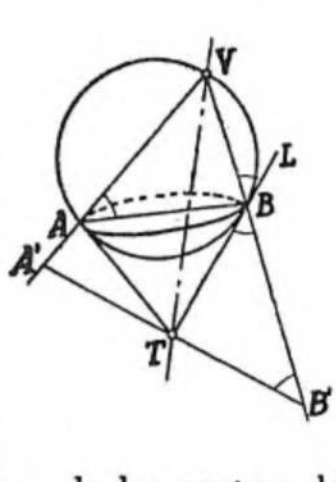


En efecto: la esfera determinada por los dos puntos de intersección A, B y otros dos C y D, uno en cada circunferencia, corta a los planos ABC y ABD según circunferencias que pasan respectivamente por ABC y ABD y que coinciden, por tanto, con las dadas.

Por dos circunferencias c_1 *y* c_2 *no coplanarias que tienen un punto común* A *y la tangente en él* a, *pasa una esfera, y sólo una.* La esfera determinada por tres puntos A, B, C de c_1 y un punto D de c_2 distinto de A es cortada por el plano ABC según c_1 y por el plano aD según una circunferencia que pasa por D, A y tiene la tangente a, circunferencia que es única y coincide con c_2

Una circunferencia y un punto exterior determinan una superficie esférica que pasa por ellos. Demuéstrese análogamente.

13. Lugar geométrico de los centros de las secciones antiparalelas del cono circular.—*El lugar de los centros de las secciones antiparalelas a la base de un cono circular es la recta que une el vértice* V *del cono con el vértice* T *del cono circunscrito a lo largo de la circunferencia base, a la superficie esférica que pasa por ésta y por* V.



El plano de simetría del cono lo es de V y de la base y, por tanto, de la esfera y del cono circunscrito T. Consideremos la sección antiparalela a la base del cono por T El diámetro $A'B'$ de esta sección situado en el plano de simetría es antiparalelo al diámetro AB de la base; luego $\sphericalangle TB'B = \sphericalangle VAB = \sphericalangle VBL$ (semiinscrito) $= \sphericalangle TBB'$ De donde $TB' = TB$. Análogamente $TA' = TA$; y como $TA = TB$, resulta $TA' = TB'$; por tanto, T es el centro de la sección antiparalela considerada y la recta VT el lugar de los centros de todas ellas (§ 5).

Si AB es diámetro de la esfera el cono degenera en cilindro y el lugar de los centros considerados es la recta paralela por V a las generatrices de dicho cilindro. La demostración es todavía más sencilla y la dejamos a cargo del lector. (Lo anterior no es aplicable.)

EJERCICIOS

1. Demostrar que una superficie esférica queda determinada por un cono o un cilindro tangente y un punto.

2. ¿Cuántas superficies esféricas existen tangentes a un cono (o cilindro) y a un plano dados?

3. ¿Cuántas superficies esféricas existen tangentes a cuatro planos dados no concurrentes?

4. Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos exteriores al plano sea constante.

5. Lugar de puntos del espacio igualmente iluminados por dos focos o dos estrellas. (Se entiende la igualdad de iluminación sobre dos elementos de superficie iguales y *normales* a los respectivos radios.)

6. Trazar por una recta dada un plano que corte a una esfera según un círculo de área dada.

7. Lugar geométrico de los centros de las secciones a una superficie esférica por planos que pasan por un punto dado. Idem por una recta dada.

8. Del diámetro y del espesor de una lente limitada por dos superficies esféricas de igual radio, deducir el valor de éste. Teoría del esferómetro.

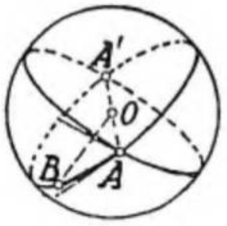
9. Conociendo los radios de dos secciones paralelas de una esfera y la distancia entre las mismas, hallar el radio de la esfera.

10. La suma de los cuadrados de las cuerdas interceptadas en una esfera por las tres aristas de un triedro trirrectángulo móvil cuyo vértice está en la superficie, es constante.

LECCIÓN 48.—LA GEOMETRÍA EN LA SUPERFICIE ESFÉRICA

Vamos a estudiar en esta lección, relaciones métricas entre figuras trazadas sobre una superficie esférica dada O, que supondremos invariable en todo nuestro estudio.

1. Distancia esférica. Angulo esférico. Perpendicularidad.— Dados dos puntos, A y B, de la superficie esférica, llamaremos *distancia esférica* entre ambos, y la designaremos por AB, al menor de los arcos de circunferencia máxima que tienen sus extremos en ellos. Esta circunferencia máxima es la sección producida en la superficie esférica por el plano AOB. Si los puntos fuesen diametralmente opuestos, hay infinitas circunferencias máximas que pasan por ellos y todos los arcos AB serían iguales a una semicircunferencia que se toma, en este caso, también como distancia esférica.



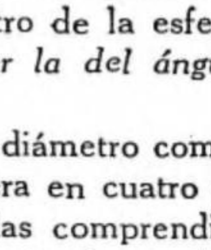
Como suponemos invariable la superficie y, por tanto, el radio de todas las circunferencias máximas, las distancias esféricas son proporcionales a los ángulos que las proyectan desde el centro de la esfera. Por tanto, *convendremos en expresar la medida de* AB *por la del ángulo* AOB.

Dos circunferencias máximas se cortan en los extremos del diámetro común AA', por pasar sus planos por el centro O, y dividen la esfera en cuatro regiones, llamadas *husos* o *ángulos esféricos*, cada una de ellas comprendida en uno de los cuatro diedros en que sus planos dividen al espacio. La medida de cada uno de estos diedros se toma también como *medida del ángulo esférico* o *abertura del huso* correspondiente.

Dos circunferencias máximas se llamarán *perpendiculares* cuando formen un ángulo recto.

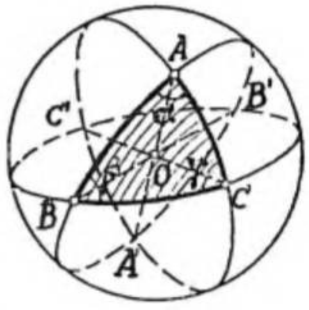
Los extremos del diámetro perpendicular a un círculo máximo c, se llaman *polos* de éste. En él *concurren todas las circunferencias máximas perpendiculares a* c, puesto que todos los planos perpendiculares al plano de c por el centro pasan por el diámetro perpendicular.

Desde un punto A de la superficie esférica, exterior a una circunferencia máxima c y distinto de los polos, *se puede trazar una circunferencia máxima perpendicular, y una sola*. La que pasa por los polos P y P' de c, es decir, contenida en el plano perpendicular al de c que pasa por A. Si B y B' son las intersecciones de esta perpendicular con c, el menor $\widehat{AB}$ de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AB'}$ se llama *distancia de* A *a* c, por ser menor que *cualquier arco* $\widehat{\mathrm{AC}}$ *de la circunferencia máxima que une* A *con un punto de* c.



En efecto, $AOB < AOC$, según se demostró en la lección 42, § 7.

2. Triángulos esféricos.— Como a todo ángulo central corresponde una distancia esférica y a cada diedro un ángulo esférico, un triedo de vértice en el centro será cortado por la superficie esférica, según una porción de superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencia máxima, que se llama *triángulo esférico* Las intersecciones A, B, C de las aristas del triedro son los llamados *vértices* del triángulo. Las secciones de las caras son los arcos de circunferencia máxima $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ llamados *lados* del triángulo esférico, y que se miden por sus ángulos centrales. A los diedros del triedro corresponden, pues, los ángulos del triángulo esférico ABC formados por cada dos lados, y que designaremos por letras griegas α, β, γ. Llamaremos respectivamente α, β, γ a los *opuestos* a $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ y $\widehat{AB}$.



Como las caras de un triedro son ángulos convexos (menores que un llano), *los lados de un triángulo esférico son menores que una semicircunferencia.*

Como los tres planos de las caras de un triedro dividen al espacio en ocho triedros (lec 37, § 5), las circunferencias de los lados de un triángulo esférico ABC dividen a la superficie esférica en otros ocho triángulos que son, llamando A', B', C' los puntos diametralmente opuestos a A, B, C:

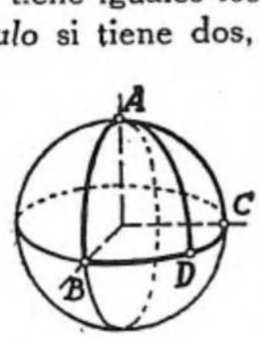
ABC, triángulo dado.

ABC', $AB'C$, $A'BC$, triángulos llamados *adyacentes* al ABC por tener con él un lado común.

$A'B'C'$, triángulo *simétrico* del ABC respecto de O.

$A'B'C$, $A'BC'$, $AB'C'$, triángulos adyacentes del $A'B'C'$, o simétricos de ABC', $AB'C$, $A'BC$ respecto de O.

El triángulo esférico se llama *isósceles* si tiene *dos* lados iguales, *equilátero* si tiene iguales los *tres*. Se llama *rectángulo* si tiene un diedro recto, *birrectángulo* si tiene dos, en cuyo caso tiene también rectos los lados opuestos, por concurrir éstos en el polo del tercer lado (ABD de la figura). Se llama, por fin, *trirrectángulo* el triedro que tiene tres diedros rectos y, por tanto, sus lados son tres cuadrantes de circunferencia máxima (ABC figura). Un triángulo esférico trirrectángulo se llama también *octante* de la superficie esférica por estar ésta constituída por ocho iguales a él (por simetría).



3. Propiedades de los triángulos esféricos.—De las propiedades de los triedros, demostradas en la lec. 44, § 5, y de la definición de triángulo esférico, se desprenden, sin más, los enunciados siguientes:

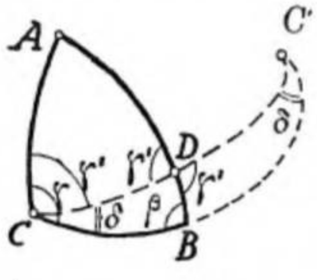
La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro rectos (lección 44, § 4).

Cada lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. (Como en los triángulos planos.)

La suma de los ángulos de un triángulo esférico es MAYOR QUE DOS RECTOS *y menor que seis.* (En los triángulos planos vale dos rectos.)

El menor de los ángulos de un triángulo difiere de la suma de los otros dos en menos de dos rectos.

Un triángulo esférico isósceles tiene iguales los ángulos opuestos a los lados iguales y recíprocamente, *si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, es isósceles*, llamándose *base* el lado desigual.

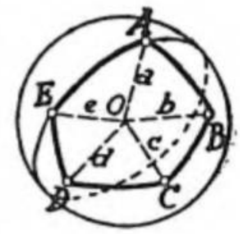


Dos triángulos esféricos simétricos, sólo son superponibles si son isósceles (lec. 44, § 7). Demostremos ahora:

En todo triángulo esférico, a mayor lado se opone mayor ángulo. Si es $\widehat{AB} > \widehat{AC}$ llevemos $\widehat{AD} = \widehat{AC}$ sobre $\widehat{AB}$. Si C' es el simétrico de C, en el triángulo DBC' se tendrá $(180° - \beta) + \gamma' + \delta > 180°$ pero $\gamma' + \delta = \gamma$, de donde $\gamma > \beta$.

En todo triángulo esférico, a mayor ángulo se opone mayor lado. Si $\gamma > \beta$ es $\widehat{AB} > \widehat{AC}$, pues si fuese $AB \leqslant AC$, sería por los teoremas anteriores $\gamma \leqslant \beta$, contra lo supuesto.

4. Polígonos esféricos.—Del mismo modo que hemos definido un triángulo esférico, definiremos un *polígono esférico convexo* como la sección producida en la superficie esférica por un ángulo poliedro convexo con vértice en el centro. A cada cara del anguloide corresponde un *lado*, arco de circunferencia máxima, y a cada diedro un *ángulo* del polígono.

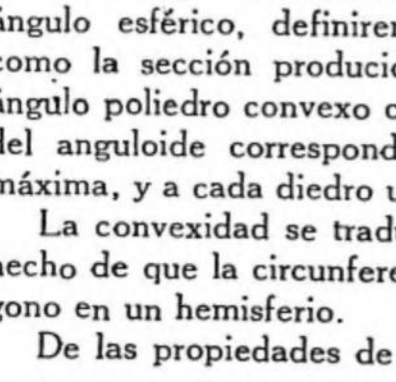


La convexidad se traducirá en la superficie esférica por el hecho de que la circunferencia de cada lado deja todo el polígono en un hemisferio.

De las propiedades de los anguloides se desprende:

La suma de los lados de un polígono esférico convexo es menor que cuatro rectos.

Un lado de un polígono esférico es menor que la suma de los demás. Esta propiedad es generalizable a líneas poligonales no convexas y justifica la denominación de *distancia esférica* entre dos puntos.



La suma de los ángulos de un polígono convexo de n *lados está comprendida entre* 2nR *y* (2n—4)R.

5. Triángulos y polígonos polares.—La sección de una superficie esférica con dos anguloides (triedros) polares de vértice en el centro, origina *dos polígonos (triángulos) polares. Los vértices de cada uno de ellos son polos de las circunferencias de los lados del otro. Los lados de cada uno son suplementarios de los diedros del otro y viceversa*

A toda relación métrica entre los lados del uno, corresponde otra entre los diedros del otro.

6. Igualdad de triángulos esféricos.—Recordando los criterios de igualdad de triedros, demostrados en la lección 44, § 7, podemos enunciar:

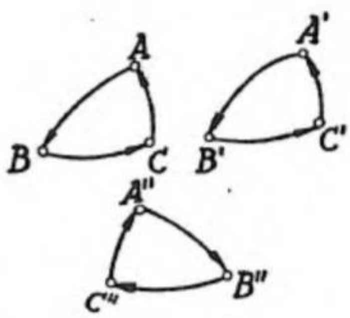
1.^er criterio.—*Dos triángulos esféricos que tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, son iguales.*

2.° criterio.—*Dos triángulos esféricos que tienen iguales un lado y los dos ángulos contiguos, son iguales.*

3.^er criterio.—*Dos triángulos esféricos de lados respectivamente iguales, son iguales.*

4.° criterio.—*Dos triángulos esféricos de ángulos respectivamente iguales, son iguales.*

Los criterios 2.° y 4.° equivalen a los 1.° y 3.° del triángulo polar.



En estos enunciados se entiende indistintamente por igualdad la congruencia o la pseudocongruencia, es decir, los triángulos serán superponibles, o será uno de ellos superponible al simétrico del otro, según que los sentidos de los triedros de que procedan sean iguales u opuestos En el primer caso diremos que los dos triángulos esféricos están orientados en el mismo sentido, y en el segundo caso, que tienen sentidos opuestos.

Un sentido en la radiación de vértice O define, pues, un sentido en toda superficie esférica de centro O, y diremos que esta superficie está *orientada* cuando en ella se ha definido un sentido

7. Comparación entre las Geometrías en la superficie esférica y en el plano.—En lo visto hasta ahora se observa la *similitud de ciertas propiedades* de la geometría esférica con otras de la geometría plana, traduciendo «segmento» por «arco de circunferencia máxima», «ángulo plano» por «ángulo esférico», «semiplano» por «hemisferio», etc. Así las relaciones de igualdad y desigualdad de lados de un triángulo, las propiedades del triángulo isósceles, los tres primeros criterios de igualdad de triángulos, etc. En cambio, *en otras propiedades la discordancia es manifiesta.* Examinando detenidamente estas propiedades, observará el lector que son precisamente aquéllas en que interviene el carácter *abierto* (Ax. II, 1) de la recta, la consideración de los puntos comunes a dos rectas y, por fin, la noción de paralelismo. Por ejemplo:

Dos rectas en el plano sólo *pueden* tener un punto común; en la esfera dos circunferencias máximas tienen siempre dos puntos comunes.

Dos perpendiculares a una recta, en el plano, son *paralelas;* en la esfera dos circunferencias máximas perpendiculares a otra *se cortan* en los polos de ésta. El paralelismo entre circunferencias máximas no existe.

La suma de los ángulos de un triángulo vale, en el plano, *dos rectos* (propiedad que era consecuencia del axioma de paralelismo); en la esfera es *mayor que dos rectos.*

Dos triángulos de ángulos respectivamente iguales son, en el plano, *semejantes* (noción derivada del paralelismo); en la esfera *son iguales.*

El lugar geométrico de los puntos de un semiplano equidistantes de una recta, es otra recta paralela En la esfera ya no es «recta» (circunferencia máxima), sino una *circunferencia menor.*

Las propiedades de las figuras trazadas sobre la superficie esférica proporcionan, pues, un ejemplo de *Geometría* que puede edificarse autónomamente partiendo de los conceptos «punto» y «recta esférica», modificando el cuadro de axiomas fundamentales: substancialmente los Ax. I, 3, y II, I (determinación de la recta y ordenación de sus puntos), y suprimiendo el Ax. IV *de paralelismo;* es decir, constituyen un ejemplo de *Geometría no euclídea.*

Sin embargo. para unos seres inteligentes que habitasen una región *muy pequeña de la superficie* (*polos* inaccesibles) cuyo radio fuese tan grande, es decir, la curvatura tan pequeña, que no pudieran apreciarla con sus más finos aparatos de medida, su geometría sería euclídea. pues. para ellos, dos perpendiculares a una misma «recta» no se cortarían; el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los de una «recta» se confundiría con otra, etc... Inútil, pues, preguntarse cuál es la geometría *verdadera,* ya que, en definitiva, la *verdad* observable para el hombre es concepto mudable con la precisión de sus medios de observación.

Es, pues, conveniente que el lector estudioso que sienta inquietudes por penetrar algún día en las modernas teorías de la Física se vaya dando cuenta, desde ahora, de todo lo que hay de acomodaticio en los principios de la Ciencia; de todo lo que ésta supone como *estructura adaptable al estudio experimental de la realidad,* sin perjuicio de exigir a esta estructura la indispensable solidez lógica en su desarrollo.

8. Mediatriz y bisectriz esféricas.—Después de este breve comentario tratemos de continuar con otras proposiciones más de geometría esférica, cuya demostración detallada dejaremos, como ejercicio, a cargo del lector.

El lugar geométrico de los puntos de una superficie esférica equidistantes de dos puntos dados A *y* B *es la circunferencia máxima perpendicular al arco* $\widehat{AB}$ *en su punto medio,* y se llama mediatriz esférica del arco $\widehat{AB}$.

(Recuérdese lec. 39, § 4 y téngase en cuenta que la equidistancia esférica implica la equidistancia rectilínea.)

El lugar geométrico de los puntos interiores a un ángulo esférico y equidistantes de sus lados, es una semicircunferencia máxima, llamada *bisectriz* del ángulo. *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos circunferencias máximas es el conjunto de otras dos perpendiculares y que contienen las bisectrices de los cuatro ángulos.*

(Recuérdese lec. 39, § 10, demostrando previamente que la equidistancia esférica de un punto a dos circunferencias máximas implica la equidistancia del mismo a sus planos, para lo cual basta observar la igualdad de los dos triángulos rectángulos que estas dos distancias forman con el radio común.)

Dejamos a cargo del lector la demostración (idéntica a la del plano) de la *existencia del circuncentro, del incentro y de los exincentros* (incentros de los triángulos adyacentes) de un *triángulo esférico.*

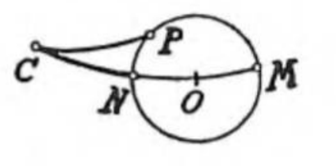
Del mismo modo que en geometría plana (lec. 11, § 5), es decir, apoyándonos en los teoremas similares a los allí empleados, podemos demostrar:

Si dos triángulos esféricos tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido desigual, los lados opuestos a estos ángulos están en la misma relación de desigualdad. (Teorema de los triángulos incongruentes.)

9. Circunferencias menores.—Análogamente a la definición de polo de una circunferencia máxima, llamaremos, como en § 1, *polos* de una circunferencia menor los extremos del diámetro perpendicular a su plano.

Todos los puntos de una circunferencia menor equidistan de cada uno de sus polos. Al que está situado a distancia esférica menor le llamaremos *centro* y a esta distancia la llamaremos *radio esférico*. Recíprocamente: *Todos los puntos esféricos equidistantes de uno fijo, están en una circunferencia, que es menor si esta distancia no es igual a un cuadrante.*

Todos los puntos que disten del centro menos que el radio se llamarán *interiores* al círculo menor, y *exteriores* si distan más que el radio. Apoyándonos en el teorema de los triángulos esféricos incongruentes (§ anterior) podemos demostrar como en geometría plana (v. lec. 11).



La menor $\sphericalangle\widehat{CN}$ *de las distancias esféricas que unen los puntos de una circunferencia menor de radio esférico* r *con un punto* C *de la superficie esférica distinto de sus polos, está en la circunferencia máxima* CO *y es igual a* $d-r$ *o* $r-d$, *según que sea* C *exterior o interior a dicha circunferencia menor. La distancia mayor* $\sphericalangle\widehat{CM}$ *está en la misma circunferencia y vale* $d+r$ *o* $360°-d-r$, *según que* C *sea exterior o interior a la circunferencia simétrica de la dada respecto del centro de la esfera.*

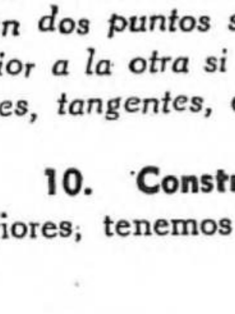
La circunferencia máxima perpendicular, por un punto de una circunferencia menor, al radio esférico que pasa por él sólo tiene con ella un punto común, y se llama *tangente* a la misma.

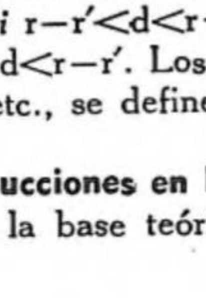
Con auxilio del axioma de continuidad, puede demostrarse finalmente que:

Toda circunferencia máxima que dista del centro de una circunferencia menor menos que su radio, la corta en dos puntos (*).

Dos circunf. menores de radios esféricos $r>r'$ *cuyos centros distan* d, *son exteriores una a otra si* $d>r+r'$, *tangentes exteriormente si* $d=r+r'$, *secantes en dos puntos si* $r-r'<d<r+r'$ *tangentes interiormente si* $d=r-r'$, *una interior a la otra si* $d<r-r'$. Los términos empleados en este enunciado: *exteriores, tangentes,* etc., se definen como en el plano.

10. Construcciones en la superficie esférica.—Con los teoremas anteriores, tenemos la base teórica necesaria para efectuar construcciones en la superficie esférica análogas a las del plano, con la única diferencia que aquí *una vez conocido el radio de la esfera y,* por ende, *la cuerda del cuadrante, nos bastará el uso del compás.*





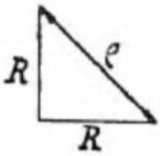
Empecemos, pues, por: *Determinar el radio de una esfera sólida supuesta dada.*

Tracemos con el compás una circunferencia en la esfera y tomemos en ella tres puntos *A, B, C*. Construyamos en el plano del dibujo un triángulo *A'B'C'* igual al triángulo rectilíneo

(*) Este enunciado puede también demostrarse como consecuencia del § 4, lección 47.

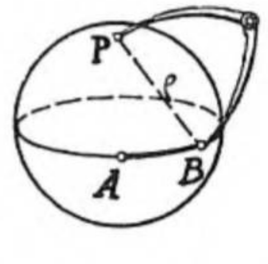
ABC transportando sus lados mediante el compás. La circunferencia circunscrita a $A'B'C'$ será igual a la circunferencia de la superficie esférica en que están situados A, B, C.

Ahora bien, el radio $r = O'A$ de esta circunferencia plana es proyección de la cuerda PA del radio esférico de la misma, lo que permite construir el triángulo rectángulo $O'PA$ que forman y, por tanto, el PAP' que determina el diámetro PP'.



Conocido éste y su mitad, el radio R, podemos construir fácilmente la cuerda ρ del cuadrante o radio esférico de toda circunferencia máxima.

Una vez en posesión de estos datos, podemos abandonar el plano del dibujo y realizar toda suerte de construcciones en la propia esfera. Demos idea de las esenciales.



Trazado de la «recta esférica» (circunferencia máxima) *por dos puntos* A *y* B *no diametrales.* Con una abertura del compás correspondiente a la cuerda ρ del cuadrante trazaremos dos arcos secantes que determinarán un polo P. Haciendo centro en él, se podrá trazar la «recta» pedida. Si A y B son diametralmente opuestos, la construcción no determina P; hay infinitas circunferencias máximas que pasan por A y B.

Trazar la mediatriz de un arco $\sphericalangle \widehat{AB}$. Se hallan, como en el plano, dos puntos equidistantes y se traza la «recta» que los une.

Bisectriz de un ángulo. (Como en el plano.)

Perpendicular por un punto P a una circunferencia máxima c. Trácense, como en el plano, dos puntos A y B de c equidistantes de P y luego la mediatriz de AB.

Circunferencia menor por tres puntos A, B, C. El centro (polo) es el punto de concurso de las mediatrices de AB, AC, BC.

Circunferencia tangente a tres circunferencias máximas no concurrentes. Hállense los incentros de los triángulos que limitan.

Construcción de un triángulo esférico, dados: 1.° Dos lados y el ángulo que forman (como en el plano); 2.° Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (construcción y discusión análogas al plano); 3.° Sus tres lados (como en el plano); 4.° Dos ángulos y un lado; 5.° Los tres ángulos (constrúyase en estos casos el triedro polar y hállense los polos de sus lados, tomando los tres, hacia dentro o hacia fuera del triángulo polar).

EJERCICIOS

1. Si desde un punto de una esfera se trazan la perpendicular a una circunferencia máxima (no polar del punto) y diversas oblicuas, de éstas es mayor la que tiene su pie a mayor distancia del pie de la perpendicular.

2. Enunciar y demostrar criterios de igualdad de triángulos esféricos rectángulos.

3. En todo triángulo esférico rectángulo, cada ángulo contiguo a un cateto es de igual especie ($>$, $=$, $<$ que un recto) que el lado opuesto.

4. Lugar geométrico de los vértices de los triángulos esféricos que tienen una base común AB y cuyos otros dos lados suman una semicircunferencia.

5. Llamando *medianas* de un triángulo esférico a los arcos que unen sus vértices con los puntos medios de los lados opuestos, demostrar que si una *mediana* de un triángulo esférico es un cuadrante de circunferencia, es bisectriz del ángulo en que se halla y los lados de éste son arcos suplementarios. Teorema recíproco de esta última propiedad.

6. Si un triángulo esférico tiene dos lados suplementarios, los ángulos opuestos a ellos son también suplementarios. Recíproco.

7. Las medianas de un triángulo esférico concurren en un punto. (V. ej. 9, lec. 46.)

8. La circunferencia máxima que pasa por los puntos medios de dos lados de un triángulo esférico corta a la circunferencia del tercer lado en un punto que dista un cuadrante de su punto medio.

9. Llamando *alturas* de un triángulo esférico a los arcos que definen las distancias de cada vértice a la circunferencia del lado opuesto, demostrar que las tres alturas concurren en un punto. Este punto se llama *ortocentro*.

10. El lugar geométrico de los vértices C_i de los tr. esf. ABC_1, ABC_2 ... con una base común AB y tales que $\sphericalangle A+B-C_i$ es constante en valor absoluto, es el conjunto de dos circunferencias menores que pasan por A, B y simétricas respecto del plano que contiene AB.

11. Los vértices de los triángulos esféricos de la misma base y cuyos ángulos tienen una suma constante es una circunferencia menor cuyo polo es el de la circunferencia máxima que biseca los lados (no básicos). (Teorema de Lexell.) Demuéstrese que ésta es única.

12. En todo cuadrilátero esférico inscrito en una circunferencia menor, la suma de dos ángulos opuestos es igual a la de los otros dos.

13. Trazar por un punto una circunferencia máxima que forme un ángulo dado con otra circunferencia máxima dada.

14. Construcción de triángulos esféricos rectángulos.

15. Construcción de triángulos esféricos oblicuángulos, dados tres de sus elementos.

16. Trazado de las circunferencias máximas tangentes a otra menor, por un punto dado.

17. Trazado de las circunferencias máximas tangentes a dos menores dadas.

18. La circunferencia máxima que pasa por los puntos de intersección de dos menores biseca los arcos de circunferencia máximas tangentes a estas menores comprendidos entre los puntos de contacto.

19. Las tres circunferencias máximas secantes comunes de tres menores secantes entre sí dos a dos, son concurrentes.

20. En todo cuadrilátero esférico circunscrito a una circunferencia menor, las sumas de los lados opuestos son iguales.

21. Tres circunferencias menores iguales pasan por el mismo punto H y los otros puntos de intersección son A, B, C. Demostrar que H es el ortocentro de ABC.

22. Demostrar que el triángulo formado por los centros de las circunferencias menores del ejercicio anterior es congruente con el ABC.

23. Un cuadrilátero esférico que tiene los lados opuestos iguales tiene también iguales los ángulos opuestos: sus diagonales se bisecan mutuamente, y su punto de intersección es centro de simetría esférica. La polar de dicho centro contiene los puntos en que se cortan las prolongaciones de los lados opuestos.

24. Si en un cuadrilátero de las condiciones del ejercicio anterior dos ángulos (lados) consecutivos son iguales, el cuadrilátero es inscriptible (circunscriptible).

25. El ortocentro de un triángulo coincide con el de su polar (o es su opuesto, según el sentido en que se construya el triángulo polar).

26. Si en un triángulo esférico ABC se verifica $\sphericalangle(A+B)=\sphericalangle C$, uno de los polos de la circunferencia circunscrita es el punto medio del lado AB.

27. Hallar el diámetro de una esfera circunscrita a un tetraedro que tiene un triedro trirrectángulo, conocidas las aristas de este triedro.

28. Trazar por un punto interior a una esfera tres cuerdas proporcionales a tres segmentos dados.

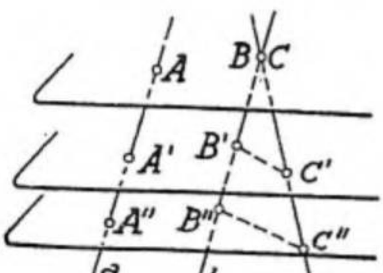
29. Lugar de los puntos desde los cuales se ven dos esferas bajo ángulos iguales.

30. Construir una esfera de radio dado: 1.º), que pase por tres puntos dados; 2.º), que pase por dos puntos y sea tangente a un plano o a una esfera dada; 3.º), que pase por un punto y sea tangente a dos planos o esferas dadas; 4.º), que sea tangente a tres planos o esferas dadas.

Capítulo XVI.—HOMOTECIA, INVERSION Y POLARIDAD EN EL ESPACIO

LECCIÓN 49.—HOMOTECIA Y SEMEJANZA EN EL ESPACIO

1. Rectas cortadas por planos paralelos.— *Los segmentos interceptados en dos rectas por un sistema de planos paralelos secantes a ambas son proporcionales.*



Si las rectas son paralelas (a y b de la figura) los segmentos de ellas AA' y BB', $A'A''$ y $B'B''$ ... comprendidos entre planos paralelos son iguales (lección 41), y, por tanto, proporcionales.

Si las rectas son secantes (b y c de la figura), el plano que determinan es cortado por los planos del sistema según un sistema de rectas paralelas $B'C'$, $B''C''$, ...y, por tanto, según el teorema demostrado en Geometría plana (lec. 19, § 1.), los segmentos correspondientes BB' y CC'; $B'B''$ y $C'C''$, ... son también proporcionales.

Finalmente, si las rectas se cruzan (a y c en la figura) bastará trazar por un punto C de una de ellas una paralela a la otra y aplicar los casos anteriores. Los segmentos CC', $C'C''$, ... son proporcionales a BB', $B'B''$, ... y por tanto a sus iguales AA', $A'A''$, ...

Recíprocamente: *Si dos sistemas de puntos* A, B, C, ... A', B', C' *están en planos paralelos, todo otro sistema de puntos* A'', B'', C'', ... *respectivamente alineados con* AA', BB', CC', ..., *situados en un mismo semiespacio respecto del plano* ABC, ... *y de tal modo que los segmentos* AA'', BB'', CC'', ... *sean proporcionales a* AA', BB', CC', ... *está también en un plano, paralelo a los anteriores.*

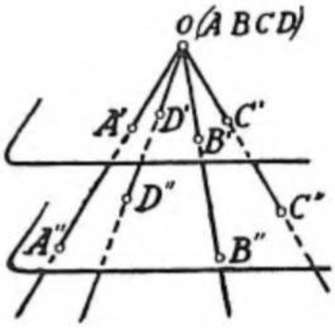
Basta trazar por A'' el plano paralelo a los anteriores y comprobar que las intersecciones B''_1, C''_1, ... con las rectas BB', CC', ... coinciden con B'', C'', ... En efecto, por hipótesis y por el teorema directo se verifican las dos igualdades siguientes en valor y signo:

$$BB' : BB'' = AA' : AA'' = BB' : BB''_1$$

de las que resulta $BB'' = BB''_1$ y por tanto B''_1 confundido con B'' y análogamente C''_1 con C'', etc.

Corolario. *Si varios puntos* A', B', C', D', ... *son coplanarios, todo otro conjunto de puntos* A''B''C''D'', ... *respectivamene alineados con los anteriores y* *con un punto fijo O, de tal modo que se verifican en valor y signo las proporciones*

$$\frac{OA'}{OA''} = \frac{OB'}{OB''} = \frac{OC'}{OC''} = \frac{OD'}{OD''} = \ldots$$



están también en un plano.

2. La homotecia en el espacio.—Dado un punto fijo O y un número real $k \neq 0$ positivo o negativo, hagamos corresponder a todo punto A, distinto de O, otro A' alineado con O tal que $OA' : OA = k$. Este punto está en la semirrecta OA si $k > 0$ y en la opuesta si $k < 0$. La correspondencia así definida se llama *homotecia de centro O y razón k*. Si $k = 1$ la homotecia se reduce a *identidad*, si $k = -1$ es la *simetría* respecto O. Llamaremos *figuras homotéticas* aquellas cuyos puntos se corresponden en la homotecia. De esta definición se desprende (suponiendo $k \neq 1$):

El centro O es el único punto doble (homólogo de sí mismo).

Las rectas que pasan por el centro son dobles.

Los planos que pasan por el centro son dobles y los puntos homólogos en cada uno de estos planos lo son en una homotecia en dicho plano de centro O y razón k, de donde (lec 20):

A los puntos de una recta que no pasa por el centro, corresponden los de otra paralela. Luego, *las rectas que pasan por el centro son las únicas dobles. La homotecia conserva la ordenación de los puntos de una recta.* Las semirectas homólogas son paralelas y del mismo sentido si $k > 0$ y de sentido opuesto si $k < 0$.

La razón entre dos segmentos homólogos A'B' AB *es constante e igual a la razón* k *de homotecia.*

A los puntos de un plano que no pasa por el centro corresponden los de otro plano paralelo, y por conservarse el orden o separación de puntos, *a un semiplano corresponderá otro.*

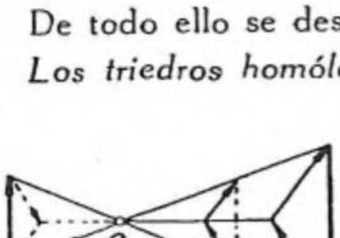
De aquí resulta:

A todo ángulo plano corresponde otro igual. Por ser sus lados paralelos y dirigidos ambos en igual (u opuesto) sentido.

Los ángulos diedros formados por semiplanos homólogos son iguales, puesto que las secciones rectas de estos diedros trazadas por puntos homólogos, serán homólogas (formadas por semirrectas homólogas) y por tanto iguales.

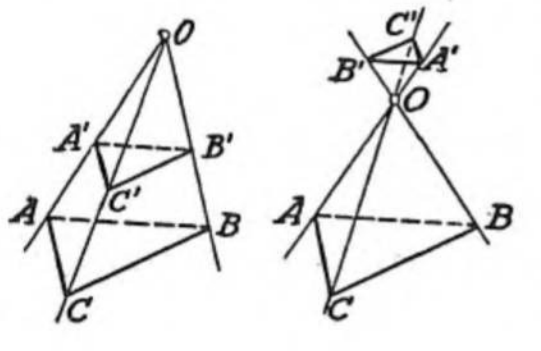
De todo ello se desprende, finalmente:

Los triedros homólogos son iguales, pero sólo son de igual sentido (congruentes) si $k > 0$; pues la *homotecia de razón negativa invierte el sentido del espacio*, como es fácil comprobar en los triedros de vértice O, si observamos que toda homotecia de razón $-k$ se puede obtener como producto de la de razón $+k$ por la simetría respecto del centro.



3. Triángulos homotéticos en el espacio.—Dos triángulos homotéticos, sean o no coplanarios, tienen, en virtud de lo dicho, lados paralelos.

Recíprocamente: *Dos triángulos de lados paralelos no iguales son homotéticos.* Para triángulos coplanarios ya se estableció el teorema correspondiente en la lección 19. Para triángulos *no coplanarios* la demostración es más sencilla aún.



En efecto, sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos de lados AB, BC y AC respectivamente paralelos a $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$.

Por ser AB paralelo a $A'B'$ las rectas AA' y BB' son coplanarias y se cortan (de lo contrario sería $AB = A'B'$, contra lo supuesto).

Análogamente, se cortan las rectas AA' y CC' así como BB' y CC'. Pero como ABC y $A'B'C'$ no son coplanarios, las tres rectas AA', BB' y CC' no pueden estar en un plano, luego al cortarse dos a dos tienen que pasar por punto O común a las tres, que será el centro de homotecia, y los pares de segmentos OA y OA'; OB y OB'; OC y OC' determinados en ellas por los planos paralelos ABC y $A'B'C'$ serán proporcionales en virtud del § 1 lo que determina la razón de homotecia.

4. Semejanza en el espacio.—El producto de una homotecia por un movimiento o pseudo-movimiento, será una transformación que tendrá las propiedades resultantes de una y otra, a saber:

1. *A puntos alineados corresponden puntos alineados en igual orden*
   A puntos coplanarios corresponden puntos coplanarios.
2. *Los segmentos homólogos son proporcionales.* La razón de proporcionalidad se llama *razón de semejanza.*
3. *Los ángulos homólogos son iguales. Los diedros homólogos son iguales.*

En cuanto al sentido del espacio, se conserva si los conservan o los invierten los dos factores (es decir, si se multiplica una homotecia de razón positiva por un movimiento, o una homotecia de razón negativa por un pseudo-movimiento), y se invierte en los otros casos, por conservarlo un solo factor.

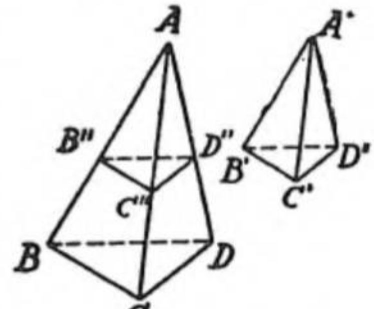
Dos figuras entre cuyos puntos se pueda establecer una correspondencia biunívoca que cumpla estas condiciones, se llamarán *semejantes* y la transformación que las liga, *semejanza.* Se llama *directa* si conserva el sentido del espacio, *inversa* en caso contrario.

Incluyendo la congruencia y la pseudocongruencia entre las semejanzas resulta: El producto de dos semejanzas es otra semejanza. *Las semejanzas forman grupo.*

Las semejanzas directas forman un grupo parcial o *subgrupo;* las inversas no, por ser el producto de dos de ellas una semejanza directa.

5. Semejanza de tetraedros y poliedros.—Dos poliedros semejantes tendrán, pues, sus caras homólogas semejantes, sus aristas homólogas proporcionales, sus ángulos y diedros homólogos iguales, sus anguloides iguales (directa o inversamente, según sea la clase de semejanza).

Para reconocer la semejanza de dos poliedros no es preciso comprobar tantas condiciones; basta que se cumplan algunas de ellas para que se cumplan las demás. Estudiaremos condiciones suficientes de semejanza en los poliedros más sencillos: los tetraedros.



Procederemos como en el plano para la semejanza de triángulos. Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ los tetraedros dados, llevemos sobre la arista AB (supuesta $>A'B'$) el segmento $AB''=A'B'$ y tracemos por B'' el plano $B''C''D''$ paralelo a la cara BCD.

El tetraedro $AB''C''D''$ es homotético y, por tanto, semejante del $ABCD$. Todo criterio que permita afirmar la igualdad (congruencia o pseudocongruencia) de los tetraedros $AB''C''D''$ y $A'B'C'D'$ nos dará un criterio de semejanza entre los tetraedros dados. Así, resulta:

1.^{er} CRITERIO.—*Dos tetraedros que tengan respectivamente semejantes dos caras* ABC∽A'B'C', ABD∼A'B'D' *e igual el diedro que forman, son semejantes.*

En efecto, por ser $A'B'=AB''$ (construcción), ABC es semejante a $AB''C''$ y a $A'B'C'$ con la misma razón de semejanza $AB:A'B'=AB:AB''$, de donde resulta $\Delta AB''C''=\Delta A'B'C'$, y análogamente $\Delta AB''D''=\Delta A'B'D'$; y como los diedros $A'B'$ y AB'' que estas caras forman son iguales, por serlo ambos al diedro AB del tetraedro $ABCD$, podemos afirmar la igualdad de los tetraedros $AB''C''D''$ y $A'B'C'D'$ (criterio 1.°, lección 45) y, por consiguiente, la semejanza de los tetraedros dados.

Razonando análogamente y recordando lección 45, § 9, probaríamos:

2.° CRITERIO.—*Dos tetraedros con una cara del uno semejante a la homóloga en el otro e iguales los diedros contiguos, son semejantes.*

3.^{er} CRITERIO.—*Dos tetraedros con tres caras respectivamente semejantes son semejantes.*

6. Condiciones suficientes de semejanza.—El tercer criterio de semejanza de tetraedros permite demostrar que dos figuras cuyos pares de puntos homólogos cumplan las condiciones 1.ª y 2.ª de semejanza (correspondencia en la alineación, orden y proporcionalidad de segmentos) (§ 4) cumplen también la tercera (igualdad de ángulos y diedros).

En efecto, los tetraedros homólogos tendrán las caras semejantes y tendrán, por tanto, iguales los ángulos de éstas y los diedros.

Recíprocamente. Si todos los pares de ángulos homólogos son iguales y se cumple la condición 1.ª, los tetraedros homólogos serán semejantes por tener semejantes sus caras, y los segmentos homólogos serán proporcionales.

Análogamente: Si todos los pares de diedros homólogos son iguales y se cumple la condición 1.ª, los triedros homólogos serán iguales (4.° criterio de igualdad de triedros) y, por tanto, serán iguales los ángulos de sus caras; de donde, aplicando la propiedad anterior, los segmentos homólogos serán proporcionales.

7. Grupo de las homotecias.—*El producto de dos homotecias del mismo centro y de razones* k_1, k_2 *es otra homotecia de razón* $k_1 k_2$. (Demuéstrese como en el plano.)

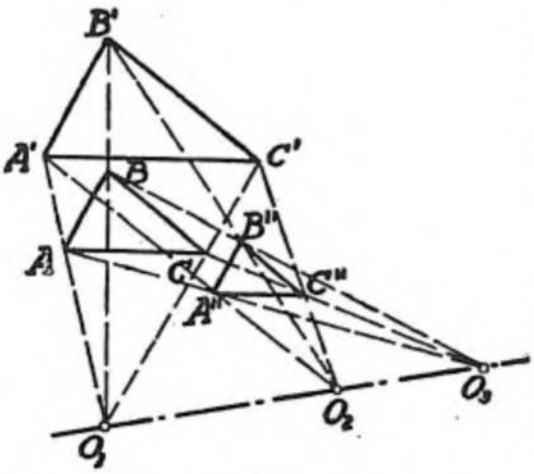
Como la identidad es una homotecia de razón $k=1$, resulta:

Todas las homotecias con un mismo centro forman grupo.

Demostremos, además:

El producto de dos homotecias de centros distintos $O_1 O_2$ *y de razones no recíprocas* k_1 *y* k_2, *es una homotecia de razón* $k_1 k_2$, *cuyo centro* O_3 *está alineado con* O_1 *y* O_2.

En efecto: Sea ABC un triángulo; $A'B'C'$ su homólogo en la homotecia $O_1 k_1$; y $A''B''C''$ el homólogo de éste en la homotecia $O_2 k_2$. ABC y $A''B''C''$ tienen sus lados homólogos paralelos entre sí, por serlo a los del triángulo $A'B'C'$; luego (§ 3), son homotéticos. Sea O_3 su centro de homotecia.



Lo mismo podemos repetir para otro triángulo ABD (no dibujado en la figura) determinado por AB y otro punto cualquiera D de la primera figura, y sus homólogos sucesivos D' y D''. Resultarán ABD y $A''B''D''$ triángulos homotéticos con centro en el punto de intersección de AA'' y BB'', es decir, en el mismo punto O_3 y razón

$$k_3 = \frac{O_3 D''}{O_3 D} = \frac{O_3 A''}{O_3 A} = \frac{A'' B''}{AB} = \frac{A'' B''}{A' B'} \quad \frac{A' B'}{AB} = k_2 k_1 \neq 1$$

Por tanto, todos los pares de puntos homólogos D y D'' en el producto están alineados con O_3 y su razón de distancias a O_3 es constante, es decir, las figuras primera y tercera son homotéticas.

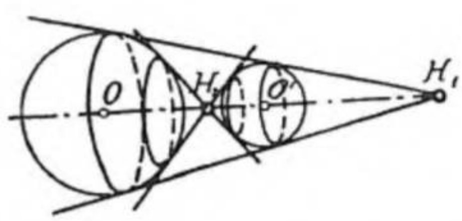
Por otra parte, como la recta $O_1 O_2$ es doble en las homotecias componentes, lo es en la homotecia producto y por eso pasa por O_3.

Si $k_1 k_2 = 1$ las figuras resultantes serán congruentes y sus rectas homólogas paralelas, es decir, estarán ligadas por una traslación. Conviniendo en considerarla como caso particular de la homotecia (centro infinitamente alejado) podemos decir:

Todas las homotecias forman grupo.

8. Esferas homotéticas.—Dadas dos esferas (no iguales ni concéntricas) podemos cortarlas por un plano que pase por sus centros O y O'. Las secciones son dos circunferencias homotéticas respecto de dos centros de homotecia situados en la recta OO' y armónicamente separados por estos puntos. Al girar la figura alrededor de la recta OO' resulta (lec 21, § 3)

Dos esferas son homotéticas respecto de dos centros distintos armónicamente separados por los centros de dichas esferas. Estos centros de homotecia son vértices de conos circunscritos a ambas esferas cuando existen tales conos.

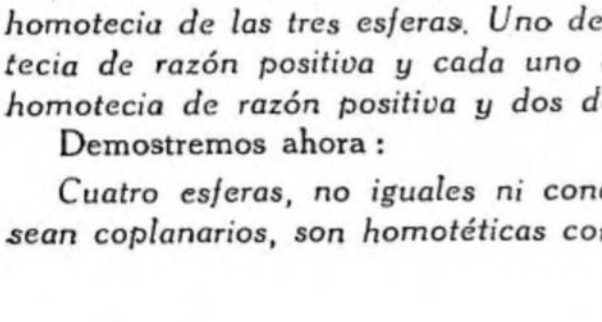


De lo anterior y razonando como en el plano para tres circunferencias, se deduce:

Tres esferas, no iguales ni concéntricas dos a dos, son homotéticas dos a dos respecto de seis centros alineados tres a tres en cuatro rectas llamadas ejes de homotecia de las tres esferas. Uno de ellos contiene los tres centros de homotecia de razón positiva y cada uno de los otros dos contiene un centro de homotecia de razón positiva y dos de razón negativa.

Demostremos ahora:

Cuatro esferas, no iguales ni concéntricas dos a dos, y cuyos centros no sean coplanarios, son homotéticas con respecto de doce centros de homotecia (seis de razón positiva y seis de razón negativa) situados seis a seis en ocho planos (no incidentes con los centros de las esferas) que se llaman *planos de homotecia* de las cuatro esferas.



Sean $O_1O_2O_3O_4$ los centros de las cuatro esferas. Existen en cada una de las seis aristas del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$ dos centros de homotecia (distintos de los vértices), luego en total son doce centros. Sea H, por ejemplo, uno de los centros de homotecia de las esferas O_1O_2. Por H pasan, en virtud del teorema anterior, dos ejes de homotecia ee' de las esferas $O_1O_2O_3$ y otros dos $e''e'''$ de $O_1O_2O_4$. Cada uno de los planos ee'', ee''', $e'e''$, $e'e'''$ que estos ejes determinan (distintos de las caras) contiene, pues, H y otros cuatro centros de homotecia y es homólogo de sí mismo en las cinco homotecias que tienen estos centros y definidas por las esferas homólogas O_1O_2, O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_2O_4; luego también es doble en una de las homotecias producto en las que son homólogos O_3O_4 y, por tanto, contiene su centro.

En resumen, por cada centro H de homotecia pasan cuatro planos (no incidentes con $O_1O_2O_3O_4$), cada uno de los cuales contiene otros cinco centros además de H, es decir, seis en total: luego, el número total de estos *planos de homotecia* es

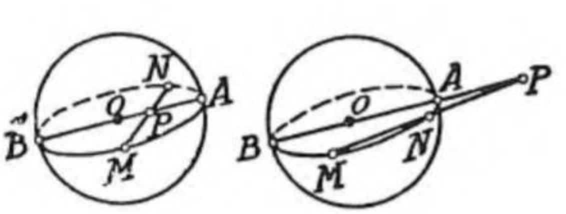
$$\frac{12 \cdot 4}{6} = 8$$

Cada una de las caras del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$ tiene la misma propiedad de contener 6 centros de homotecia, pero sólo de las tres esferas cuyos centros están en dicha cara.

V. Ejercicios al final del capítulo.

LECCIÓN 50.—POTENCIA RESPECTO DE LA ESFERA

1. Potencia de un punto respecto de una esfera.—Sea P un punto a distancia d del centro O de una esfera de radio r. Tracemos una secante no diametral cualquiera que pase por P, y sean M y N los puntos de intersección. Sean A y B los puntos de intersección de la recta diametral que pasa por P. Los cuatro puntos $ABMN$ pertenecen a la circunferencia máxima sección diametral producida por el plano OPM. Por tanto, recordando lo dicho para la potencia de un punto respecto de una circunferencia, se tendrá en valor y signo



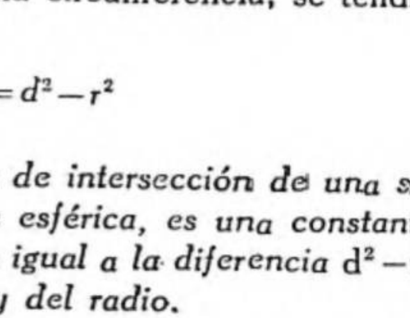
$$\overline{PM}\cdot\overline{PN}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)=d^2-r^2$$

El producto de distancias de un punto P *a los de intersección de una secante cualquiera que pasa por él con la superficie esférica, es una constante* llamada *potencia del punto* respecto de la esfera, e *igual a la diferencia* d^2-r^2 *de cuadrados de la distancia del punto al centro y del radio.*

La potencia es positiva, negativa o nula, según que el punto sea exterior, interior o esté sobre la superficie esférica.

La potencia de un punto exterior es igual al cuadrado del segmento de tangente desde dicho punto a la esfera.

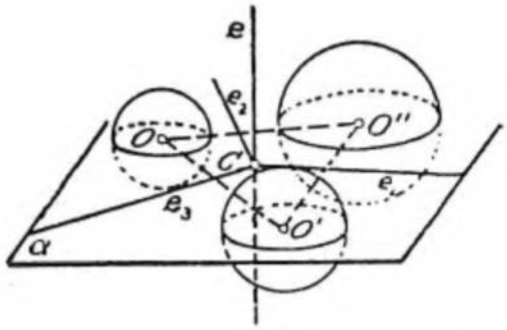
2. Plano radical de dos esferas.— Dadas dos esferas, cortémoslas por un plano diametral común que pase por la recta de centros OO' y tracemos el eje radical de ambas circunferencias máximas. Al girar la figura alrededor de OO', las circunferencias engendran las respectivas esferas, mientras el eje radical perpendicular a OO' engendra un plano cuyos puntos tienen igual potencia respecto de ambas esferas.



Recíprocamente, todo punto A de igual potencia respecto de ambas esferas lo será respecto de las circunferencias máximas contenidas en el plano diametral común $OO'A$. El punto A pertenece, pues, al eje radical de ambas y, por tanto, está en el plano antes descrito.

El lugar geométrico de los puntos de igual potencia respecto de dos esferas, es un plano perpendicular a la línea de centros, que se llama ***plano radical*** de las mismas. Si las superficies esféricas se cortan, este plano contiene la circunferencia intersección, y coincide con el plano tangente común si las superficies esféricas son tangentes.

3. Eje radical de tres esferas.— Dadas tres esferas de centros O, O', O'' no alineados, el plano α que éstos determinan corta a las tres según tres circunferencias máximas cuyos ejes radicales, tomados dos a dos, $e_1 e_2 e_3$ concurren en el centro radical C. Los planos radicales de las esferas dos a dos son, pues, los planos perpendiculares a α por $e_1 e_2 e_3$ y se cortan según una recta e perpendicular a α por C, de donde:



El lugar geométrico de los puntos de igual potencia respecto de tres esferas de centros no alineados, es una recta perpendicular al plano de centros, en la que concurren los tres planos radicales de las referidas esferas tomadas dos a dos. Esta recta se llama *eje radical de las tres esferas.*

4. Centro radical de cuatro esferas.—Si consideramos ahora una cuarta esfera cuyo centro O''' no esté en el plano $OO'O''$, el plano radical de O y O''' será oblicuo a α y cortará a e en un punto P, que tendrá *igual potencia respecto de las cuatro esferas*, punto en el que concurrirán, por tanto, los seis planos radicales de las cuatro esferas tomadas dos a dos y los cuatro ejes radicales de las mismas tomados tres a tres. Este punto se llama *centro radical* de las cuatro esferas.

5. Haz de esferas.—Dada una esfera O y un plano ε, podemos obtener todas las esferas que tienen con O el plano radical ε, cortando la esfera y el plano por un plano diametral δ perpendicular a ε, y construyendo en este plano el haz de circunferencias que tienen con la circunferencia de O el eje radical e, intersección de ε y δ.

Todas estas circunferencias tienen sus centros en la recta r de δ que pasa por O y es perpendicular a e y, por tanto, a ε, y al girar alrededor de r engendrarán las esferas buscadas.

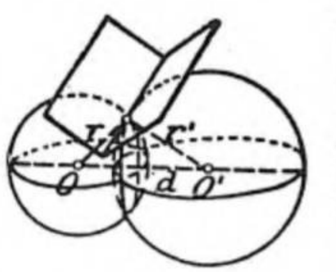
Todas las esferas que tienen con una dada O un mismo plano radical dado ε, tienen los centros en la recta perpendicular por O a ε. El conjunto de estas esferas, incluída O, constituyen lo que se llama un HAZ DE ESFERAS.

Si la superficie esférica dada corta o es tangente a ε, todas las demás pasan por la circunferencia de intersección o son tangentes en el mismo punto de contacto. Todas las superficies esféricas que pasan por una misma circunfe rencia o todas las que son tangentes entre sí en un punto constituyen, pues, un haz.

Análogamente a lo visto para el haz de circunferencias:

Los pares de puntos AA′ *de intersección de las superficies esféricas de un haz con una recta secante al plano radical, forman una involución cuyo centro es el punto* P *de intersección de la recta con dicho plano*. En efecto, $PA \cdot PA'$ es la potencia constante de P (punto del plano radical) respecto de todas las esferas.

6. Superficies esféricas ortogonales.—Dos superficies esféricas secantes se llaman *ortogonales* cuando lo son los radios de una y otra que pasan por los puntos comunes y, por tanto, los planos tangentes en dichos puntos. Se pueden obtener, pues, haciendo girar alrededor de la recta que une sus centros las dos circunferencias ortogonales producidas por una sección diametral común. Por tanto, recordando lo dicho en lección 25, § 2, la condición de ortogonalidad es equivalente a cada una de estas otras:



I. *Los planos tangentes a una de las esferas por los puntos de intersección, pasan por el centro de la otra.*

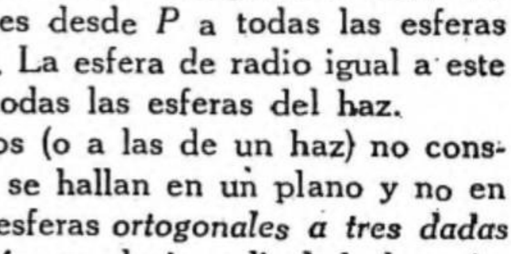
II. *La potencia de cada centro respecto de la otra esfera es el cuadrado de su propio radio.*

III. *Entre los radios* r *y* r′ *de ambas esferas y la distancia* d *entre sus centros, existe la relación* $d^2 = r^2 + r'^2$.

Todo punto P del plano radical de un haz de esferas, que sea exterior a las mismas (potencia positiva) es centro de una esfera ortogonal a todas las del haz. En efecto, los segmentos de tangentes desde P a todas las esferas del haz son iguales, por serlo la potencia de P. La esfera de radio igual a este segmento verifica, pues, la condición II con todas las esferas del haz.

El conjunto de las esferas ortogonales a dos (o a las de un haz) no constituye, pues, otro haz, puesto que sus centros se hallan en un plano y no en una recta. En cambio, constituyen un haz las esferas *ortogonales a tres dadas* (de centros no alineados), pues sus centros están en el eje radical de las mismas (razónese como antes).

7. Circunferencias coesféricas.—Dos secciones de una esfera tienen un plano diametral de simetría común perpendicular a la recta en que se cortan los planos de ambas secciones si éstos son secantes entre sí. Si éstos son paralelos, hay infinitos planos diametrales de simetría común de ambas secciones; todos los que pasan por la recta que une los centros OO'.



En ambos casos, los *extremos de los dos diámetros* AB, A′B′ *de ambas secciones situados en este plano de simetría son concíclicos*, puesto que pertenecen a la circunferencia máxima de la esfera situada en dicho plano.

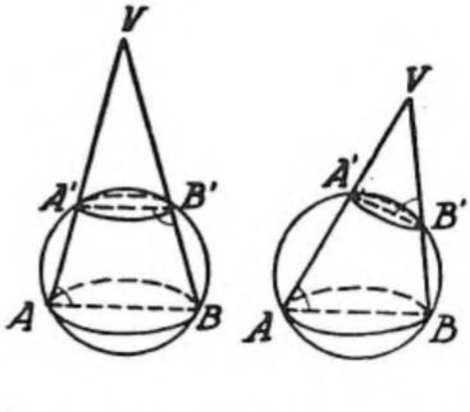
Recíprocamente. *Si dos circunferencias no coplanarias tienen un plano de simetría común y los extremos de los diámetros* AB *y* A'B' *situados en dicho plano son concíclicos, ambas circunferencias están en una misma superficie esférica.*

La que tiene por circunferencia máxima $ABA'B'$. En efecto, al cortar dicha esfera por los planos perpendiculares al de esta circunferencia, que pasan por AB y $A'B'$, se obtendrán las dos circunferencias dadas (cuyos diámetros son precisamente AB y $A'B'$).

El teorema es aplicable al caso en que B y B' coinciden, es decir, si las circunferencias tienen un punto común y su tangente en él. Pero en este caso, como en el de las circunferencias secantes, ya sabíamos por la lección 47 que las circunferencias eran coesféricas.

Apliquemos el teorema a las secciones de un cono.

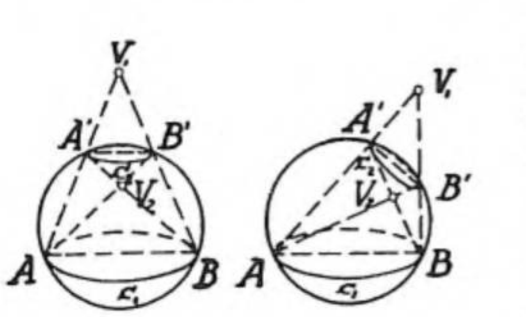
Dos secciones perpendiculares al eje de un cono circular recto o dos secciones circulares antiparalelas de un cono oblicuo, están en una misma superficie esférica.



El primer caso es evidente puesto que el trapecio isósceles $ABA'B'$ que las dos secciones determinan en un plano meridiano, es inscriptible en una circunferencia (ángulos opuestos suplementarios.

En el segundo caso, recordando la definición de secciones antiparalelas, dada en la lección 47, § 6, se tiene asimismo en el plano de simetría del cono los dos diámetros AB y $A'B'$ antiparalelos respecto de VA y VB, lo que prueba que A, B, A' y B' son concíclicos (lec. 23, § 2).

Recíprocamente: *Dadas dos circunferencias* c_1 *y* c_2 *coesféricas, existen dos superficies cónicas circulares a las que pertenecen ambas.* Se entiende aquí por superficies cónicas, las engendradas por rectas *completas.*



Sean AB y $A'B'$ los diámetros respectivos situados en el plano de simetría de ambas circunferencias y sea V_1 el punto de intersección de AA' y BB'. El cono que proyecta c_1 desde V_1 es cortado por el plano que pasa por A' y es paralelo al de c_1 en el primer caso, o antiparalelo en el segundo, según una circunferencia de diámetro $A'B'$ normal al plano de simetría y que coincide, por tanto, con c_2.

Análogamente se demostrará para el cono de vértice V_2 intersección de AB' y BA'.

NOTA.—Uno de los conos degenera en cilindro si c_1 y c_2 son iguales. La demostración es idéntica.

V. Ejercicios al final del capítulo.

LECCIÓN 51.—LA INVERSIÓN Y LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

1. Definición de la inversión.—Fijado un punto O y un número $k \neq 0$, transformemos todo punto A distinto de O en otro A' de la recta OA tal que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$. Definimos así una correspondencia puntual, llamada *inversión* El punto O se llama *centro* y la constante k, *potencia* de inversión. Toda inversión queda, pues, definida por su centro y la potencia, o por *su centro y un par de puntos homólogos*. Si la potencia es *positiva* dos puntos homólogos están del mismo lado del centro y si es *negativa* están a lado distinto y se invierte el sentido del triedro formado por tres semirrectas concurrentes en O y, por tanto, el sentido del espacio.

Como en el plano, se ve fácilmente que la *inversión es una transformación involutiva*, es decir, los puntos homólogos se corresponden doblemente. El cuadrado de la transformación es la unidad.

2. Elementos homólogos de sí mismos.— Si la inversión es de potencia positiva, *todos los puntos de la esfera de radio* $\sqrt{k}$ *son homólogos de sí mismos*, por ser el cuadrado de su distancia a O igual a k. De la definición se desprende, además:

Las rectas que pasan por el centro son homólogas de sí mismas. Los pares de puntos homólogos en ellas *forman una involución* cuyos puntos dobles son los de intersección de dicha recta con la esfera de puntos dobles antes mencionada, cuando existe.

Los planos que pasan por el centro son homólogos de sí mismos y los pares de puntos homólogos en ellos lo son en la *inversión plana* de centro O y potencia k. Por tanto son válidos para las figuras homólogas coplanarias con O los teoremas de la inversión en el plano.

Toda superficie esférica que pasa por dos puntos A *y* A′ *homólogos en la inversión se transforma en sí misma*, puesto que la potencia de O respecto de ella será $OA \cdot OA' = k$ y, por tanto, todo otro par de puntos B y B' de la superficie alineados con O cumplirán asimismo $OB \cdot OB' = k$, es decir, serán homólogos en la inversión. En otros términos:

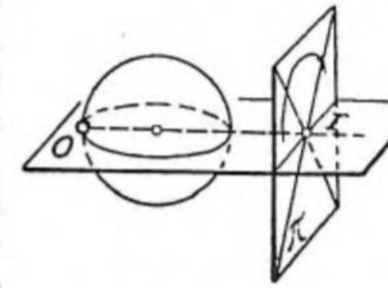
Toda superficie esférica cuya potencia respecto al centro sea igual a la potencia de inversión, es doble. Y en particular: *Todas las superficies esféricas ortogonales a la de puntos dobles, cuando existe, son dobles.*

3. Figuras inversas.—De lo que hemos dicho se desprende:

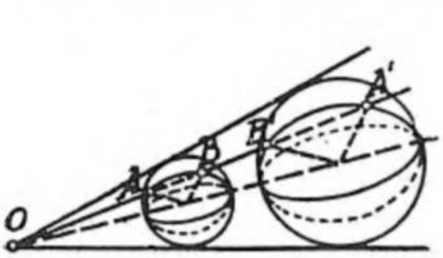
La figura inversa de una recta r *que no pasa por* O *es una circunferencia que pasa por* O *contenida en el plano* Or. *El diámetro de esta circunferencia que pasa por el centro de inversión* O *es perpendicular a* r. Y recíprocamente: *La figura inversa de una circunferencia por* O *es una recta de su plano perpendicular al diámetro que pasa por* O

Girando la figura alrededor de dicho diámetro resulta:

La figura inversa de un plano π que no pasa por el centro de inversión es una superficie esférica que pasa por él y cuyo diámetro por dicho punto es perpendicular a π y, recíprocamente: *La figura inversa de una superficie esférica que pasa por el centro de inversión es un plano perpendicular al diámetro, que pasa por él.*



La figura inversa de una superficie esférica que no pasa por O *es otra superficie esférica homotética de la primera respecto del centro de inversión y con razón de homotecia igual al cociente* k/p *de la potencia de inversión por la potencia* p *del centro de inversión respecto de la superficie esférica dada.*

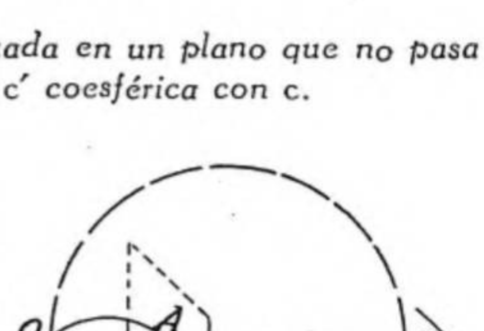


Para demostrarlo basta aplicar el teorema demostrado en Geometría plana (lec. 26, § 4) a la sección producida en la esfera por un plano diametral que pasa por el centro de inversión y girar la figura alrededor del diámetro en cuestión.

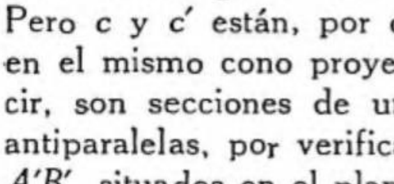
La figura inversa de una circunferencia coplanaria con el centro de inversión sin pasar por él, es otra circunferencia homotética situada en el mismo plano doble.

La figura inversa de una circunferencia c *situada en un plano que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia* c′ *coesférica con* c.

En efecto, c puede considerarse como intersección de su plano con la superficie esférica que la contiene y pasa por el centro de inversión O. Las figuras inversas de estas dos superficies son, respectivamente, otra superficie esférica que pasa por O y otro plano. Luego la intersección homóloga c' es también circunferencia Pero c y c' están, por definición de inversión, en el mismo cono proyectante desde O; es decir, son secciones de un mismo cono circular antiparalelas, por verificar dos diámetros AB y $A'B'$, situados en el plano doble de simetría, la condición de inversión $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = k$, lo que prueba que estas circunferencias son coesféricas (lec. 50, § 7).



4. Conservación de ángulos.—Los ángulos formados por líneas homólogas con una misma recta doble son iguales, por estar en un mismo plano doble (lec. 26, § 6). Es decir, son iguales los ángulos ra, $r'a'$ formados por dos semitangentes homólogas a y a' con las dos semirrectas homólogas alineadas r y r'. Considerando otras dos semitangentes homólogas b y b' se tendrá, análogamente, $\sphericalangle rb = \sphericalangle r'b'$.

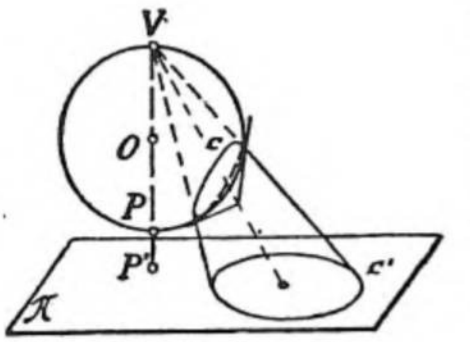


Si b y b' están en el mismo plano doble que a y a', deduciríamos en el plano $\sphericalangle ab = \sphericalangle a'b'$. Si b y b' están en un plano doble distinto del de a y a', la igualdad de los diedros que estos planos forman, junto con la igualdad de ángulos $ra = r'a'$, $rb = r'b'$, prueba la igualdad de los triedros abr y $a'b'r'$ y, por tanto, la de los ángulos de las caras ab y $a'b'$.

El ángulo de dos líneas es igual al de su homólogas. De otro modo: *La inversión en el espacio conserva los ángulos.*

5. La proyección estereográfica.—*La proyección de todos los puntos de una superficie esférica desde uno de ellos* V *sobre un plano* π *perpendicular al diámetro* VP *que pasa por él, se llama proyección estereográfica* de la superficie esférica sobre dicho plano.

Esta correspondencia entre los puntos de la superficie y del plano, no es otra que la inversión de centro V y en la que son homólogos el punto P y su proyección P' sobre π. En efecto, según hemos visto antes, en dicha inversión el plano π y la superficie esférica son homólogos por pasar ésta por el centro V y ser aquél perpendicular al diámetro por V. Sin más, podemos, pues, afirmar:



I. *En la proyección estereográfica se conservan los ángulos de las líneas homólogas.*

II. *Toda circunferencia* c *de la superficie esférica que no pasa por* V *se proyecta según otra circunferencia* c′ *del plano, coesférica con ella, y antiparalela respecto del cono proyectante.*

Recordando, además, lo demostrado en la lección 47, § 13:

III. *El centro de la circunferencia proyección* c′ *es la proyección desde* V *del vértice del cono circunscrito a la esfera a lo largo de la circunferencia proyectada* c.

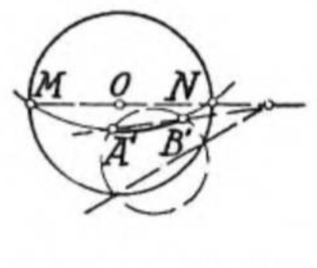
Este cono degenera en cilindro si c es circunferencia máxima, y entonces el centro de c' es la intersección del plano π con la paralela por V a las generatrices del cilindro.

Casos particulares.—Las circunferencias máximas que pasan por V se proyectan según rectas. Las circunferencias menores y la circunferencia máxima de polo V se proyectan según circunferencias concéntricas de centro P'. Llamaremos a la proyección de la circunferencia máxima de polo V *circunferencia ecuatorial.* Si el plano π se elige pasando por O, como es costumbre, esta circunferencia coincide con su proyección.

La conservación de ángulos permite asegurar la *semejanza* aproximada *de la figura y su proyección en regiones pequeñas,* es decir, en las que influye poco la variación de las distancias al centro. Por ello es una de las proyecciones más usadas en *cartografía* para la presentación de porciones no muy grandes de la superficie terrestre.

6. Construcciones en proyección estereográfica.— La proyección estereográfica de la superficie esférica sobre el plano permite efectuar, en éste, las construcciones indicadas en la lec. 48, § 10, sobre la superficie esférica.

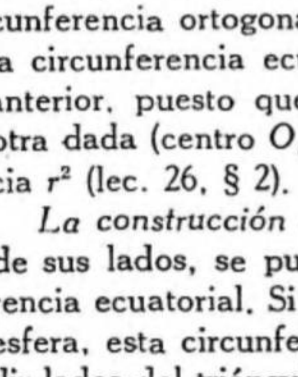
Por ejemplo, el *trazado de un arco de circunferencia máxima* $\widehat{AB}$ se reducirá, en la proyección estereográfica, al trazado de la circunferencia que une las proyecciones A' y B' y que biseca la circunferencia ecuatorial que se supone conocida en proyección (lec. 32, § 2, ejemplo 4.°).



El trazado de la circunferencia máxima perpendicular a otra por un punto es asimismo el trazado de una circunferencia ortogonal a otra en proyección y que biseca la circunferencia ecuatorial. Problema que se reduce al anterior, puesto que todas las circunferencias ortogonales por un punto P a otra dada (centro O, radio r) pasan por el inverso de P respecto de O y potencia r^2 (lec. 26, § 2).

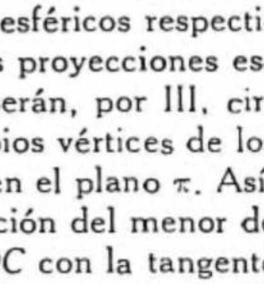
La construcción de triángulos esféricos en los casos en que se conoce uno de sus lados, se puede efectuar cómodamente colocándole sobre la circunferencia ecuatorial. Si se hace pasar el plano π de proyección por el centro de la esfera, esta circunferencia coincide con su proyección y en ella se podrán medir lados del triángulo en su verdadera magnitud

Construcción dados los tres lados.—Colocando el lado a sobre la circunferencia ecuatorial y a continuación de ambos extremos B y C los lados c y b, la intersección de los círculos esféricos menores de polos B y C y radios esféricos respectivos c y b, dará el tercer vértice A. Las proyecciones estereográficas de estas circunferencias serán, por III, circunferencias cuyos centros son los propios vértices de los conos circunscritos, por estar situados en el plano π. Así, por ejemplo, el centro C_1 de la proyección del menor de radio esférico b es la intersección de OC con la tangente a la circunferencia ecuatorial en el extremo A_1 de b. Análogamente se obtiene B_1. La intersección de los arcos de centros C_1 y B_1 por A_1 y A_2 dará la proyección A' del vértice A, y el triángulo se completará trazando las proyecciones de los arcos de circunferencia máxima $A'C$ y $A'B$.



Los ángulos que estos arcos forman entre sí y con la circunferencia ecuatorial, son los ángulos del triángulo esférico.

Construcción dados un lado a *y los ángulos* β *y* γ.— Colocado a sobre la circunferencia ecuatorial, la circunferencia máxima correspondiente al lado AC vendrá determinada en proyección por la condición de pasar por C y su opuesto C' y ser tangente en C a la recta que forma el ángulo γ con la tangente en C al arco CB.



Análogamente se determinará, mediante el ángulo β, la circunferencia que contiene el tercer lado, cuya intersección con la anterior dará A'. (Se tomarán β y γ en el mismo hemisferio.)

El ángulo de los arcos en A será α y los lados AC y AB se medirán girándolos alrededor de B y C respectivamente, hasta colocarlos en la circunferencia ecuatorial, es decir, trazando las circunferencias menores de centros B y C y radios esféricos BA y BC. Las proyecciones de estas circunferencias tendrán sus centros respectivamente en las rectas OB, OC (por lo dicho antes) y en las tangentes por A' a las circunferencias $BA'B'$, $CA'C'$, puesto que deben ser respectivamente orgotonales a ellas. Claro es que entonces lo son también a la circunferencia ecuatorial.

La construcción del triángulo, *dados dos lados y el ángulo comprendido* o *dados los tres ángulos*, puede efectuarse aplicando las construcciones anteriores al triángulo polar.

Tenemos así, un procedimiento para resolver gráficament eun triedro *en el plano*, es decir, para hallar sus elementos (caras, diedros), conocidos los indispensables para determinarlo.

EJERCICIOS

1. Demostrar que toda esfera que pasa por dos puntos homólogos en una inversión de potencia positiva es ortogonal a la superficie esférica de puntos dobles.

2. Demostrar que dos pares de puntos homólogos en una inversión son concíclicos

3. Demostrar que dos circunferencias coesféricas no tangentes son inversas entre sí respecto de dos centros de inversión.

4. Dadas dos circunferencias coesféricas no tangentes ni secantes, hallar una proyección estereográfica de la esfera que las transforme en dos circunferencias concéntricas.

5. Lugar de los centros de inversión que transforman dos puntos fijos de una esfera en puntos diametrales de la esfera inversa.

6 Dadas una circunferencia y una esfera sin puntos comunes, dígase en qué casos es posible transformarlas mediante una inversión en una circunferencia y un plano paralelo al que la contiene.

7. *Demostración por inversión de la propiedad III de la proyección estereográfica* (v § 5). El vértice del cono circunscrito a lo largo de la circunferencia c (figura § 5) es centro de la esfera ortogonal secante en c a la que se proyecta. La circunferencia c se transforma, pues, por inversión en c' intersección del plano π (homólogo de la esfera dada) con la esfera ortogonal a él y cuyo centro está alineado con el centro de inversión y el centro de la homóloga.

8. Construir en proyección estereográfica un triángulo esférico, dados dos lados y el ángulo comprendido. [Sitúese con el vértice del ángulo conocido en el punto diametralmente opuesto al centro de proyección.]

9. *Determinación de circunferencias en la superficie esférica por condiciones de tangencia.* Una circunferencia en la esfera puede determinarse por la condición de: 1.º) Pasar por tres puntos. 2.º) Pasar por dos puntos y ser tangente a una circunferencia (máxima o menor). 3.º) Pasar por un punto y ser tangente a dos circunferencias (máximas o menores). 4.º) Ser tangente a tres circunferencias dadas (máximas o menores). Este último es el *problema de Apolonio en la esfera.*

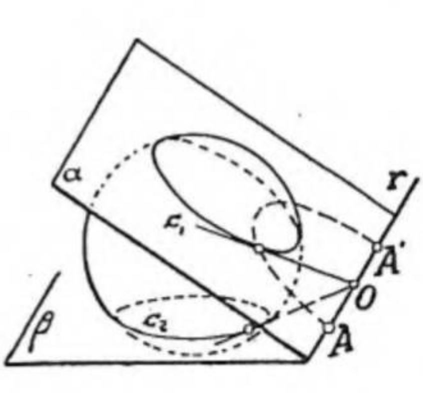
Una simple proyección estereográfica reducirá estos problemas a sus equivalentes en el plano, pudiéndose elegir el centro de proyección para que una de las circunferencias dadas (o dos si se cortan) se reduzcan en la proyección a rectas, lo que simplifica el problema.

10. *Determinación de circunferencias en la superficie esférica por condiciones de ortogonalidad.*—Resuélvanse análogamente los problemas de los enunciados del ejercicio anterior cambiando la palabra «tangente» por «ortogonal».

LECCIÓN 52.—POLARIDAD RESPECTO DE LA ESFERA

1. Puntos conjugados respecto de la esfera.—*Si dos puntos A y A′ son conjugados respecto de la circunferencia sección producida en una superficie esférica por un plano que pasa por A y A′, son también conjugados respecto de todas las secciones producidas por planos que pasan por dichos puntos.*

En efecto, si la circunferencia de diámetro AA' es ortogonal a la sección c_1 producida por el plano α, su centro O tiene respecto de c_1 la potencia OA^2; luego ésta es la potencia de O respecto de la esfera y, por tanto, respecto de otra sección c_2 por otro plano β que contiene AA', lo que prueba que también la circunferencia de diámetro AA' en β será ortogonal a c_2.



Los puntos A y A' conjugados respecto de cualquier sección de la superficie esférica producida por los planos que los contienen, se llaman *conjugados* respecto de la esfera.

Recordando lo dicho para puntos conjugados respecto de una circunferencia (lección 27, § 1), podemos enunciar:

Un punto A no perteneciente a la superficie esférica es conjugado con todos los armónicamente separados de él por los puntos de intersección con la superficie esférica de las secantes que pasan por A.

Recordando lo dicho en la lección 27, § 5:

En toda recta r no tangente a la esfera, existe una involución de puntos conjugados común a todas las secciones producidas por planos que pasan por r.

2. Plano polar de un punto.—*El lugar geométrico de los puntos conjugados de uno dado A distinto del centro, es un plano α perpendicular a la recta que une A al centro, y se llama plano polar de A.*

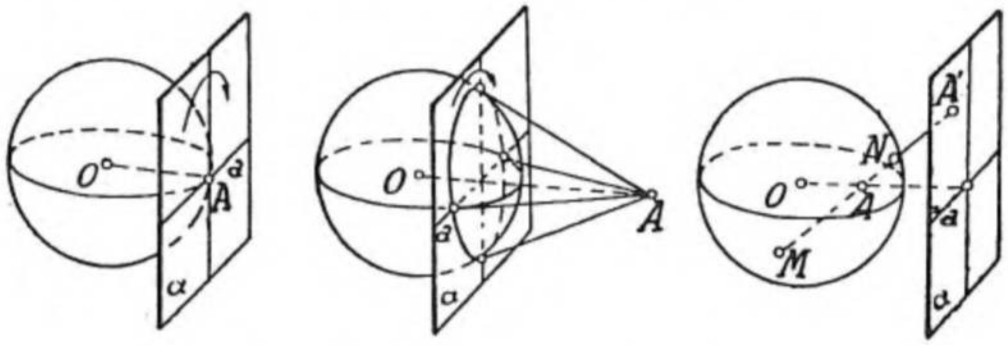
En efecto, obtenido el lugar de los puntos conjugados de A respecto de una sección diametral por OA, que es la polar de A respecto de la circunferencia máxima sección, se obtienen todas las demás girando dicha circunferencia alrededor de OA, con lo que la polar perpendicular a OA engendra el plano polar.

Por tanto:

Si el punto A pertenece a la superficie esférica, el plano polar es el tangente a la superficie en A, por contener todas las tangentes a las circunferencias máximas que pasan por dicho punto.

Si A no pertenece a la superficie esférica, el plano polar contiene los pun-

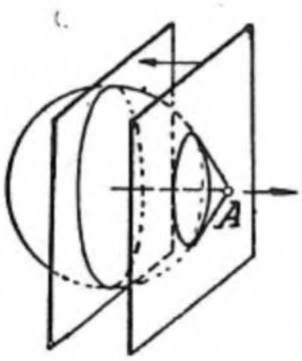
tos A' armónicamente separados de A por los M. N de intersección de la superficie con las distintas secantes a la misma por A.



Si A es exterior, el plano polar contiene también la circunferencia de contacto del cono circunscrito a la esfera por A.

El punto A se llama *polo* de su plano polar α.

Del estudio hecho en la lección 27 de las posiciones de un punto y su polar, se desprende : Si un plano es exterior, su polo es interior a la esfera ; si el plano es secante, el polo es exterior, alejándose indefinidamente cuando el plano se acerca al centro. Como el polo está constantemente en la perpendicular al plano, convendremos en decir :



El polo de un plano diametral es el punto del infinito del diámetro perpendicular.

Análogamente, si un punto se acerca al centro, su plano polar se aleja infinitamente de él. Con objeto de que a cada punto del espacio corresponda un plano polar, y uno sólo convendremos en decir :

Todos los puntos del infinito están en un plano llamado plano del infinito o impropio, que es el plano polar del centro.

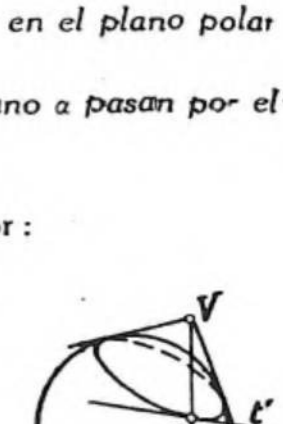
3. Polaridad recíproca.— La definición de puntos conjugados es recíproca, es decir : Si A es conjugado de A', A' lo es de A; por tanto :

Si un punto A' está en el plano polar de otro A, éste está en el plano polar del primero

De otro modo : *Los planos polares de los puntos de un plano α pasan por el polo A de α.*

4. Rectas polares.— En virtud de la propiedad anterior :

Los planos polares de los puntos de una recta intersección de dos planos α y β, pasan por la recta que une los polos A y B de dichos planos, por pasar por ambos. Las dos rectas se llaman *polares* entre sí, y, en virtud de la propiedad de la polaridad recíproca, *cada una de ellas contiene los polos de los planos que pasan por la otra.*



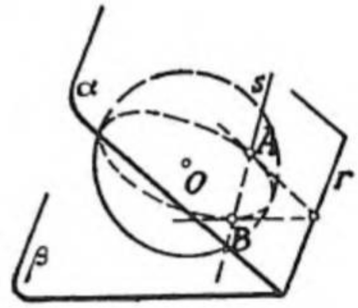
En particular :

Dos tangentes tt' a la esfera en un punto A, perpendicu-

lares entre sí, son rectas polares. Pues la circunferencia de contacto de un cono cualquiera de vértice V en t pasa por A y tiene por tangente en él a la recta t'; luego ésta está en el plano polar de V.

Si las rectas polares no son tangentes, una es secante y otra exterior y se cruzan ortogonalmente.

En efecto, la polar de una recta secante en A B (no diametral) será la recta r de intersección de los planos tangentes α y β, polares de A y B; y recíprocamente, la polar de una recta *exterior* será la que une los puntos de contacto de los planos tangentes trazados por r a la esfera.



El plano diametral por r es plano de simetría de la esfera y de r y, por tanto, de ambos planos tangentes y de sus puntos de contacto, lo que prueba que s es perpendicular a dicho plano y, por tanto, a r.

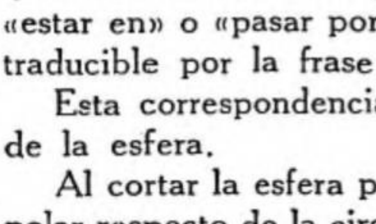
Si AB es diámetro de la esfera, los planos tangentes en estos puntos son paralelos. Diremos entonces que: *Dos planos paralelos tienen una recta impropia, o del infinito, común,* y consideraremos como *polar de un diámetro, la recta impropia común a los planos perpendiculares.*

5. Polaridad respecto de una esfera.—Dada una esfera, las propiedades anteriores permiten establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y los planos del mismo, haciendo corresponder a cada punto su plano polar y a cada plano su polo. A cada recta, como lugar de puntos, corresponderá así otra polar como arista del haz de planos polares. En esta correspondencia, toda figura compuesta de puntos, rectas y planos, tiene por homóloga otra compuesta de planos, rectas y puntos, de tal modo que toda relación de posición entre los primeros, expresable por las frases «estar en» o «pasar por», implica una relación análoga en la figura homóloga, traducible por la frase respectiva «pasar por» o «estar en».

Esta correspondencia constituye lo que se llama un *sistema polar* respecto de la esfera.

Al cortar la esfera por un plano π, queda definido en éste un sistema plano polar respecto de la circunferencia sección, en el que a cada punto corresponde como recta polar la sección de su plano polar con π.

6. Tetraedro autopolar.—Sean r y s dos rectas polares no tangentes. Elijamos, en la primera, dos puntos conjugados A y A', y otros dos también conjugados B y B' en la segunda. El tetraedro que tiene por vértices $AA'BB'$ se llama *autopolar* respecto de la esfera por tener las propiedades siguientes: *Cada vértice es polo del plano de la cara opuesta. Cada arista es polar de la opuesta.*

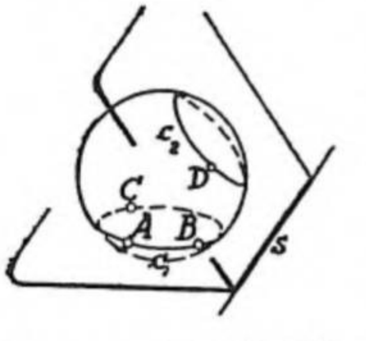


En efecto, el plano polar de A situado en r pasa por s y por A'. Análogamente el plano polar de B es rB'. Por tanto, la polar de la recta AB es la $A'B'$ común a los planos sA' y rB'.

7. Otra forma de la condición de coesfericidad de dos circunferencias.

Hemos visto en la lección 47. § 12. que: *Dos circunferencias no coplanarias con una cuerda común, son coesféricas.* En la lección 50. § 7 hemos dado una condición de coesfericidad aplicable a circunferencias no *secantes.* La teoría de la polaridad nos va a permitir dar una condición aplicable a ambos casos, exceptuando el de circunferencias tangentes.

Observemos que si los planos de dos secciones circulares no tangentes de una esfera se cortan, en la recta de intersección s hay una involución de puntos conjugados, común a ambas secciones.



Recíprocamente: Si dos circunferencias c_1 y c_2 situadas en planos secantes tienen común la involución de puntos conjugados de la recta s intersección, ambas circunferencias son coesféricas.

En efecto, tres puntos A, B, C de c_1 y un punto D de c_2 determinan una superficie esférica que contiene c_1. Cortándola por el plano Ds tendremos una circunferencia γ que tendrá con c_2 una involución común de puntos conjugados en s (por ser común con c_1), es decir, γ y c_2 tienen eje radical común en s (lección 27. § 6); y como por un punto D no existe más que una circunferencia del haz definido por c_2 y s, la circunferencia γ coincide con c_2. Resulta, pues:

Para que dos circunferencias no tangentes situadas en planos distintos no paralelos sean coesféricas, es necesario y suficiente que tengan común la involución de puntos conjugados en la recta de intersección de sus planos.

8. La noción de «puntos imaginarios» en Geometría.

Cuando una involución carece de puntos dobles, se dice en Geometría que los tiene *imaginarios* y se toma la *involución misma* como *definición de par de puntos imaginarios.* Cuando estos puntos existen, se llaman, en contraposición, *reales.*

No se trata de un modismo caprichoso, sino de un convenio de lenguaje perfectamente justificado por reflejar la similitud de propiedades existente entre los conceptos «par de puntos reales» y «par de puntos imaginarios», cómo puede verse comparando los siguientes enunciados:

El eje radical de dos circunferencias secantes es la recta que pasa por los dos puntos comunes (reales).	*El eje radical de dos circunferencias exteriores es la recta que contiene una involución de puntos conjugados común a ambas* (lección 27, § 6).

Enunciado único: *El eje radical de dos circunferencias no tangentes contiene los puntos comunes a ambas* (reales o imaginarios).

Existe una circunferencia y sólo una que pasa por tres puntos. (reales) no alineados.	*Existe una circunferencia y sólo una definida por un par de puntos imaginarios y un punto real no alineado con ellos.*

El enunciado de la izquierda sirve, pues, para incluir el de la derecha, suprimiendo la restricción (reales), es decir, ampliando el concepto de «par de puntos» en el sentido indicado.

En efecto, dar dos puntos imaginarios significa dar una recta y en ella una involución de puntos conjugados respecto de la circunferencia buscada, o, lo que es lo mismo, un haz de circunferencias ortogonales a ella cuyos diámetros son los segmentos definidos por pares de puntos homólogos en esta involución. La circunfereneia pedida será la única que pasa por el punto real dado y pertenece al haz ortogonal.

La involución de puntos dobles imaginarios se maneja, pues, en los razonamientos de modo similar al par de puntos reales, obteniendo resultados perfectamente coherentes, aun fuera del plano, como hemos visto en el párrafo anterior, en virtud del cual:

Dos circunferencias no coplanarias con dos puntos comunes reales o imaginarios son coesféricas.

Análogamente se dice que una involución de rayos sin rayos dobles define *un par de rectas imaginarias* concurrentes en el punto real vértice del haz, concepto que permite asimismo generalizar algunos enunciados de la teoría de cónicas, cuádricas, etc. (V. tomo II.)

NOTAS Y EJERCICIOS. (Sobre todo el capítulo XVI.)

1. *Centro y eje de semejanza directa en el espacio.*—Toda semejanza directa de razón k puede obtenerse como producto de una homotecia de razón positiva k que transforme un punto A en el homólogo A', por un giro alrededor de un eje e por A'. El plano perpendicular a e por el centro de la homotecia será doble en la semejanza y en él existe, por tanto, un punto doble O, centro de la semejanza en dicho plano. Repitiendo el razonamiento tomando $A \equiv A' \equiv O$, resulta: *Toda semejanza directa puede reducirse al producto de una homotecia de razón positiva por un giro alrededor de un eje que pasa por el centro de la homotecia, centro y eje que se llaman de semejanza directa.*

2. Los centros de gravedad de las caras de un tetraedro son vértices de otro tetraedro homotético. Demostración y razón de homotecia.

3. Demostrar que las circunferencias de Feuerbach de las cuatro caras de un tetraedro *ortogonal* (de aristas opuestas ortogonales; lec. 39, ej. 2.º) están en una superficie esférica.

4. Lugar geométrico de los puntos que tienen potencias asignadas p y p' respecto de dos esferas dadas.

5. Lugar geométrico de los puntos de contacto con un plano fijo de las esferas tangentes a él que pasan por dos puntos fijos.

6. Idem íd. de las esferas tangentes a una esfera fija y que pasan por dos puntos fijos.

7. Definir por analogía con lec. 50, § 6, la *ortogonalidad* entre sup. esf. y circunf.

8. Toda superficie esférica que pasa por una circunferencia ortogonal a otra superficie esférica dada le es también ortogonal. La intersección de dos superficies esféricas ortogonales a una dada es una circunferencia ortogonal a ella.

9. Hallar una circunferencia ortogonal a una superficie esférica dada que pase por dos puntos del espacio no alineados con el centro.

10. Hallar una circunferencia que pase por un punto y sea ortogonal a dos superficies esféricas dadas.

11. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias coesféricas sean ortogonales entre sí es que el plano de una de ellas contenga el vértice del cono circunscrito a lo largo de la otra. ¿Cuáles son, pues, las circunferencias ortogonales a dos fijas de una superficie esférica?

12. Demostrar que los polos esféricos de todas las circunferencias de una superficie esférica ortogonales a dos fijas c_1 y c_2 en ella, están en una circunferencia máxima perpendicular a la que contiene los centros de c_1 y c_2.

Por analogía con el plano, este lugar se llama *eje radical* de las dos circunferencias.

13. El haz ortogonal a c_1 y c_2 del ejercicio anterior se proyecta estereográficamente en el haz ortogonal a c'_1, c'_2, proyecciones de c_1, c_2; pero el eje radical de c'_1, c'_2 *no es la proyección estereográfica del eje radical de* c_1, c_2 en la esfera, sino la proyección de la polar de la arista del haz de planos que contienen las circunferencias ortogonales en la esfera.

14 Demostrar que el lugar geométrico de los puntos cuya potencia respecto de una esfera dada e, es igual al cuadrado de la distancia a un punto fijo dado P, es un plano paralelo al plano polar de P respecto de e y a distancia mitad. Se suele llamar también plano radical de P y e.

15. Trazar una superficie esférica: 1.º), que sea ortogonal a cuatro superficies esféricas dadas; 2.º), ídem a tres y que pase por un punto; 3.º), ídem a dos y que pase por dos puntos; 4.º), ídem a una esfera y que pase por tres puntos.

16 Determinar una esfera que pase por un punto dado conociendo el polo de un plano dado que no pasa por aquél.

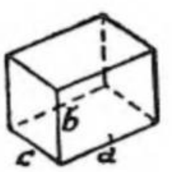
17. Trazar una superficie esférica dadas dos rectas polares y un punto.

18. Trazar una superficie esférica: 1.º) Que pase por tres puntos y sea tangente a un plano o a una esfera dada. 2.º) Que pase por dos puntos y sea tangente a dos planos, o a dos esferas o a un plano y una esfera. 3.º) Que pase por un punto y sea tangente a tres planos, a tres esferas, a dos planos y una esfera o a dos esferas y un plano. 4.º) Que sea tangente a cuatro planos, o a tres planos y una esfera, o a dos planos y dos esferas, o a un plano y tres esferas o a cuatro esferas. (Problema de Apolonio en tres dimensiones.)

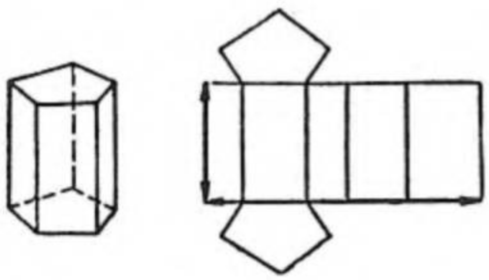
Capítulo XVII.—LAS AREAS EN EL ESPACIO

LECCIÓN 53.—CÁLCULO DE ÁREAS

1. **Area de las superficies poliédricas.**— Llámase *área de una superficie poliédrica* a la *suma de las áreas de sus caras*. De esta definición se desprende:



I. *El área de la superficie de un ortoedro de dimensiones* a, b, c, *es* 2(ab + bc + ac).



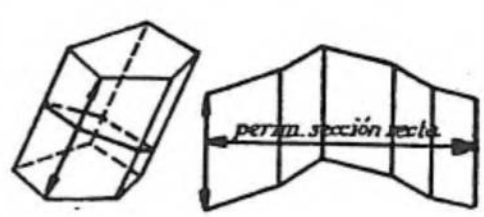
II. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual a la de un rectángulo de base igual al perímetro de la base del prisma y de altura igual a la de éste. El área de la superficie total es igual a la anterior más las áreas de las bases.*

El referido rectángulo se llama *desarrollo de la superficie lateral* por ser el *resultado de aplicar sobre el plano las caras laterales rectangulares, unidas por sus aristas comunes; el desarrollo de la superficie total* se obtiene yuxtaponiendo al anterior los polígonos de las bases.

Si el *prisma es regular*, y es p el perímetro básico y h la altura, se tendrá

Area lateral $= ph$ Area total $= p(h + a)$ (a apotema de las bases)

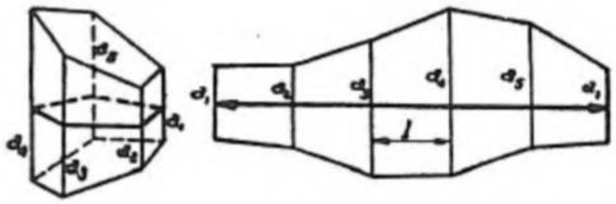
III. *El área de la superficie lateral de un prisma oblicuo es igual al producto del perímetro de su sección recta por la arista lateral.* (Las caras de superficie lateral se supondrán prolongadas, si preciso fuera, para obtener la sección recta.)



El *desarrollo* de la misma es un conjunto de paralelogramos yuxtapuestos de bases iguales a la arista lateral y cuyas alturas son los lados de la sección recta.

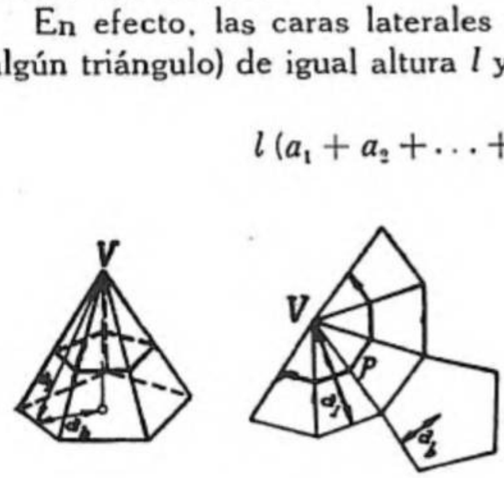
El área total se obtendrá sumando las áreas de las bases a la anterior.

IV. *El área de la superficie lateral de un tronco de prisma de sección recta regular es el producto del lado de dicha sección por la suma de las aristas laterales.* Por tanto es *equivalente a la superficie lateral de un prisma de igual sección y de arista igual a la media aritmética de las aristas del tronco.*



En efecto, las caras laterales son un conjunto de trapecios (eventualmente algún triángulo) de igual altura l y cuya suma tiene por área

$$l\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = nl\,\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

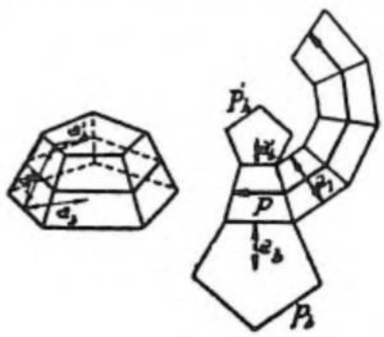


V. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro p de la base (o perímetro de la sección media) por la apotema* a_l *de la pirámide. El área total se obtendrá sumándole el área de la base* pa_b *(*a_b apotema de dicha base).

Area lateral $= pa_l$ Area total $= p(a_l + a_b)$.

Aplicando sobre un plano las caras, unidas por aristas comunes, se obtiene como desarrollo un sector poligonal regular (desarrollo de la superficie lateral) más el polígono básico.

VI. *El área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto del perímetro* p *de la sección media por la apotema* a_l *del tronco. El área total se obtiene sumándole el área de las bases.* Se tiene, pues (p_b, p'_b perímetros básicos, a_b, a'_b apotemas básicas):



Area lateral $= pa_l$

$$\text{Area total} = pa_l + \frac{1}{2}\,p_b\,a_b + \frac{1}{2}\,p'_b\,a'_b = \frac{1}{2}\,[p_b\,(a_l + a_b) + p'_b\,(a_l + a'_b)]$$

VII. El área de un poliedro regular se obtiene multiplicando el área de una cara por el número de ellas.

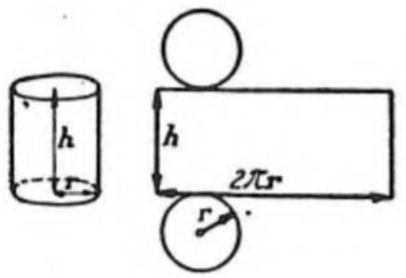
Las áreas de los restantes poliedros se obtendrán aplicando, análogamente, la definición.

2. Area de la superficie del cilindro recto circular.— Llamaremos *prisma inscrito* en un cilindro, todo aquél que tiene por base un polígono inscrito en la base del cilindro y por aristas generatrices del mismo.

Llamaremos *área de la superficie lateral de un cilindro circular recto* al límite del área de la superficie lateral de un prisma regular inscrito, cuyo número de caras laterales crece infinitamente. Llamaremos *área total* a la anterior más las de las bases.

El área lateral es, pues, el límite de ph, siendo h la altura y p el perímetro de la base del prisma cuyo límite es (lec. 31, §2) $2\pi r$ (r radio del cilindro). En resumen:

$$\text{Area lateral} = 2\pi rh \qquad \text{Area total} = 2\pi r(h+r)$$

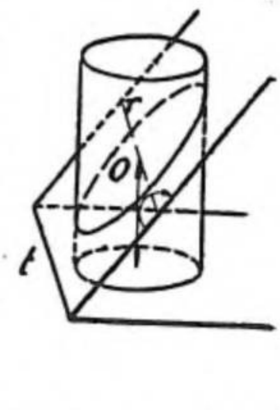


El área lateral de un cilindro recto circular es igual al perímetro de la base por la altura o generatriz.

Se llama *desarrollo* de la superficie lateral, al rectángulo de dimensiones $2\pi r$ y h, por ser el límite del desarrollo lateral del prisma.

Para un *cilindro oblicuo*, vale asimismo la definición y fórmula, sustituyendo la altura h por la generatriz g y el perímetro $2\pi r$ de la base por el perímetro p de la sección recta (área $= pg$), fórmula que no podemos aplicar, por ahora, más que en el caso de ser dicha sección una *circunferencia*, por no haber rectificado otras clases de curvas.

3. Area lateral del cilindro truncado.—Dado un *cilindro de revolución truncado*, es decir, la porción de cilindro circular recto comprendida entre un plano perpendicular al eje y otro oblicuo a él, tracemos en este último una paralela r a la base del cilindro, por el punto O de intersección con el eje. Esta recta es un eje de simetría de la superficie y del plano oblicuo y aplicando a la figura una simetría respecto de r, se completará un cilindro circular (lec. 47, § 1), cuya superficie lateral estará formada por las superficies laterales del cilindro truncado dado y de su simétrico, superficies que son iguales entre sí y, por tanto, de área mitad que la lateral del cilindro completo. Por tanto, diremos

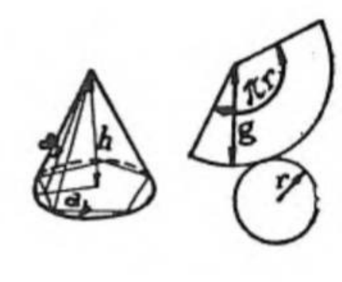


El área lateral de un cilindro truncado de revolución es igual a la de un cilindro recto de igual base y cuya altura es la porción del eje comprendida entre la base y la sección oblicua.

4. Area de la superficie del cono circular recto.— Llamaremos *pirámide inscrita* en un cono circular, toda aquélla que tiene por base un polígono inscrito en la base del cono y cuyas aristas sean generatrices del mismo.

Llamaremos *área de la superficie lateral de un cono recto circular* al límite del área de la superficie lateral de una pirámide regular inscrita, cuyo número de caras crece infinitamente, y área total al resultado de sumar al área lateral el área de la base.

Hay que calcular, pues, el límite de pa_l donde p (semiperímetro básico) tiene por límite πr (r radio básico del cono), y a_l apotema lateral $= \sqrt{h^2 + a_b^2}$ tiene por límite $\sqrt{h^2 + r^2} = g$ (generatriz) por tanto:



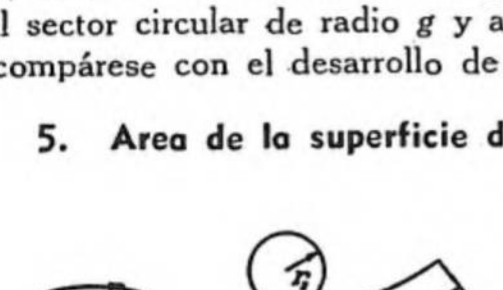
Area lateral $= \pi r g = 2\pi \rho g$ (ρ radio de la sección media).

Area total $= \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

El área lateral de un cono recto circular es igual al producto de la generatriz por el semiperímetro de la base (o por el perímetro de la sección media).

Se llama *desarrollo* de la superficie lateral del cono, al sector circular de radio g y arco de longitud $2\pi r$ igual al perímetro básico (compárese con el desarrollo de la superficie lateral de la pirámide).

5. Area de la superficie del tronco de cono circular.—Análogamente se define y calcula el área lateral y total del tronco de cono circular, obteniéndose como área lateral la diferencia del área lateral de los conos total y deficiente, con los resultados siguientes:

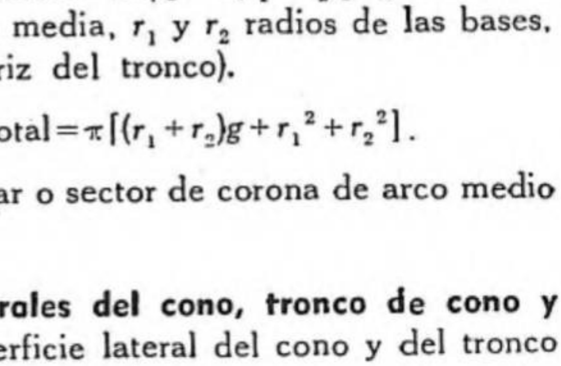


Area lateral $= 2\pi\rho g = \pi(r_1 + r_2)g$ (ρ radio de la sección media, r_1 y r_2 radios de las bases, g generatriz del tronco).

Area total $= \pi[(r_1 + r_2)g + r_1^2 + r_2^2]$.

El desarrollo lateral es un trapecio circular o sector de corona de arco medio $2\pi\rho$ y anchura g.

6. Otra expresión de las áreas laterales del cono, tronco de cono y cilindro.—Podemos dar al área de la superficie lateral del cono y del tronco de cono otra expresión que nos será muy útil para calcular el área de la superficie esférica. Llamemos m al segmento de mediatriz de g comprendido entre la generatriz g y el eje. Los segmentos m y ρ (radio medio) son hipotenusa y cateto de un triángulo rectángulo semejante al que tiene cateto h (altura) e hipotenusa g (lados perpendiculares), por tanto $\rho : m = h : g$, de donde $\rho g = hm$, y sustituyendo en la expresión del área lateral

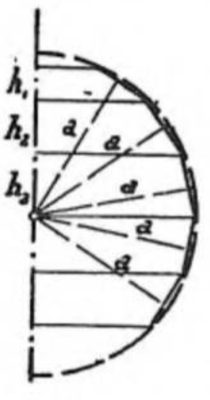


Area lateral $= 2\pi m \cdot h$.

El área lateral de un cono o de un tronco de cono es igual al producto de su altura h *por la longitud de una circunferencia de radio igual al segmento de mediatriz de la generatriz comprendida entre ésta y el eje.*

La fórmula puede extenderse al cilindro, observando que en él es $m = \rho$ y $g = h$

7. Area de la superficie engendrada por la rotación de una línea poligonal regular alrededor de un eje no secante que pasa por su centro.— Llamaremos línea poligonal *regular* a toda línea quebrada formada por cuerdas iguales de una circunferencia. Llamaremos *apotema* de la línea, a la distancia común del centro a sus lados. Llamaremos proyección h de la línea sobre un eje, a la suma $h_1+h_2...+h_n$ de las proyecciones de sus lados.

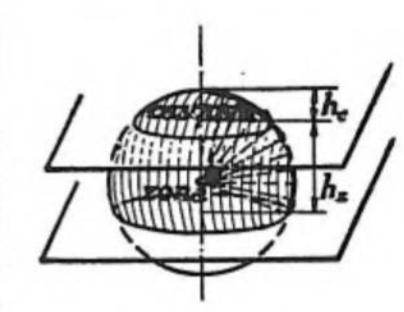


Si hacemos girar una poligonal regular alrededor de un eje no secante que pase por su centro, sus lados engendrarán un conjunto de superficies laterales de troncos de cono (cono si un vértice está en el eje) o de un cilindro si el lado correspondiente es paralelo a él. Como para todas estas superficies vale la fórmula demostrada en el párrafo anterior y el segmento de medlatriz de todos los lados comprendidos entre ellos y el eje es igual a la apotema a, resulta

$$\text{Area engendrada}=2\pi a(h_1+h_2+\ldots+h_n)=2\pi a\ .\ h$$

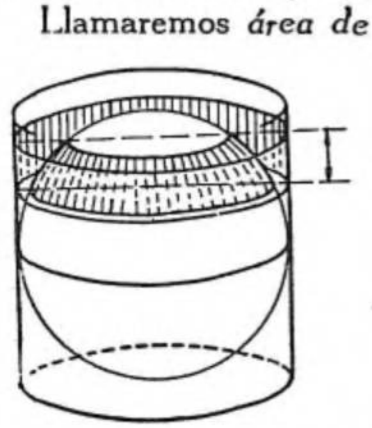
El área de la superficie engendrada por el giro completo de una línea polilígonal regular alrededor de un eje coplanario no secante que pasa por su centro, es igual al producto de su proyección h *sobre el eje, por la longitud de la circunferencia tangente a sus lados.*

8. Area del casquete, de la zona y de la esfera.—Llámase *casquete esférico* a la porción de superficie esférica situada en cada uno de los semiespacios determinados por un plano secante. El casquete es *hemisferio* cuando el plano secante es diametral.



Llámase *zona esférica* a la porción de superficie esférica comprendida en una zona de espacio limitado por dos planos secantes paralelos. Lo mismo el casquete que la zona pueden suponerse engendrados por el giro de un arco de circunferencia máxima alrededor de un diámetro perpendicular a los planos secantes que los definen, arco cuya proyección sobre el eje se llama *altura* de la zona o del casquete.

Llamaremos *área de un casquete, de una zona esférica o de la superficie esférica,* al límite del área de la superficie engendrada por una línea poligonal regular inscrita en el arco o la semicircunferencia generatrices al crecer infinitamente el número de sus lados.



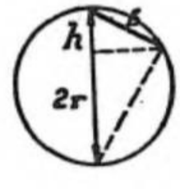
Tomando el límite de la expresión del área de la superficie obtenida en el párrafo anterior, resulta (r, radio, h altura de la zona o del casquete).

$$\text{Area del casquete o de la zona}=2\pi rh,$$

y en el caso de la superficie esférica completa $h=2r$.

$$\text{Area de la superficie esférica}=4\pi r^2.$$

Estos resultados se recuerdan fácilmente con la interpretación que indica la figura anterior. *El área de un casquete o zona es igual a la de la banda de un cilindro circunscrito a la esfera, de generatrices perpendiculares a sus bases y comprendida entre los planos de éstas. El área de la esfera es igual a la lateral del cilindro circunscrito.*



En el caso del casquete se tendrá también (fig.) $2r \cdot h = s^2$ (s cuerda del arco generador); de donde: *El área del casquete es igual a la de un círculo πs^2 de radio igual a la cuerda del arco generador.*

9. Areas de superficies semejantes.—*La razón entre las áreas de dos superficies semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.*

Si se trata de dos superficies poliédricas, el teorema es evidente, puesto que los polígonos de las caras son respectivamente semejantes en la misma razón y verifican, por tanto, lo dicho en el § 8 de la lección 28.

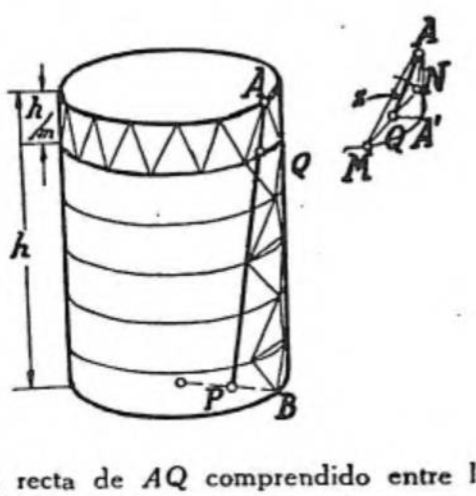
Si se trata de superficies curvas, basta observar que *todas las fórmulas de las áreas vienen dadas por productos de* DOS *longitudes* y que longitudes *homólogas* en figuras semejantes están entre sí en la razón de semejanza.

NOTA

SOBRE LA DEFINICIÓN DE ÁREA DE UNA SUPERFICIE CURVA. PARADOJA DE SCHWARZ.—Según lección 31, § 2, podemos definir la longitud de una circunferencia como el «límite de la longitud de una línea poligonal inscrita de lados iguales, cuando éstos tienden a cero», límite cuya existencia se demostró. La intuición parece admitir, a primera vista, como impecable esta definición similar: «llamaremos área de la superficie lateral de un cilindro al límite del área de una superficie poliédrica inscrita de caras iguales, cuando éstas tienden a cero». Parece obvio aclarar que entendemos por superficie poliédrica inscrita, toda aquella cuyos vértices están en la superficie.

Pues bien, vamos a demostrar que *tal límite no existe si no se especifica la forma en que tienden a cero las referidas caras.*

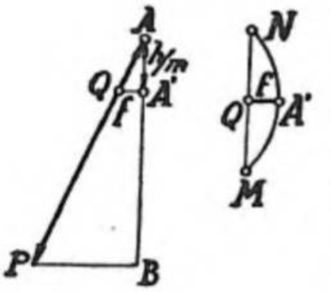
Dividamos, para ello, esta superficie en m fajas iguales por planos paralelos a las bases; inscribamos en cada circunferencia sección un polígono regular de n lados y coloquemos cada polígono girado, respecto del inmediato anterior, de la mitad del ángulo central, de modo que cada vértice equidiste de los extremos del lado inmediato del polígono siguiente (anterior) determinando con él un triángulo isósceles (AMN de la figura). Consideremos la superficie poliédrica formada por el conjunto de todos estos triángulos isósceles iguales.



Las áreas de los inscritos en cada faja tienen por suma $p \cdot s$, donde p es el perímetro del polígono y $s = AQ$, la altura común de estos triángulos isósceles. La suma de todos ellos será, pues, $pms = p \cdot \overline{AP}$, donde $\overline{AP} = ms$, es el segmento de la recta de AQ comprendido entre las bases del cilindro.

Ahora bien, supongamos que n y m tienden a infinito, *sin imponer otra condición.* Las caras tenderán a cero y su suma deberá tender a $\lim p \cdot \lim \overline{AP} = 2\pi r \cdot \lim \overline{AP}$.

Pero, ¿existe límite de $\overline{AP}$? La inclinación de este segmento viene determinada por la relación que existe entre la altura h/m de cada faja y la *flecha* del polígono regular o diferencia entre el radio y la apotema.



Se comprende que para cada flecha f, es decir, para cada valor de n es posible hacer m suficientemente grande para que la relación $\frac{h}{m} : f$ y, por tanto, el ángulo AQA' sea tan pequeño como se quiera. Por consiguiente, el ángulo complementario PAB puede hacerse, para cada n, tan próximo a 90° como se quiera, dando a m valores suficientemente grandes. Podemos, pues, hacer crecer m y n infinitamente (con lo que tenderán a cero las caras de la superficie), de modo que $\overline{AP}$ tienda a infinito y, por tanto, no es aplicable la definición propuesta (*).

Se comprende, pues, cuán delicada es la noción de área de una superficie curva. Su definición *general* rigurosa suele darse en Cálculo integral. Las definiciones especiales dadas en esta lección para las áreas de las superficies cilíndrica y cónica de revolución, han ido seguidas del cálculo efectivo de los límites que las definían y, por tanto, de la demostración de su existencia.

EJERCICIOS

1. Expresar el área de los poliedros regulares en función de la arista.

2. Un tejado cubre un rectángulo de 10×12 m. y está formado por dos triángulos y dos trapecios de igual inclinación sobre el plano horizontal. Calcular la superficie del tejado en función de la altura h de la arista superior sobre el borde inferior. Caso en que la inclinación sea de 30°.

3. Demostrar que el plano bisector de un diedro de un tetraedro divide la arista opuesta en segmentos proporcionales a las áreas de las caras que concurren en sus extremos.

4. Dividir la superficie lateral de una pirámide o cono en n partes equivalentes mediante planos paralelos a la base.

5. Calcular el área de un ortoedro de aristas proporcionales a 1: 2: 3 sabiendo que su diagonal es igual a 1 metro.

6. La altura de una pirámide regular de base cuadrada es 20 cm.; su área total es de 9 dm^2; calcular sus aristas.

7. Una pantalla troncocónica de diámetro inferior 30 cm., superior 6 cm. y altura 9 cm., pesa 1 kg.; calcular el peso por m^2.

8. Con un sector de 270° y radio = 10 cm. se ha construído una superficie cónica de revolución. ¿Cuál es su altura, diámetro y área?

9. Obsérvese cómo se hacen los filtros cónicos, doblando dos veces un círculo de papel (la superficie queda formada por un cuadrante liso y tres superpuestos). ¿Qué relación hay entre el diámetro de la base y la arista?

10. Area teórica del casquete de superficie terrestre (supuesta esférica) visible desde un punto de altura h sobre el nivel del mar. Aplicación a un avión volando sobre el mar a 3.000 m. de altura. [Radio terrestre, según la definición de metro.]

11. Formulamos la siguiente regla práctica en relación con el problema anterior: Para ver una extensión de N km^2 hay que elevarse a una altura de N: 40 metros. Demostrar que para las alturas corrientes de vuelo (<6.000 m.) el error relativo de esta fórmula es <0,001

V. más ejercicios al final del capítulo.

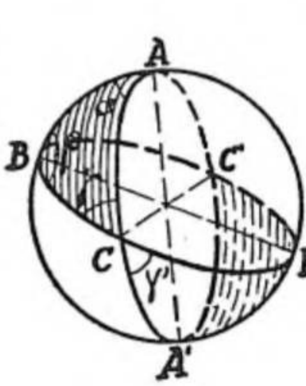
(*) Condicionando convenientemente las leyes de crecimiento simultáneo de m y n se pueden obtener límites finitos diferentes. Por ejemplo, haciendo constantemente $m=n$, el límite del área poliédrica es el área lateral conocida $2\pi rh$; haciendo $m=2kn^2$ resulta límite $=2\pi r\sqrt{h^2+4k^2r^2\pi^4}$, etc.

LECCIÓN 54.—AREAS DE POLÍGONOS ESFÉRICOS. NOCIÓN DE ÁNGULO SÓLIDO

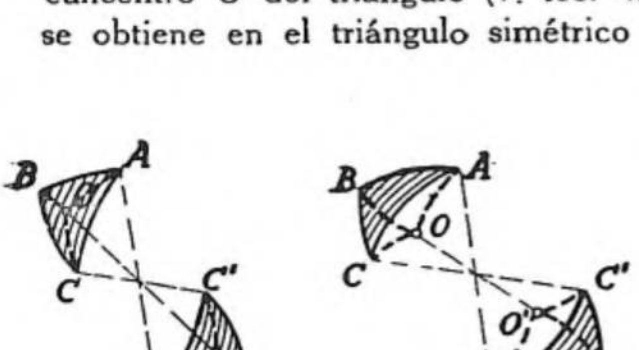
1. Area de un huso.—Convendremos en definir como área de un huso de un grado la 1/360 parte del área de la superficie esférica, y como área de un huso de n grados, el producto por n del área del huso de un grado. O sea

Area de un huso de amplitud n grados$=\dfrac{\pi r^2\ n}{90}=2r^2\alpha$ (α amplitud en radianes).

2. Area de un triángulo esférico.—Las circunferencias máximas de los lados de un triángulo esférico ABC forman tres husos de amplitudes respectivas los ángulos α, β, γ de dicho triángulos; sustituyamos uno de estos husos por su opuesto $\gamma'=\gamma$. Los tres husos α, β, γ' completan (v. figura) un hemisferio (el delantero de la figura), en el que el triángulo ABC se ha cubierto dos veces, más el *triángulo simétrico* $A'B'C'$ cubierto una vez, como parte del huso γ' situada en el otro hemisferio.



Ahora, todo triángulo ABC puede ser descompuesto en suma (suma y diferencia) de tres triángulos isósceles OAB, OBC, OCA, uniendo sus vértices con el circuncentro O del triángulo (v. lec. 48 § 8), con lo que se obtiene en el triángulo simétrico $A'B'C'$ una descomposición análoga en tres triángulos $O'A'B'$, $O'B'C'$, $O'C'A$ simétricos de los anteriores y, por tanto, respectivamente, congruentes con ellos (lección 48, § 3). Parece, pues, natural enunciar:



Dos triángulos simétricos tienen igual área.

Las áreas de los tres husos determinados por los ángulos de un triángulo esférico suman un hemisferio más dos veces el área S de dicho triángulo.

Es decir:

$$\frac{\pi r^2}{90}(\alpha+\beta+\gamma)=2\pi r^2+2S$$

donde α, β, γ son las amplitudes de los ángulos medidas en grados.

El área de un triángulo esférico viene, pues, dada por la fórmula

$$S=\frac{\pi r^2}{180}(\alpha+\beta+\gamma-180)=\frac{\pi r^2\varepsilon}{180},\qquad \varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180$$

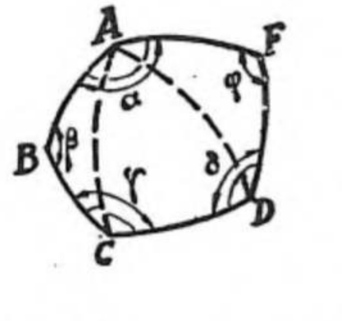
donde ε, medida en grados, es el llamado *exceso esférico del triángulo o diferencia entre la suma de sus ángulos y un ángulo llano.*

Si se toma como unidad de áreas, en la superficie esférica, el área del cuadrante de esfera πr^2 y se mide el exceso en ángulos llanos $\varepsilon' = \varepsilon/180$, *el área del triángulo es igual a la medida del exceso.* De otro modo: *El área de un triángulo esférico es a la del círculo máximo, como el exceso esférico es a un llano.*

Por último, *si se toma como unidad de área el cuadrado* r^2 *construído sobre el radio, el área del triángulo esférico es igual a la medida del exceso en radianes* $\varepsilon_r = \dfrac{\pi\,\varepsilon}{180}$, o sea ($\alpha'$, β', γ' en radianes):

$$S = r^2(\alpha' + \beta' + \gamma' - \pi)$$

3. Area de un polígono esférico.—Definiremos, finalmente, como *área de un polígono esférico* el número que resulta descomponiéndolo en triángulos y sumando los áreas de éstos (v. Nota.)



Así, por ejemplo, si se trata de un n-gono convexo, podemos descomponerlo en $n-2$ triángulos mediante diagonales que parten de un vértice A y al sumar los excesos (en radianes) asociando los ángulos en cada vértice se obtiene

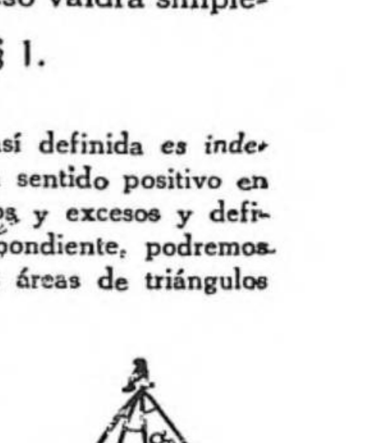
$$\text{Area} = r^2[\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varphi - (n-2)\pi].$$

Seguiremos llamando *exceso esférico* a la diferencia entre la suma de los ángulos $\alpha + \beta + \ldots + \varphi$ del polígono y $n-2$ llanos, es decir, el exceso de la suma de los ángulos del n-gono esférico sobre la de un n-gono plano. Por tanto: *El área de un polígono esférico es tantos cuadrados* r^2 *como indica el exceso esférico del polígono en radianes.*

La fórmula es incluso aplicable a un huso, es decir, a la figura limitada por dos semicircunferencias máximas (polígono de dos lados), pues entonces $n-2=0$ y si α es en radianes el valor común de sus dos ángulos, el exceso valdrá simplemente 2α y el área será $2r^2\alpha = \dfrac{2\pi r^2 n}{180}$, que concuerda con § 1.

NOTA.—No es difícil demostar que el área de un polígono esférico así definida *es independiente de la forma de descomposición en triángulos.* Asignando un sentido positivo en la superficie esférica (lección 48, § 6), es decir, a sus ángulos, triángulos y excesos y definiendo el área de un triángulo mediante el exceso con su signo correspondiente, podremos sumar algebraicamente estas áreas, como sumábamos algebraicamente las áreas de triángulos planos en la lección 28 y llegar a idénticas consecuencias a las del § 3 de dicha lección, sin más que demostrar la validez en la superficie esférica de la proposición II (la I es innecesaria).

Descomponiendo un triángulo esférico ABC *en triángulos parciales mediante arcos de círculo máximo concurrentes en un vértice* A, *la suma de los excesos de estos triángulos recorridos en sentido positivo es igual al exceso del triángulo* ABC.



En efecto (figura), sumando los excesos en los triángulos ABD_1, AD_1D_2, AD_2C y agrupando los sumandos $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha$, $\delta_1+\delta_2=\pi$, $\delta_3+\delta_4=\pi$, resulta:

Suma de excesos $= \alpha+\beta+\pi+\pi+\gamma-3\pi = \alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Mediante esta proposición podemos enunciar y demostrar, para los triángulos y polígonos esféricos, proposiciones idénticas a las de la lección 28, § 3, repitiendo los razonamientos allí desarrollados (evitando solamente situar el punto O del enunciado III o de su equivalente para polígonos, en el triángulo o polígono simétrico), con lo que resulta:

Si se descompone de cualquier modo un triángulo en triángulos parciales, la suma de los excesos (y, por tanto, de las áreas) de dichos triángulos recorridos en sentido positivo es igual al exceso (y, por tanto, al área) del triángulo total recorrido en igual sentido.

El área de un polígono esférico (convexo o cóncavo) *definida como suma de las áreas de los triángulos en que se ha descompuesto es independiente del modo de descomposición.*

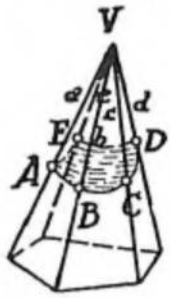
Las áreas de polígonos esféricos iguales, son iguales.

Si un polígono es suma de dos, su área es suma de las áreas de estos dos.

Estas propiedades, válidas también para polígonos de dos lados (husos), justifican todas las definiciones anteriores (§§ 1 y 2), que implican un reconocimiento tácito de ellas.

4. Noción de ángulo sólido.—Todo anguloide queda cortado por una esfera de centro en su vértice, según un polígono esférico, de tal modo que: A anguloides iguales (congruentes o pseudocongruentes) corresponden polígonos esféricos iguales

Si un anguloide se descompone en suma de dos yuxtapuestos por caras planas interiores, el polígono esférico correspondiente se descompone análogamente en suma de los polígonos esféricos correspondientes a aquéllos.



Podemos, pues, considerar los anguloides como magnitudes absolutas proporcionales a los polígonos esféricos (absolutos) que interceptan en una superficie esférica de centro en su vértice, y medir aquéllos por la medida de éstos.

Se llama ángulo sólido de un anguloide, el área del polígono esférico interceptado por él en una superficie esférica de radio unidad con centro en su vértice.

De aquí resulta:

El ángulo sólido de un anguloide de n *caras (o aristas) es igual a la suma de sus diedros, medida en radianes, menos* $(n-2)\pi$, que se llama asimismo *exceso* del anguloide.

En particular, para un triedro *abc* ángulo sólido$=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ (α, β, γ medidas de los diedros en radianes).

La definición se generaliza a un *cono* y, en general, a toda porción de espacio limitada por superficies cónicas. Así el *ángulo sólido de un cono* de revolución es el área del casquete interceptado por él en una superficie esférica de vértice en el centro y radio unidad.

Esta noción es de la máxima importancia y aplicación en electrotecnia, mecánica, luminotecnia, etc.

5. Suma de los ángulos sólidos de un poliedro.— Hemos dicho que el ángulo sólido en cada vértice de un poliedro vale la suma de las medidas en radianes de sus diedros más $2\pi-n\pi$ (n número de aristas que en él concurren). Al sumar todos los ángulos sólidos se repetirá cada diedro dos veces, por pertenecer cada arista a dos anguloides, de modo que, si es v el número de vértices y a el de aristas,

Suma de ángulos sólidos$=$doble suma de diedros$+2\pi v-2a\pi$.

Abreviadamente:

$$\Sigma \text{ ángulos sólidos} = 2\Sigma \text{ diedros} + 2\pi(v-a)$$

y para poliedros eulerianos.

$$= 2\Sigma \text{ diedros} + 4\pi - 2\pi c \quad (c = \text{número de caras}).$$

NOTA

DEMOSTRACIÓN MÉTRICA DEL TEOREMA DE EULER.—La sustitución de $2\pi(v-a)$ por $4\pi-2\pi c$ tienen una interpretación geométrica muy sencilla, que se puede obtener directamente supuesto desconocido el teorema de Euler. Supongamos, para fijar las ideas, un poliedro convexo. Proyectemos sus caras desde un punto interior y sumemos los ángulos sólidos de los anguloides obtenidos de m_i caras cada uno (tantas como lados de la cara proyectada). Agrupando los ángulos diedros alrededor de cada arista común (habrá tantas como vértices), se tendrá en radianes:

$$\text{Suma de excesos} = 2\pi v - \Sigma\pi(m_i-2) = 4\pi \quad (\text{superficie esférica completa}).$$

Pero $\Sigma m_i = 2a$ doble del número de aristas, por pertenecer cada una a dos caras, de donde

$$2\pi v - 2a\pi + 2\pi c = 4\pi \qquad \text{o sea} \qquad 2\pi(v-a) = 4\pi - 2\pi c.$$

Dividiendo por 2π queda $v-a+c=2$.

Se obtiene así una demostración métrica del teorema de Euler para poliedros convexos, independiente de la conocida (lección 27). Es preferible, sin embargo, aquella demostración a ésta, por no exigir más recursos que los estrictamente indispensables. El teorema de Euler no es una propiedad *métrica*, sino *topológica*, es decir, *invariante* en un grupo de transformaciones (biunívocas y bicontinuas) mucho más amplio que el grupo de los movimientos, semejanzas y simetrías que caracterizan las propiedades métricas.

EJERCICIOS

(relativos todos al capítulo XVII)

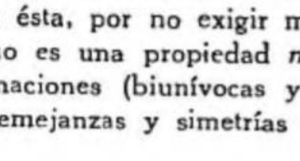
1. Una caldera de vapor consta de 180 tubos de 6 cm. de diámetro y 4 metros de longitud. Calcular la superficie de calefacción que constituyen.

2. Calcular el área del casquete polar terrestre.

3. Para construir un altavoz troncocónico de 1 m. de longitud y diámetros 50 cm. y 10 cm., ¿qué superficie de chapa se necesita? ¿Qué amplitud y qué radios daremos al sector del desarrollo?

4. Para niquelar una partida de mil campanillas en forma de casquete esférico interesa calcular su superficie. Datos: diámetro de la base, 8 cm.; altura, 3 cm. (Se desea niquelar solamente la cara externa.)

5 Razón que existe entre las áreas de una superficie esférica, la del cilindro circunscrito y la del inscrito homotético de éste.



6. Idem íd. sustituyendo cilindro por cono equilátero.

7. La superficie de ajuste de una válvula es troncocónica de diámetros $CD=40$ mm, $AB=32$ mm. y altura 4 mm. Calcular la carrera de la válvula para que la superficie troncocónica comprendida entre la circunferencia menor AB de la misma y la mayor CD del orificio de ajuste sea de 8 cm^2.

8. Para pintar exteriormente la campana de un gasómetro interesa calcular su superficie, suponiéndola cilíndrica, rematada por un casquete esférico de las siguientes dimensiones: diámetro del cilindro=35 m.; la altura de la parte cilíndrica, 20 m.; altura total, 30 m.

9 Una caldera de forma cilíndrica, terminada por dos hemisferios de igual radio que el cilindro, tiene una superficie total de 6 m^2. Calcular las dimensiones, sabiendo que el largo es triple que el ancho.

10. Calcular la superficie de un huso horario terrestre.

11. Una papelera adaptable a un rincón de habitación tiene 2 kg. de peso y forma de un cuadrante de cono; es decir, está construída soldando por un cateto dos triángulos iguales y añadiendo la cuarta parte de una superficie cónica para unir sus hipotenusas. Los catetos de los triángulos se hallan en la relación 1 : 3. Calcular las dimensiones, sabiendo que el peso por m^2 de la plancha de que está hecha es de 6 kg.

12. Dividir una superficie esférica en n partes de igual área por un sistema de planos paralelos.

13. Lugar geométrico de los vértices C de un triángulo esférico ABC de base fija AB y de área constante.

14. Valor del ángulo sólido correspondiente a un cono equilátero.

15. Idem de un cono cuya abertura es de 120°, 90°, 45°, 30°.

16. Idem íd. sabiendo que la relación entre el diámetro de la base y la generatriz es $m:n$.

17. Dividir la superficie total de una pirámide regular de base cuadrada en tres partes equivalentes mediante planos que pasan por una arista lateral.

18. Inscribir en una esfera un cono cuya área lateral sea igual a la del casquete esférico que limita en la superficie esférica.

19. Cortar una esfera por un plano tal que el área de la sección sea igual a la diferencia de los dos casquetes en que este plano divide a la superficie esférica.

20. Todas las superficies esféricas que pasan por el centro de una esfera fija tienen en su interior un casquete cuya área es la misma para todas ellas.

21. Todas las superficies esféricas que pasan por el centro de una esfera hueca (limitada por dos superficies esféricas concéntricas) interceptan en ella zonas de igual área.

22. Calcular las dimensiones de un cilindro inscrito en una esfera y cuya área sea una fracción conocida m/n del área de la superficie esférica.

23. Demostrar que el área de un polígono esférico, medida en círculos máximos, es igual a 2 menos el perímetro del polígono polar medido en ángulo llanos.

TEOREMA DE GULDIN.

En cálculo integral se demuestra que: *El área de la superficie engendrada por el giro completo de una línea plana, es igual al producto de la longitud de la misma por la circunferencia descrita por su centro de gravedad.*

(Compruébese en la superficie lateral del cilindro, cono y tronco de cono.)

24. Aplíquese el teorema de Guldin para calcular el área de la superficie del toro.

25. Aplíquese el teorema de Guldin para calcular el área de la superficie descrita por la rotación completa de un polígono regular (por ejemplo, triángulo equilátero o cuadrado) alrededor de un eje de su plano situado a distancia conocida de su centro.

26. Aplíquese el teorema de Guldin recíprocamente para calcular la posición del centro de gravedad de una semicircunferencia.

27. Idem de un cuadrante de circunferencia.

28. Area engendrada por un cuadrante de circunferencia de radio r al girar n grados alrededor de una tangente en un extremo.

RELACIONES ENTRE DIEDROS Y ÁNGULOS SÓLIDOS DE LOS POLIEDROS REGULARES

29. Llamando, por analogía al plano, suplemento de un ángulo sólido a lo que le falta para valer un hemisferio, demostrar:

La razón entre los suplementos del diedro y del ángulo sólido de un poliedro regular es racional e igual a la razón entre el número de vértices y el doble del número de aristas.

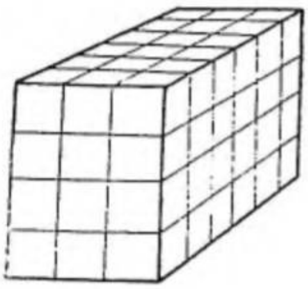
30. Llamando σ_n y δ_n al ángulo sólido en un vértice y al diedro (radianes) en una arista de un poliedro regular de n caras, demostrar las relaciones:

$$\sigma_4=3\,\delta_4-\pi; \qquad \sigma_8=4\,\delta_8-2\pi; \qquad \sigma_{12}=3\,\delta_{12}-\pi; \qquad \sigma_{20}=5\,\delta_{20}-3\pi; \qquad 4\,\sigma_6+3\,\sigma_8=2\pi$$

Capítulo XVIII.—LOS VOLUMENES

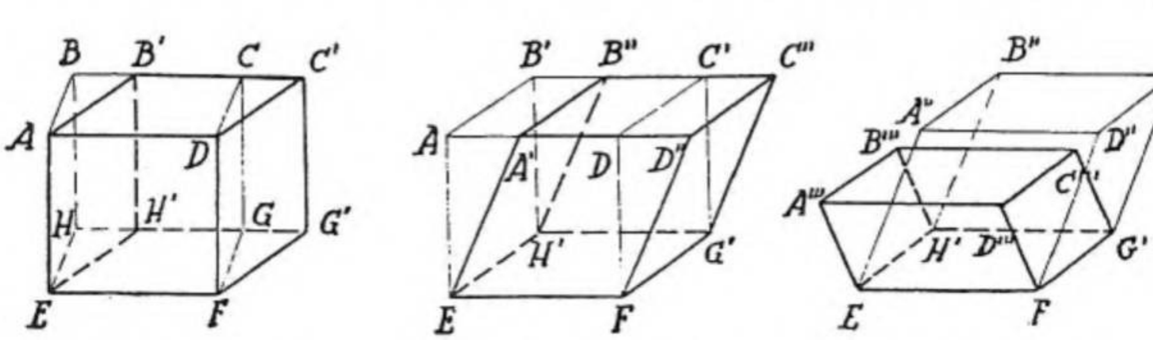
LECCIÓN 55.—LOS VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS

1. Repaso y crítica del cálculo elemental de volúmenes de poliedros.— En el sistema métrico se adopta como unidad de volumen el del *cubo de lado unidad*. Un ortoedro de dimensiones enteras contendrá tantos cubos unidad como indica el producto de dichas dimensiones. Si las medidas de sus lados no son enteras, los mismos razonamientos efectuados en Geometría plana (lec. 28) para justificar la regla del área del rectángulo conducen a admitir la conocida regla del ortoedro:



El volumen de un ortoedro es el producto de las medidas de sus tres lados. Considerando el rectángulo definido por dos de ellos como base y el tercero como altura: *El volumen de un ortoedro es igual al producto del área de la base por la medida de su altura.*

De un ortoedro se pasa a paralelepípedos de base equivalente e igual altura por adiciones y sustracciones de poliedros congruentes como indican las figuras.



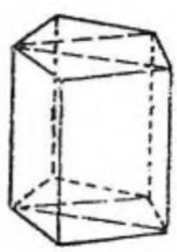
{ ABCDEFGH <> <>AB'C'DEFG'H'
+ DCC'FGG'
− ABB'EHH'

{ AB'C'DEFG'H' <> <>A''B''C''D''EFG'H'
+ FDD''G'C'C''
− EAA''H'B'B''

{ A''B''C''D''EFG'H' <> <>A'''B'''C'''D'''EFG'H'
+ FD'''D''EA'''A''
− G'C'''C''H'B'''B''

Con esto se justifica la regla del paralelepípedo:

El volumen de un paralelepípedo es igual al producto del área de la base por la medida de la altura.



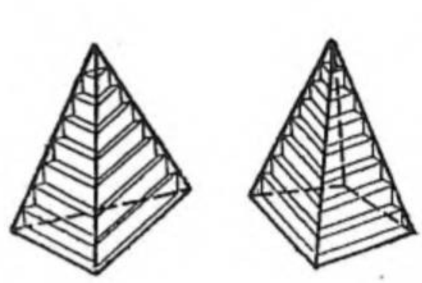
Descomponiendo un paralelepípedo en dos prismas simétricos por un plano diagonal se obtiene:

El volumen de un prisma triangular es igual al producto del área de la base por la medida de la altura.

Descomponiendo un prisma cualquiera en prismas triangulares mediante planos diagonales y sumando los volúmenes de éstos, para lo cual se saca la altura factor común de la suma de las bases, que es la del prisma, resulta finalmente :

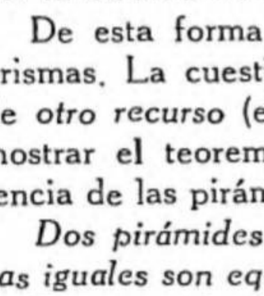
El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto del área de la base por la medida de la altura.

De esta forma se calculan en Geometría elemental los volúmenes de los prismas. La cuestión se complica para las pirámides, y hay que echar mano de *otro recurso* (el del *paso al límite*) para demostrar el teorema fundamental de la equivalencia de las pirámides :



Dos pirámides de bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes.

La conocida demostración, que no detallaremos por brevedad, consiste en inscribir en una y otra pirámides *escaloides* de igual número de estratos prismáticos, respectivamente de igual altura y bases equivalentes. Los volúmenes de dichos escaloides son iguales entre sí por serlo los de los estratos que los constituyen. Los límites de dichos volúmenes, que son los de las pirámides, cuando tiende a cero la altura de dichos estratos, son, pues, iguales.

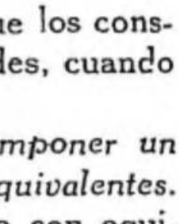


Con este nuevo recurso es fácil ya *descomponer un prisma triangular en suma de tres tetraedros equivalentes.*

En efecto : los tetraedros 1 y 3 de la figura son equivalentes, pues pueden tomarse como bases respectivas las del prisma triangular y como altura h la de éste. Los tetraedros 2 y 3 son también equivalentes, pues pueden imaginarse con vértice común en A y con bases en los triángulos coplanarios iguales BDE y BDC. Luego, los tres tetraedros son equivalentes y cada uno de ellos tendrá por volumen 1/3 del prisma, de donde :

El volumen de un tetraedro es 1/3 del producto del área de una cara tomada como base por la medida de la altura correspondiente.

Finalmente, para hallar el volumen de un poliedro se descompone en tetraedros y se suman los volúmenes de éstos. En particular :



Descomponiendo una pirámide cualquiera en tetraedros mediante planos diagonales por el vértice V y sumando los volúmenes de éstos resulta :

El volumen de una pirámide es igual a 1/3 del producto del área de la base por la medida de su altura.

Tal es, a grandes rasgos, el proceso seguido en la Geometría elemental clásica para el cálculo de los volúmenes de los poliedros. Pero en la diversidad de recursos puestos en juego en tal proceso, se está haciendo uso tácito y constante de los principios siguientes :

Elegido el cubo unidad: A cada poliedro y a todos sus congruentes corresponde un número, y sólo uno, que llamamos volumen.

Si un poliedro es suma de dos o más, el volumen es igual a la suma de los volúmenes de aquéllos. A poliedros ordenados de mayor a menor, corresponden volúmenes igualmente ordenados.

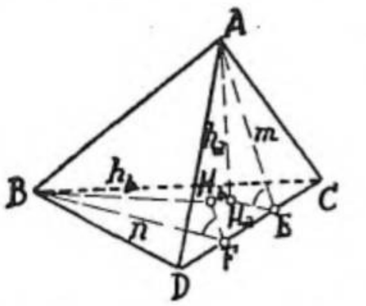
Ahora bien, estos principios no son consecuencia inmediata de los axiomas establecidos. Vamos a demostrarlos de modo análogo a como procedimos en el plano, introduciendo, además, el concepto de signo del volumen, de interés para las aplicaciones ulteriores.

2. Suma de poliedros.—Ante todo recordemos que la *suma* de poliedros se define como la de polígonos. Diremos que el poliedro P es suma de R, S, T y escribiremos $P=R+S+T$, cuando está constituído por los puntos de R, S y T, que sólo tienen puntos comunes de sus caras (los cuales se cuentan una sola vez en P). Escribiremos $P=R-S$ cuando $R=P+S$.

Finalmente, se define la suma algebraica $P=R-S+T-V$ por operaciones sucesivas de suma y resta.

Respecto de la existencia de la suma y resta de dos poliedros se consideran repetidas aquí observaciones idénticas a las que se hicieron para la suma y resta de polígonos planos en lección 28

3. Teoría de las magnitudes poliédricas.—VOLUMEN DEL TETRAEDRO.— *El producto del área de cada cara de un tetraedro por la medida de la altura correspondiente tiene un valor independiente de la cara elegida.*



Tracemos por dos vértices A y B los planos normales a la arista opuesta DC, que lo serán también a las caras ADC y BDC.

En el plano normal por A está, pues, la altura h_a del tetraedro, así como el segmento $m=AE$, altura sobre DC en el triángulo ADC. Análogamente, el plano normal por B contiene la altura h_b del tetraedro, así como la altura $n=BF$ sobre DC en el triángulo BDC. Los ángulos BFH_b y AEH_a son iguales, por medir ambos la sección recta del diedro DC; y de la semejanza de los triángulos rectángulos AH_aE y BH_bF se desprende

$$h_a : m = h_b : n \qquad \text{de donde} \qquad h_a \cdot n \cdot \frac{\overline{DC}}{2} = h_b \cdot m \cdot \frac{\overline{DC}}{2}$$

o sea

$$h_a [BDC] = h_b [ACD]$$

Demostrada la proposición para un par de caras, se demostrará igualmente para las demás.

Llamaremos *volumen* del tetraedro, y lo designaremos por $[ABCD]$, al *tercio del producto del área de cada cara por su altura correspondiente*.

Convendremos en atribuir a éste volumen signo + si suponemos la superficie del tetraedro orientada en sentido positivo, y el signo − en caso contrario. Para precisar el sentido en la notación, convendremos en que venga indicado por el sentido con que se ve el triángulo ABC formado por los tres primeros vértices anotados, desde el último D. Así, en la figura $[ABCD]$ es positivo. En cambio $[ACBD] = -[ABCD]$. Convendremos en poner $[ABCD]=0$ si los cuatro puntos son coplanarios.

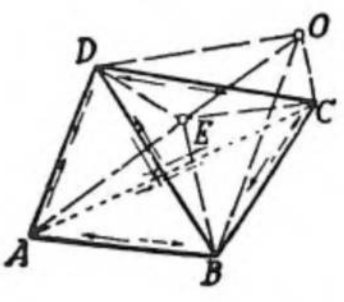
Demostremos ahora :

I. *Si se descompone en triángulos una cara de un tetraedro, la suma de los volúmenes de los tetraedros parciales que dichos triángulos determinan con el vértice opuesto, es igual al volumen del tetraedro total.* Puesto que todos ellos tienen por altura común la del tetraedro y la suma de las áreas de las bases es el área de la base en cuestión. Se suponen, claro es, todos recorridos en sentido positivo.

II. *Sea* ABCD *un tetraedro orientado en sentido positivo y* O *un punto distinto de sus vértices. La suma algebraica de los volúmenes de los tetraedros orientados que resultan de proyectar desde* O *las caras orientadas de* ABCD *es igual al volumen* [ABCD]. Es decir, se verifica

$$[ABCO] + [ACDO] + [ADBO] + [CBDO] = [ABCD] \qquad [1]$$

En la figura se ha supuesto O interior al triedro A. Llamando E a la intersección de AO con la cara BCD y uniendo estos vértices con E y O, se tendrá por [I] :



$$[ABCO] = [ABCE] + [EBCO]$$
$$[ACDO] = [ACDE] + [ECDO]$$
$$[ADBO] = [ADBE] + [EDBO]$$

Sumando y asociando los tres primeros términos de los segundos miembros y los tres segundos (por I) se tendrá

$$[ABCO] + [ACDO] + [ADBO] = [ABCD] + [DBCO]$$

y como $[DBCO] = -[CBDO]$, transponiendo resulta [1].

La demostración se efectúa igualmente sin dificultad para otras posiciones de O, que no detallamos por brevedad.

III *Dividido un tetraedro en tetraedros parciales de cualquier modo y orientados todos ellos en sentido positivo, la suma de sus volúmenes es el volumen del tetraedro total.*

La demostración es análoga a la que se dió en el plano para el triángulo. Si orientamos positivamente dos tetraedros parciales contiguos con una cara común PQR, esta cara tendrá sentidos opuestos en uno y otro tetraedro. Al sustituir la suma de los volúmenes $[PQRS]$ y $[PRQT]$ por la suma algebraica de los volúmenes de los tetraedros orientados proyectantes de sus caras desde un punto O, se destruirán los sumandos $[PQRO]$ y $[PRQO]$, es decir, desaparecerán de la suma los volúmenes de los tetraedros

correspondientes a la *cara común* (*) Al ir agregando tetraedros parciales contiguos y sustituir sus volúmenes por los de los tetraedros proyectantes de sus caras desde O, se irán, pues, destruyendo los volúmenes de los tetraedros determinados por O y por todos los triángulos de división interiores al tetraedro dado, y sólo quedarán las sumas algebraicas de los tetraedros de vértice O y caras situadas en las caras del tetraedro dado, las cuales por I y II sumarán algebraicamente el volumen de dicho tetraedro.

Demostrada la invariancia del volumen de un tetraedro, cualquiera que sea su fraccionamiento, podemos ya definir el

VOLUMEN DE UN POLIEDRO CUALQUIERA.—Descompuesto un poliedro en tetraedros, llamaremos *volumen del poliedro* a la suma de los volúmenes de los tetraedros componentes, orientados todos en sentido positivo. *Este volumen es independiente de la forma de descomposición.* La demostración es idéntica a la anterior y a la expuesta en el plano para la división de un polígono en triángulos (v. lec. 28). *Este volumen es igual a la suma algebraica de los volúmenes de los tetraedros orientados que resultan de proyectar las caras orientadas del poliedro desde un punto cualquiera* O, por ser independiente de dicho punto.

De esta definición se desprende: *Poliedros congruentes tienen igual volumen*

Considerando todos los poliedros orientados positivamente, con lo anterior hemos *hecho corresponder a cada poliedro y a todos sus congruentes un número único llamado volumen*, tal que :

Si un poliedro P *es suma de dos* P_1 *y* P_2, *su volumen es suma de los volúmenes de estos dos.* Puesto que descompuestos P_1 y P_2 en tetraedros, el conjunto de todos ellos constituirá una división de P en tetraedros parciales y la suma de sus volúmenes será igual a la suma de las dos sumas parciales que definen los volúmenes de P_1 y P_2.

Conviniendo, además, en que un poliedro positivo P es mayor que otro R cuando $P=R+S$ (positivo), resultará : *A poliedro mayor, corresponde volumen mayor.*

En resumen, hemos establecido la medida de las magnitudes poliédricas y sólo nos resta volver a la vía elemental para consolidar las reglas prácticas recordadas y deducir otras nuevas, como hacemos en la lección siguiente :

4. Cambio de unidad.—Si cambiamos la unidad de longitud u sustituyéndola por otra $u'=ku$ las medidas de longitud vendrán multiplicadas por $1/k$ y las áreas por $1/k^2$. El volumen de todo tetraedro vendrá, pues, multiplicado por $1/k^3$; de donde :

La razón entre los volúmenes de un mismo poliedro medidos con unidades distintas es el cubo de la razón inversa entre las unidades lineales.

Ejemplo : Una pulgada inglesa$=2{,}54$ cm. Volumen en pulgadas$=$Vol. en cm. $:2{,}54^3$.

(*) Si una cara de un tetraedro T fuese contigua a otras varias, descompondríamos T en tetraedros parciales proyectando desde el vértice opuesto los contornos de éstas, sin alterar la suma en virtud de I.

LECCIÓN 56.—EQUIVALENCIA DE POLIEDROS Y CÁLCULO DE SUS VOLÚMENES

1. Tetraedros equivalentes.— En la Geometría elemental interesan solamente los volúmenes *absolutos;* por tanto, en esta lección, haremos caso omiso del signo, considerando todos los poliedros orientados positivamente.

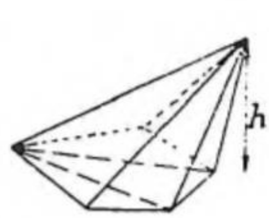
Llamaremos poliedros *equivalentes* los que tienen igual volumen absoluto. Esta igualdad subsiste al cambiar de unidad (lec. anterior, § 4); la equivalencia es, por tanto, una relación *intrínseca,* independiente de la unidad elegida.

Puesto que, por definición, el volumen del tetraedro es el tercio del producto del área de la base por la medida de la altura, resulta sin más

Tetraedros de bases equivalentes y alturas iguales, son equivalentes.

En particular: *Moviendo un vértice de un tetraedro paralelamente a la cara opuesta, el nuevo tetraedro conserva igual volumen.*

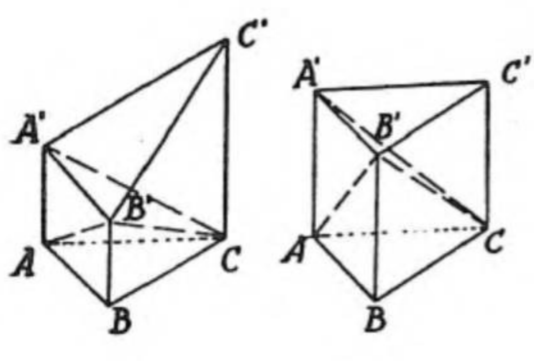
2. Volumen de la pirámide.—Descompuesta una pirámide en tetraedros de igual altura, por planos diagonales, las bases de éstos sumarán la base de aquélla y al sumar los volúmenes resultará:



El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la medida de la altura.

Corolario: *Pirámides de alturas iguales y bases equivalentes, son equivalentes.*

3. Volumen del prisma y del tronco de prisma triangular.— Descompongamos el prisma triangular o el tronco de prisma $ABCA'B'C'$ en los tetraedros:



1.°) $ABCB'$, 2.°) $A'ACB'$, 3.°) $A'CC'B'$.

Llamando h_1, h_2, h_3 las alturas de A', B', C' sobre la base ABC, el primer tetraedro tiene por volumen

$$[ABCB'] = \frac{1}{3} h_2 [ABC]$$

El segundo tetraedro se transforma en otro equivalente trasladando B' hasta B, con lo que

$$[A'ACB'] = [A'ACB] = [ABCA'] = \frac{1}{3} h_1 [ABC]$$

El tercer tetraedro se transformará sucesivamente en dos equivalentes, ladando primero A' sobre A, y luego B' sobre B, con lo que resulta

$$[A'CC'B'] = [ACC'B'] = [ACC'B] = [ABCC'] = \frac{1}{3} h_3 [ABC]$$

Sumando los tres volúmenes

$$\text{Volumen tronco} = [ABC] \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

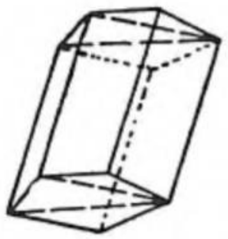
Como en el prisma es $h_1 = h_2 = h_3$ $(=h)$ queda

$$\text{Volumen prisma triangular} = h[ABC]$$

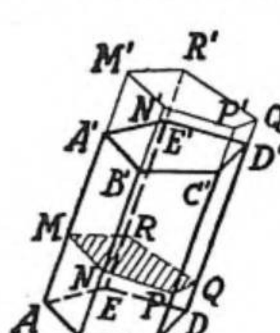
El volumen de un prisma triangular es igual al producto del área de la base por la medida de la altura.

El volumen de un tronco de prisma triangular es igual al producto del área de la base por la media aritmética de las alturas.

4. Volumen de un prisma cualquiera.—Sumando los prismas triangulares en que se descompone un prisma cualquiera, por planos diagonales, se obtiene: *El volumen de un prisma recto u oblicuo es igual al producto del área de la base por la medida de la altura.*



Si el prisma es oblicuo, también puede expresarse este volumen mediante la medida de la arista y el área de la sección recta. Considerando, en efecto, el prisma truncado limitado por una base $ABCDE$ y una sección recta $MNPQR$ y trasladando este tronco para aplicarlo sobre la otra base, se transforma el prisma oblicuo $ABCDEA'B'C'D'E'$ en otro recto $MNPQRM'N'P'Q'R'$ equivalente, puesto que se obtiene sumando y restando al prisma primitivo dos troncos congruentes $A'B'C'D'E'M'N'P'Q'R'$ y $ABCDEMNPQR$. Como la altura MM' de este prisma es igual a la arista lateral AA' del primero, resulta:



El volumen de un prisma oblicuo es igual al producto del área de la sección recta del espacio prismático por la medida de la arista lateral.

5. Volumen del paralelepípedo y del ortoedro.—Como caso particular del volumen del prisma resulta:

El volumen de un ortoedro es el producto de sus tres dimensiones. El volumen de un cubo es el cubo de su lado. El volumen del cubo de arista unidad es *uno*.

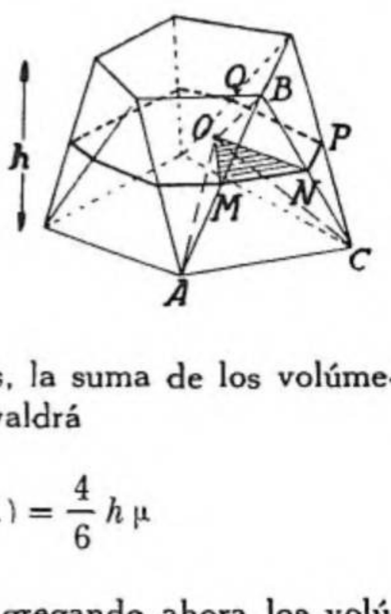
Obsérvese que hemos llegado a este resultado precisamente por haber afectado del factor 1/3 el producto de la base por la altura del tetraedro. Si hubiésemos adoptado como definición de volumen de un tetraedro el producto del área de la base por la altura o este producto afectado de un coeficiente k distinto de 1/3, la teoría hubiera sido igualmente coherente, con la única diferencia de no concordar la unidad de volumen con el convenio del sistema métrico.

6. Volumen del prismatoide.—Llámase *prismatoide* al poliedro limitado por dos polígonos llamados *bases*, que supondremos convexos, situados en planos paralelos, y por triángulos o trapecios (caras laterales) de vértices en dichas bases. La distancia entre los planos de las bases se llama *altura* h del prismatoide.

Para definir con precisión la cara lateral que corresponde a cada lado básico AC ordenemos los semiplanos que proyectan desde AC los vértices de la otra base, tomando como semiplano origen el que contiene la base a que pertenece AC El semiplano de la cara ABC es el *último* en esta *ordenación*, por tanto, todos los vértices del poliedro quedan a un mismo lado de dicho plano. Análogamente para las demás caras laterales. Si alguno de estos *últimos* semiplanos contiene *dos* vértices de la base opuesta la cara lateral que se obtiene es trapecio, excepcionalmente paralelogramo. El poliedro así definido es, pues, *convexo*

En el razonamiento que sigue supondremos descompuesto cada trapecio, si los hay, en dos triángulos coplanarios mediante una diagonal y llamaremos *caras laterales* del prismatoide a todos los triángulos que le limitan distintos de sus bases.

Proyectemos estas caras desde un punto O interior al polígono de la sección producida por el plano *paralelo medio* entre las bases. Sean M, N los puntos medios de las aristas AB y BC, secciones de éstas con dicho plano medio.



El tetraedro $ABCO$ tiene volumen cuádruple del $MBNO$ por tener el mismo vértice O y base $[ABC]=4[MBN]$.

Por tanto

$$[ABCO] = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot [OMN] \cdot \frac{h}{2}$$

Repitiendo lo mismo para todas las caras laterales, la suma de los volúmenes de los tetraedros que proyectarán éstas desde O valdrá

$$4 \cdot \frac{h}{6} ([OMN] + [ONP] + [OPQ] + \ldots) = \frac{4}{6} h \mu$$

en que μ representa el área de la sección media. Agregando ahora los volúmenes de las pirámides que proyectan desde O las bases del prismatoide, cuyas áreas llamaremos β_1 y β_2 resulta

$$\text{Volumen del prismatoide} = \frac{h}{6} (\beta_1 + \beta_2 + 4 \mu)$$

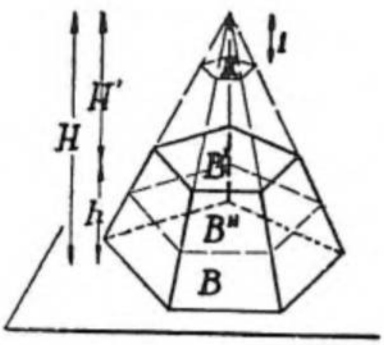
7. Aplicación al cálculo de volúmenes de desmontes, zanjas, etc.— La anterior fórmula es de frecuente aplicación en el cálculo del volumen de tierras removidas al presupuestar un desmonte, terraplén, etc.

Seccionando el desmonte o terraplén a intervalos equidistantes (distancia δ) y calculadas las áreas de las secciones s_1, s_2, ... s_n que supondremos en *número impar*, podemos considerar el volumen de tierra removida entre cada dos secciones de lugar impar como aproximadamente prismatoidal, con lo que el volumen total vendrá expresado por

$$\frac{\delta}{3}(s_1 + 4\,s_2 + s_3 + s_3 + 4\,s_4 + s_5 + \ldots) = \frac{\delta}{3}[E + 4\,P + 2\,I]$$

donde E representa la suma de las secciones extremas, P la suma de las secciones de lugar par e I la de las de lugar impar excluídas las extremas. (Fórmula análoga a la de Simpson para las áreas. V. Apéndice.)

8. Volumen del tronco de pirámide.—Apliquemos la fórmula del prismatoide a un tronco de pirámide de bases paralelas.



Sean B y B' las áreas de la base mayor y menor, respectivamente, y H y H' las alturas de las pirámides total y deficiente y $h = H - H'$ la altura del tronco. Llamemos k al área de la sección paralela a las bases producida en la pirámide total por un plano a distancia 1 del vértice. Se tendrá (lección 45, § 8)

$$B = kH^2 \qquad B' = kH'^2$$

La distancia del vértice a la sección media será $\frac{1}{2}(H + H')$ y el área B'' de dicha sección valdrá

$$B'' = k\left(\frac{H + H'}{2}\right)^2 = \frac{k}{4}(H^2 + H'^2 + 2\,HH')$$

La fórmula del prismatoide da, pues, aquí

$$\text{Volumen del tronco} = \frac{h}{6}\,k\,[2\,H^2 + 2\,H'^2 + 2\,HH'] = \frac{h}{3}[k\,H^2 + k\,H'^2 + k\,HH']$$

es decir

$$\text{Volumen} = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$$

El volumen de un tronco de pirámide es igual a 1/3 del producto de la altura por la suma de las áreas de las bases más una media proporcional entre ellas.

9. Razón de los volúmenes de dos poliedros semejantes.—Elegidas en dos tetraedros semejantes, dos bases semejantes, la razón entre sus áreas B y B' es el cuadrado de la razón de semejanza r, es decir, $B : B' = r^2$; mientras la razón entre las alturas correspondientes es $h : h' = r$. De aquí resulta, la razón entre los volúmenes $V = V'$

$$V : V' = \frac{1}{3} Bh : \frac{1}{3} B' h' = r^3$$

Descompuestos dos poliedros semejantes en tetraedros respectivamente semejantes, la razón entre los volúmenes de cada dos de éstos es r^3; por tanto, esa misma será la razón entre las sumas. De donde:

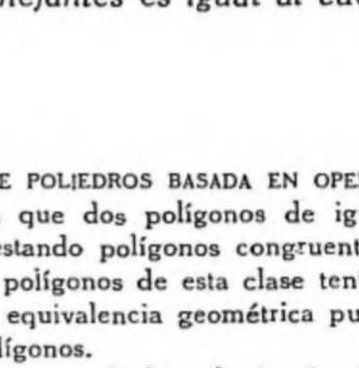
La razón entre los volúmenes de dos poliedros semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

NOTAS

IMPOSIBILIDAD DE ESTABLECER UNA TEORÍA DE LA EQUIVALENCIA DE POLIEDROS BASADA EN OPERACIONES DE SUMA Y RESTA.—Demostrábamos en Geometría plana que dos polígonos de igual área (equivalentes) podían obtenerse uno de otro sumando y restando polígonos congruentes, y también que eran equidescomponibles. Como, recíprocamente, polígonos de esta clase tenían áreas iguales, ello permitía establecer una definición y teoría de equivalencia geométrica pura, fundada sólo en las operaciones de suma, o suma y resta de polígonos.

Para los poliedros es imposible establecer teoría análoga. Existen poliedros de igual volumen que no pueden ser descompuestos en sumas de poliedros congruentes, ni obtenerse uno de otro agregando y restando poliedros congruentes. Para dar brevemente idea de esta imposibilidad (*) consideremos un poliedro P suma de dos P_1 y P_2 y comparemos la suma de los diedros de P_1 y P_2 en

a) Aristas situadas en alguna arista de P.
b) Aristas pertenecientes a alguna cara de P (sin ser de la clase *a*).
c) Aristas interiores a P.



a) La suma de los diedros de P_1 y P_2 cuyas aristas ocupan la posición *a)* es evidentemente la *suma de los diedros* de P, pudiendo ocurrir:

1.° *Que se repita algún diedro*, si algunas aristas de P_1 y P_2 componen una arista de P (como AB y BC de la figura).

2.° *Que haya que sumar algún ángulo llano* si alguna arista de P_1 está en una cara de P_2 o viceversa (como MN, de la figura, perteneciente a un diedro de amplitud α en P_1 y a un diedro de amplitud $\alpha + \pi$ en P).

b) La suma de los diedros de P_1 y P_2 en cada arista de la clase *b)* es, evidentemente, *un diedro llano*, el cual no se cuenta en P por constituir sus bordes una de sus caras (aristas BD, DF, FM de la figura).

c) Finalmente los diedros de P_1 y P_2 pertenecientes a una arista interior a P suman *dos llanos* (aristas DE y FG de la figura).

De todo ello se desprende:

Si un poliedro P *es suma de otros dos* P_1 *y* P_2, *la suma de los diedros de* P *o esta suma con algunos sumandos repetidos, difiere de la suma de los diedros de* P_1 *y* P_2 *en un número entero de ángulos llanos.*

Ampliando ligeramente los conceptos de cara y arista de un poliedro, se generaliza esta proposición a una suma de varios poliedros $P_1 + P_2 + ... + P_n = P$.

(*) Aprovechamos algunas ideas de una demostración de Rey Pastor en *Rev. Mat. Hispano-Americana* (año 1925, núm. 9), «Sobre equivalencia de poliedros».

La existencia de poliedros de igual volumen, no equidescomponibles, fué presentada por *Hilbert* y demostrada por primera vez por *Dehn*, en este siglo.

Por tanto, si al sumar de otro modo se obtiene otro poliedro $P_1+P_2+\ldots+P_n=P'$, comparando la suma de los diedros de P y P' se habrá de verificar:

Las sumas de los diedros de dos poliedros equidescomponibles P *y* P', *o estas sumas con algunos de sus sumandos repetidos, serán iguales o diferirán entre sí en un cierto número de ángulos llanos.* (A análogo resultado se llega para poliedros equivalentes por combinación de sumas y restas.)

Ahora bien, existen poliedros, como un tetraedro regular y el cubo equivalente, que no pueden cumplir esta condición.

Sea α el diedro del tetraedro regular y designemos con R el ángulo recto. La condición anterior implicaría, en efecto, la existencia de ciertos números *enteros* p y q, tales que $q\alpha=pR$, lo cual es imposible por ser α inconmensurable con R, según es fácil demostrar con los recursos de la trigonometría.

En efecto, sustituyendo p/q por la irreducible equivalente m/n, se habría de verificar $n\alpha=mR$ (n y m primos entre sí) y, por tanto, $\operatorname{tg} n\alpha=\operatorname{tg} mR$. Expresando $\operatorname{tg} n\alpha$ en función de $\operatorname{tg}\alpha$ cuyo valor es $\sqrt{8}$ (v. figura), se habría de verificar (v. tomo II Trigonometría):

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{n \operatorname{tg}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \ldots} =$$

$$= \sqrt{8}\,\frac{n - \binom{n}{3}8 + \binom{n}{5}8^2 - \ldots}{1 - \binom{n}{2}8 + \binom{n}{4}8^2 - \ldots} = \begin{cases} 0 & \text{para } m \text{ par} \\ \pm\infty & \text{para } m \text{ impar} \end{cases}$$

Pero, si m es *par* la anulación de $\operatorname{tg} n\alpha$ exigiría la del numerador; de donde $n= \binom{n}{3}8 - \binom{n}{5}8 + \ldots = \dot{8}$, que contradice la hipótesis de ser m y n primos entre sí.

Y si m es impar habría de ser nulo el denominador, lo que implicaría análogamente $1=\dot{8}$.

Descomponibilidad de un poliedro en tetraedros.—La noción de volumen de un poliedro se funda en la posibilidad de descomponerlo en tetraedros. Si el poliedro es convexo podemos conseguir fácilmente esta descomposición mediante las pirámides que proyectan las caras desde un vértice y la descomposición de éstas en tetraedros.

Si el poliedro no es convexo demostremos que *puede descomponerse en un número finito de poliedros convexos y, por tanto, de tetraedros*. En efecto, decir que no es convexo es afirmar que el plano de alguna cara que llamaremos *entrante* le divide en dos o más poliedros, cada uno de los cuales está en uno solo de los semiespacios limitados por dicho plano. Si estos poliedros parciales son convexos el teorema está demostrado; si no lo son, repetiremos la división. Como los planos de las caras introducidas en cada fraccionamiento dejan cada uno de los poliedros parciales a un solo lado de ellas, las caras entrantes de éstos que habremos de utilizar para proseguir el fraccionamiento *serán siempre caras entrantes del poliedro primitivo*, y como sus planos son en número finito el proceso conduce necesariamente a un número finito de poliedros parciales convexos.

Imposibilidad de la cubatura de poliedros. Problema de Dehlos.—En la lección 29 aprendimos a construir con la regla y el compás un cuadrado equivalente a un polígono cualquiera. Podemos preguntarnos si será posible construir análogamente la arista de un cubo equivalente a un poliedro cualquiera dado.

Descompuesto el poliedro en tetraedros observamos que *cada tetraedro puede transformarse en un ortoedro cuya base sea un rectángulo prefijado de dimensiones* a *y* b. En efecto, si h es la altura del tetraedro y m y n son las dimensiones de un rectángulo equivalente a la base, la altura x del ortoedro vendrá dada por $abx=\frac{1}{3}hmn$, es decir, $x=\dfrac{h\cdot m\cdot n}{3\,a\cdot b}$, segmento fácil de construir, según se vió en la lección 22. § 8. Sumando los ortoedros así obtenidos *podemos transformar un poliedro cualquiera en ortoedro equivalente de base prefijada.* Pero para calcular la arista del cubo equivalente a éste, conocidas sus tres dimensiones a, b y c, hay que resolver la ecuación cúbica $x^3=a\cdot b\cdot c$, la cual según se demuestra con los recursos del Algebra, no puede resolverse gráficamente mediante un número finito de operaciones efectuadas con la regla y el compás a partir de segmentos a, b y c cualesquiera (*).

El problema más sencillo y más antiguo de este tipo es el famoso problema llamado de la *duplicación del cubo* o problema de *Dehlos*, porque la leyenda lo enlaza con un oráculo dictado en el templo griego de Dehlos, según el cual era preciso, para remediar ciertos males, construir un altar cúbico de volumen doble del que en dicho templo existía. Los geómetras griegos intentaron resolver el problema mediante la regla y el comás y fracasaron, naturalmente, en su empeño; por lo que este problema se hizo célebre en la antigüedad, como el de la cuadratura del círculo.

EJERCICIOS

1. Determinar las dimensiones de un depósito en forma de ortoedro de 3.000 litros de capacidad, cuya altura sea la mitad del ancho y éste los 2/3 de la longitud.

2. Por los vértices de un tetraedro se trazan planos paralelos a las caras opuestas. ¿En qué relación se hallan los volúmenes del nuevo tetraedro así obtenido y del dado?

3. Por cada arista de un tetraedro se traza un plano paralelo a la arista opuesta. ¿Qué cuerpo limitan estos planos y cuál es la razón de su volumen al del tetraedro de partida?

4. Demostrar por equivalencia la iguadad: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

5. Volumen de un terraplén de 120 m. de longitud cuya sección tiene forma de trapecio isósceles de 7 m. de altura, 6 m. de ancho en la parte superior y taludes de pendiente 8/10.

6. Se desea saber el peso de 150 cuñas de hierro forjado (densidad 7,8) en forma de prisma truncado triangular cuyas caras laterales son un rectángulo de $10\cdot 18$ cm. y dos trapecios isósceles de bases 18 cm. y 12 cm. y altura (de estos trapecios) 30 cm.

7. Volumen y superficie del octaedro cuyos vértices son los centros de las caras de un ortoedro de aristas a, b, c. Aplicación $a=3$, $b=4$, $c=5$ m.

8. El volumen de un prisma triangular no se altera si se trasladan de cualquier modo sus aristas laterales a lo largo de las rectas en que se sitúan.

9. Demostrar que el volumen de un prisma triangular es igual a la mitad del producto del área de una cara lateral por su distancia a la arista opuesta.

10. Por una recta dada trazar un plano que divida un paralelepípedo en dos cuerpos equivalentes.

11. El plano determinado por una arista y el punto medio de la arista opuesta de un tetraedro le divide en dos equivalentes.

12. Todo plano trazado por los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro le divide en dos cuerpos equivalentes.

13. Dividir un prisma triangular en dos prismas truncados equivalentes mediante un plano que pase por dos puntos M y N dados en dos de sus aristas laterales.

14. Los volúmenes de dos tetraedros con un triedro común son entre sí como los productos de las tres aristas que lo forman.

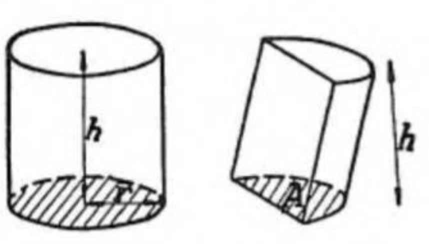
15. Hallar en el interior de un tetraedro un punto que determine con las cuatro caras cuatro tetraedros parciales equivalentes.

16. Dados cuatro polígonos situados en planos distintos, hallar un punto del espacio tal que las pirámides que se obtienen proyectando desde él los polígonos dados sean equivalentes. Idem sean proporcionales a cuatro números dados.

(*) V. *Lecciones de Algebra*, de Rey Pastor, y apéndice del segundo tomo de esta obra.

LECCIÓN 57.—VOLUMEN DE CUERPOS REDONDOS

1. Volumen de un cilindro.—Llamaremos volumen de un cilindro circular (recto u oblicuo) al límite del volumen de un prisma inscrito de base regular, cuyo número de lados crece infinitamente.

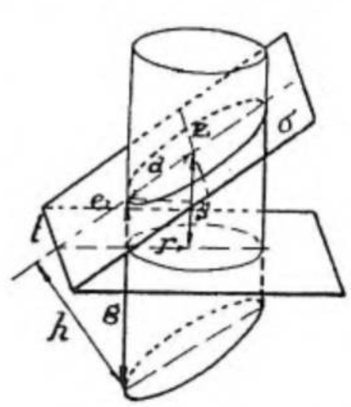


Como el volumen de dicho prisma es el producto del área básica por la altura h, el límite será (lec. 31, § 5):

Volumen cilindro circular $=\pi r^2 h$ (r radio de la base).

La definición y demostración se generalizará fácilmente a otros cuerpos cilíndricos, engendrados por traslación de una figura plana limitada por arcos circulares y cuya área se conozca. Llamando A a dicha área y h a la altura o distancia entre los planos de las bases resulta:

$$\text{Volumen} = A \cdot h.$$



2. Volumen del cilindro recto truncado.—Si aplicamos al cilindro recto truncado la duplicación por simetría usada en el § 3 de la lección 53 se obtiene un cilindro recto ordinario de altura igual al doble del segmento de eje interceptado entre la base y la sección oblicua, de donde:

El volumen de un cilindro recto truncado es igual al producto $\pi r^2 s$ del área de la base por el segmento s del eje comprendido entre ésta y la sección.

3. Area de la elipse.

La curva sección (*) de una superficie cilíndrica circular por un plano σ oblicuo al eje, se llama *elipse*. Tiene dos ejes de simetría perpendiculares: uno, e, es la recta paralela a la traza t del plano σ sobre el de la base, recta que es a un tiempo eje de simetría de dicho plano y de la superficie [por ser normal al eje de revolución (lección, 47, § 1)]; otro eje de simetría de la elipse es la intersección e_1 de su plano con el plano perpendicular a él por el eje del cilindro (por ser éste plano de simetría de σ y de la superficie). Los segmentos de ambos ejes interiores al cilindro se llaman, también abreviadamente, ejes de la elipse, designándose el mayor (en e_1) por $2a$ y el menor (en e) por $2b$; este último es, evidentemente, igual al diámetro $2r$ del cilindro.

Dadas estas definiciones, obsérvese que si sumamos los dos cilindros truncados simétricos (que componen el cilindro recto de la figura anterior), aplicando al superior una traslación que superponga las bases circulares, obtendremos un cilindro oblicuo de base elíptica y sección recta circular.

(*) Véase en la lección siguiente el concepto general de curva.

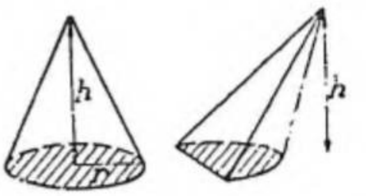
A todo prisma regular inscrito en el cilindro recto corresponderá un prisma de sección recta regular inscrito en el cilindro oblicuo, cuyo volumen se podrá calcular de dos modos: como producto del área B de la base por la altura h, o como producto del área de la sección recta S por la arista g. De donde $Bh=Sg$; $B:S=g:h$. Si convenimos en llamar área de la elipse básica A al límite del área B del polígono inscrito, y volumen del cilindro oblicuo al límite del prisma correspondiente al crecer infinitamente el número de lados del polígono, y aplicamos límites a la iguadad anterior, resulta:

Area elipse: $\pi r^2 = g:h = a:r$ de donde, área elipse $= \pi ab$

Esta sencilla fórmula, que hemos creído oportuno adelantar en este tomo, nos permitirá completar el cálculo del área total del cilindro truncado cuya área lateral se obtuvo en lección 53, § 3.

4. Volumen del cono.—Llamaremos volumen del cono circular, recto u oblicuo, al límite del volumen de una pirámide inscrita de base regular cuyo número de lados crece infinitamente.

Como el volumen de dicha pirámide es $\frac{1}{3}$ área básica $\cdot h$ (altura), el límite será (lec. 31):

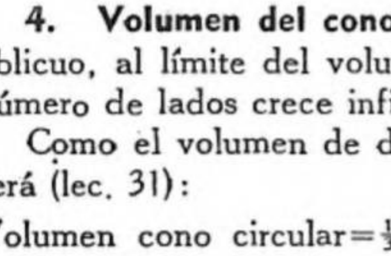


Volumen cono circular $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r radio de la base).

La definición y demostración se generalizan para toda clase de cuerpos piramidales o cónicos, engendrados por los segmentos que unen su vértice V con los puntos de una figura plana llamada base, de área A conocida. Llamando h a la altura (distancia de V al plano de la base) resulta:

$$\text{Volumen} = \tfrac{1}{3} A \cdot h.$$

5. Volumen del tronco de cono circular.— Se define, análogamente, como límite del volumen de un tronco de pirámide inscrito de bases regulares y resulta (r y r' radios bases)



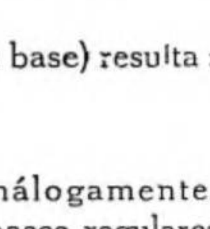
Volumen de tronco de cono=

$$= \frac{h}{3}\left(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2}\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + r'^2 + rr'\right)$$

Fórmula que se generaliza para un tronco de cono cualquiera de bases B y B' y altura h

$$\text{Volumen} = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{B \cdot B'}\right)$$

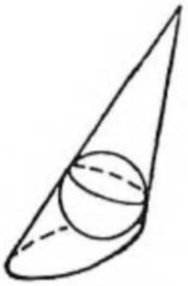


6. Volumen de cuerpos circunscriptibles a una esfera. Si un poliedro convexo es circunscriptible, es decir, los planos de sus caras son todos tangentes a una misma esfera, y conocemos el área A de la superficie del poliedro y el radio ρ de dicha esfera inscrita, el volumen tiene la sencillísima expresión

$$\text{Volumen} = \tfrac{1}{3} A\rho.$$

Basta, en efecto, descomponer el poliedro en las pirámides que proyectan sus caras desde el centro O de la esfera inscrita y sumarlas, considerando dichas caras como bases y, como altura común de todas ellas, la distancia ρ.

La fórmula es generalizable, por sencillos razonamientos de paso al límite, al caso de cuerpos limitados no sólo por planos tangentes a una esfera, sino también por superficies cónicas o cilíndricas circunscritas a dicha esfera.

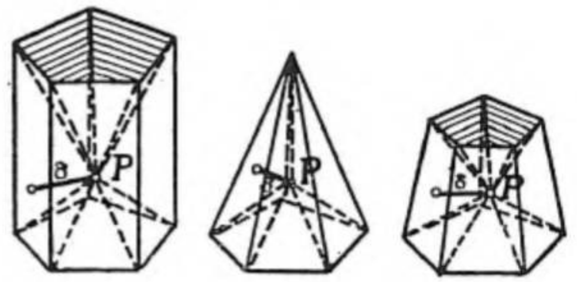


Tal ocurre, por ejemplo, con los conos de revolución de base recta u oblicua, ya que siempre es posible inscribirles una esfera. Esta sencilla relación

$$\text{Vol.} = \tfrac{1}{3}\,\text{Area sup.} \times \text{radio esf. inscrita}$$

se aplica no sólo para hallar el volumen, conocidos el área y el radio, sino también para hallar alguno de estos elementos, conocidos los otros dos.

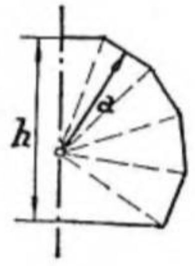
7. Volumen de sectores cilíndricos, cónicos y troncocónicos.—Análogamente a lo visto en el párrafo anterior, si proyectamos las caras laterales de un prisma, pirámide o tronco de pirámide regular desde un punto P del eje, obtendremos un conjunto de pirámides cuyo volumen total es *un tercio del producto de la superficie lateral por la distancia δ común de P a dichas caras.*



Si suponemos los cuerpos anteriores respectivamente inscritos en un cilindro, cono o tronco de cono, y aumentamos indefinidamente el número de caras, tomaremos el límite de su volumen como volumen del sector cilíndrico, cónico o troncocónico correspondiente, entendiendo por tales los cuerpos formados por todos los segmentos que proyectan las superficies laterales de un cilindro, cono o tronco de cono desde un punto del eje (de otro modo, los cuerpos engendrados por la rotación de un triángulo alrededor de un eje que pasa por un vértice sin cortarle). Resulta así como expresión de estos volúmenes $\frac{1}{3}$ área lateral $\times\, \delta$ (distancia del punto P a la generatriz).

Al mismo resultado se llega por adición y sustracción de cilindros, conos y troncos de cono, después de cálculos más prolijos y que no ponen de relieve la esencia común que motiva la identidad formal de sus volúmenes (v. la demostración en cualquier libro clásico de Geometría).

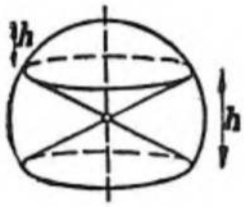
8. Volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un sector poligonal regular.—Si giramos un sector poligonal regular de un ángulo completo alrededor de un eje que pasa por el centro sin cortarle, el cuerpo engendrado se compone de un conjunto de sectores cónicos, cilíndricos o troncocónicos con la distancia δ común a todos ellos e igual a la apotema a del sector. De donde:



El volumen engendrado por un sector poligonal regular al girar alrededor de un eje no secante por su centro, es igual a 1/3 del producto de la apotema por el área de la superficie engendrada por la línea poligonal. O sea (lec. 53, § 7):

$$\text{Volumen} = \frac{a}{3}\, 2\pi ah = \frac{2}{3}\pi a^2 h$$

9. Volumen del sector esférico y de la esfera.— Llamaremos *sector esférico* al cuerpo formado por los radios proyectantes de los puntos de un casquete o de una zona, o, lo que es lo mismo, al cuerpo engendrado por la rotación de un sector circular alrededor de un eje no secante que pasa por el centro.



Llamaremos *volumen de un sector esférico o de una esfera*, al límite del volumen del sector poligonal inscrito en el sector circular o en el semicírculo generadores.

En virtud del párrafo anterior, este límite se obtendrá sustituyendo a por su límite r en la fórmula anterior. Así se tendrá

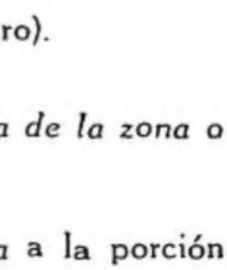
$$\text{Volumen del sector} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

y para la esfera completa ($h = 2r$)

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6} \qquad (d = 2r \text{ diámetro}).$$

De otro modo: *El volumen del sector esférico es igual al área de la zona o casquete correspondiente por 1/3 del radio.*

10. Volumen de la cuña esférica.— Llámase *cuña esférica* a la porción de esfera interior a un diedro cuya arista es un diámetro de la misma. La amplitud del diedro se llama también amplitud de la cuña.



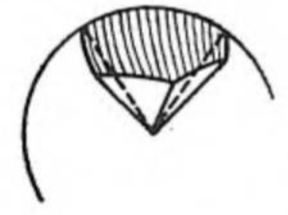
Convendremos en definir como volumen de la cuña de amplitud un grado, la 1/360 parte del volumen de la esfera, y como volumen de la cuña de amplitud n grados, al producto por n del de la cuña de amplitud un grado. De donde

$$\text{Volumen cuña} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{n}{360} = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{n}{90}$$

Es decir: *El volumen de la cuña es igual al producto del área del huso por 1/3 del radio* (lec. 54, § 1).

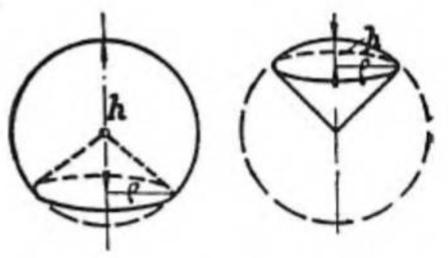
11. Volumen de pirámides esféricas.— Llamamos *pirámide esférica* al cuerpo interceptado en una esfera por un anguloide con vértice en su centro.

De otro modo: al conjunto de los radios que proyectan un polígono esférico.



El razonamiento que en el § 2 de la lección 54 nos permitió obtener el área de un triángulo esférico por suma e interferencia de husos, puede repetirse aquí para obtener el volumen de una pirámide esférica triangular por suma e interferencia de las cuñas correspondientes. Como cada cuña tiene por volumen el área del huso por $\frac{1}{3}r$, bastará *multiplicar el área de un triángulo esférico, y en general de un polígono esférico, por 1/3 del radio, para obtener el volumen de la pirámide esférica correspondiente.*

12. Volumen del segmento esférico de una base.—Llámase *segmento esférico de una base* a la porción de esfera contenida en cada uno de los semiespacios definidos por un plano secante. La sección producida por dicho plano se llama *base del casquete.*



Si el plano secante pasa por el centro, ambos casquetes son iguales a media esfera; de lo contrario, uno de ellos contiene el centro y el otro no.

Recordando la definición anterior de sector, parece natural definir así el volumen del segmento de una base:

El volumen del segmento esférico de una base es el del sector correspondiente al casquete, más o menos el volumen del cono que proyecta la base desde el centro, según que dicho centro esté o no contenido en el segmento.

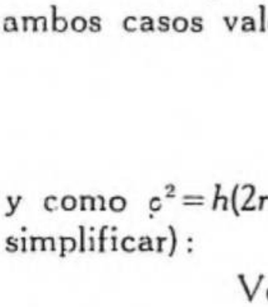
Llamando ρ al radio de la base, h la altura del casquete y r al radio de la esfera, en el primer caso la altura del cono es $h-r$ y en el segundo es $r-h$, en ambos casos vale, pues, la fórmula

$$\mathrm{Vol} = \frac{2}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi \rho^2 (h-r)$$

y como $\rho^2 = h(2r-h)$ sustituyendo resulta (después de efectuar operaciones y simplificar):

$$\text{Volumen del segmento de una base} = \pi h^2 (r - \tfrac{1}{3}h).$$

13. Volumen del segmento esférico de dos bases.— Llámase *segmento esférico de dos bases* a la porción de esfera comprendida en una zona de espacio limitado por dos planos secantes paralelos, cuyas secciones con la esfera se llaman *bases* del casquete. El volumen del segmento esférico de dos bases es, pues, la diferencia entre el volumen de la esfera y los de los segmentos de una base exteriores a la zona que lo define, lo que permitirá formularlo en función de la altura de dichos casquetes.



Pero interesa obtener una expresión de dicho volumen en función de dimensiones *del propio cuerpo* (radios de las bases ρ_1 y ρ_2 y altura h del segmento); para ello restaremos del volumen del sector, que proyecta la zona descrita por el arco, el volumen del sector cónico o cilíndrico que proyecta la superficie engendrada por la cuerda, con lo que tendremos el volumen engendrado por el segmento circular comprendido entre el arco y la cuerda; y sumaremos, finalmente, el volumen del tronco de cono (o de cilindro) limitado por aquella superficie cónica (cilíndrica) y los planos de las bases.

Resulta así (c cuerda del arco, m distancia al centro):

Vol. engendrado por el segmento circular = Sector esférico — Sector cónico

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi m^2 h = \frac{2}{3}\pi h (r^2 - m^2) = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2 h}{6}$$

El volumen engendrado por la rotación de un segmento circular es igual al 1/6 del volumen del cilindro cuyo diámetro es la cuerda y de altura igual a la del casquete o zona engendrada por el arco.

Sumando ahora el volumen del tronco de cono se obtiene, por ser $c^2 = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2$,

$$\text{Vol. segmento de dos bases} = \frac{1}{6}\pi h\,[h^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1] + \frac{\pi h}{3}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2)$$

$$= \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(\rho_2^2 + \rho_1^2)$$

El volumen de un segmento esférico de dos bases es igual al de una esfera de diámetro igual a la altura del segmento más la semisuma de los volúmenes de dos cilindros de la misma altura y de radios iguales a los de las bases.

Aplicando esta fórmula al caso $\rho_1 = 0$ se obtiene otra fórmula del volumen del segmento de una base, que también puede deducirse de la del párrafo anterior sustituyendo r en función de ρ.

14. Volúmenes de cuerpos semejantes.—Obsérvese que todas las fórmulas obtenidas para los volúmenes expresan éstos mediante productos de *tres dimensiones lineales*. Por tanto, *la razón entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes es el cubo de la razón de semejanza.*

Por otra parte, esto es consecuencia del teorema análogo para los poliedros puesto que los volúmenes de cuerpos redondos se han obtenido, en resumen, mediante pasos al límite efectuados sobre volúmenes de cuerpos poliédricos.

EJERCICIOS. (De todo el Capítulo.)

1. Sobre una de las caras de un triedro se tiene trazada una recta r que corta a las aristas contenidas en dicha cara. Trazar por r un plano que limite con el triedro un tetraedro de volumen dado.

2. Expresar el volumen de cada uno de los poliedros regulares en función de su arista. (Véase lecc. 46. Notas.)

3. Dada el área (120 cm²) del cubo inscrito en un dodecaedro regular, hallar el área de éste su volumen.

4. Calcular el peso de un pisapapeles de cristal (densidad 2,5) en forma de cuboctaedro (cubo truncado por los planos que pasan por los puntos medios de las aristas concurrentes), sabiendo que su arista es de 3 cm.

5. Dado un segmento a, construir otro x cuya razón al primero sea igual a la que existe entre los volúmenes de dos cubos de aristas dadas. ¿Puede resolverse con regla y compás el problema inverso: hallar la arista de uno de los cubos conociendo el otro y los dos segmentos?

6. Los cuadrados de los volúmenes de dos cuerpos semejantes son proporcionales a los cubos de las superficies.

7. Si A', B', C', D' son las proyecciones de un punto P interior a un tetraedro desde los vértices A, B, C, D sobre las caras opuestas, se verifica

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1$$

8. Trazado un plano paralelo a la base de una pirámide de tal modo que divida las aristas laterales en la razón $m:n$, calcular la razón entre los volúmenes de la pirámide deficiente y del tronco formados.

9. Expresar el error que se cometería al tomar como volumen de un tronco de pirámide la semisuma de las áreas de las bases por la altura. Calcular el tanto por ciento de error relativo en casos numéricos determinados.

10. Generalización del teorema de *Pappus* en el plano (Ej. 23, lec. 29): Construídos tres prismas triangulares sobre tres caras de un tetraedro concurrentes en V, y llamando P al punto de intersección de los planos de las bases superiores de estos prismas, la suma de ellos es equivalente a un prisma cuya base es la cara opuesta a V y cuyas aristas laterales son iguales y paralelas a VP.

11. Calcular el peso por metro lineal de las barras de hierro cuya sección se indicó en el ejercicio 8 de la lección 31 (densidad 7,8).

12. Calcular el diámetro interior de una bureta cilíndrica que mide hasta 50 cm³ y cuya graduación tiene una longitud de 35 cm.

13. Expresar en función de las bases y de la altura de un trapecio el volumen engendrado por él al girar alrededor de la base mayor. Idem menor.

14. Peso y capacidad de una caldera de plancha de cobre formada por un cuerpo cilíndrico de 2 m. de longitud por 1 m. de diámetro, terminado por dos segmentos esféricos de 30 cm. de altura. Peso de la plancha, 40 kg/m².

15. En una esfera de radio r un cilindro inscrito tiene área lateral mitad de la del círculo máximo. Calcular el volumen de dicho cilindro y su área.

16. Area y volumen del prisma hexagonal regular inscrito en el cilindro del ejercicio anterior.

17. Una olla de aluminio tiene forma de un segmento esférico de dos bases iguales (la superior suprimida) de altura igual al diámetro de la base. Su capacidad es de tres litros. Calcular el radio de la esfera y la altura.

18. En una cápsula hemisférica de radio R se sumerge al baño maría un matraz esférico de radio r (menor que R y mayor que $R/2$). Calcular la cantidad de agua que hay que poner en la cápsula para que el agua llegue a su borde cuando el matraz toque su fondo.

19. Una esfera opaca de 5 cm. de radio apoyada sobre un plano horizontal es iluminada por un punto situado a 20 cm. del plano de tal modo que una de las generatrices del cono de sombra es vertical. Calcular el volumen de la porción de espacio en sombra comprendida entre la esfera y el plano.

20. Un depósito cónico invertido de altura 3 m. y diámetro básico 2 m. se llena a razón de 20 litros por minuto. Expresar la altura del nivel (en cm.) en función del tiempo (en segundos).

21. La sección longitudinal de una piscina de 30 m. de longitud, 10 m. de ancho y 2,5 m. de profundidad máxima es un trapecio rectángulo cuyo lado inclinado tiene una pendiente del 10 %. Se llena mediante un aporte de agua de un litro por segundo. Expresar el nivel del agua, en metros, en función del tiempo, en horas.

APENDICE

LECCIÓN 58.—CONCEPTO DE CURVA, TANGENTE, LONGITUD DE UNA CURVA Y ÁREA DE UN RECINTO CURVO. TEOREMA DE JORDAN

1. Concepto de curva.—Habrá observado el lector que, hasta ahora, hemos eludido el concepto general de *curva*. Las líneas que hemos considerado en nuestros razonamientos han sido, concretamente, líneas rectas o circunferencias, o formadas por segmentos rectilíneos o arcos de circunferencia (*). Hemos procedido así, de intento, para evitar una dificultad mientras no fuese indispensable afrontarla; esta dificultad es «dar, con los recursos de que disponemos, una definición matemática rigurosa de *curva*, que responda a nuestro concepto intuitivo».

El lector a quien no interese la cuestión, puede quedarse con la noción intuitiva que de *curva* tenga, comprobando, por intuición, las propiedades que de tal concepto enunciaremos en los párrafos sucesivos. Para el lector que quiera profundizar un poco más, añadiremos unas breves palabras con objeto de darle idea de la dificultad del problema y la forma de encauzarlo.

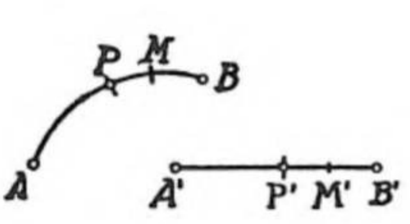
La definición clásica general de línea como *lugar de las posiciones de un punto en movimiento*, responde a un concepto *cinemático* de *movimiento* que no es el que hemos empleado como *transformación*. Al decir nosotros «línea (superficie o cuerpo) engendrado» por el giro o la traslación de un punto (o de una figura) hemos entendido siempre (**) el lugar de los puntos homólogos al considerado (o a los de la figura considerada) en todos los giros o traslaciones *con un mismo centro, eje o guía*, de tal modo que la continuidad del ángulo de giro o de la recta guía aseguraban la continuidad (en sentido intuitivo) de la línea (superficie o cuerpo) así definida, dando todas las posiciones del elemento generador. *Un movimiento geométrico* del punto A es tan sólo la *correspondencia* entre A y otro punto A', y no tendrá sentido geométrico hablar del «lugar de las posiciones de A en el *movimiento*», mientras no *definamos* los movimientos geométricos intermedios cuyo conjunto forma el movimiento *cinemático* considerado. Pero eso es tanto como definir la *curva*. Estamos, pues, en un círculo vicioso que hemos de abandonar.

Más lógico será partir de las líneas conocidas, recta y circunferencia, para definir, por transformación, las demás. Intuitivamente hablando; resulta evidente que podemos aplicar un trozo de hilo continuo sobre una línea recta sin cortarle, y aun sobre un segmento prefijado si imaginamos el hilo dotado de una elasticidad suficiente para ser dilatado o contraído a voluntad; lo esencial es *que no se rompa*. Se establece así una correspondencia punto a punto entre los puntos de curva dibujada por el hilo en su primitiva posición y los del segmento al que se ha aplicado, de forma que a puntos tan próximos como queramos de la curva siguen correspondiendo puntos tan próximos como se quiera del segmento y viceversa. Esto justifica la definición general siguiente:

(*) Por ejemplo, la «conservación de ángulos» en la inversión fué exclusivamente demostrada para ángulos homólogos formados por rectas o circunferencias. (Lec. 26, § 6.)

(**) V. Lec. 41, § 8. Lec. 43, § 5.
Lec. 47, §§ 1, 3 y 5.

Llámase arco de curva de Jordan a todo conjunto de puntos en correspondencia «biunívoca» y «bicontinua» con los puntos de un segmento; es decir, de tal modo que 1.º), a cada punto P del arco AB corresponde un punto P' y sólo uno, del segmento $A'B'$ y viceversa (biunívoca). Llamaremos, para abreviar, a los puntos del segmento, *imágenes* de los homólogos en el arco, designándolos con la misma letra, acentuada; y 2.º), dado un punto P cualquiera del arco y un segmento ε por pequeño que sea, podemos hallar otro segmento ε' tal, que a todo punto M' de $A'B'$ que diste de P' menos que ε' corresponda un punto homólogo M en el arco AB cuya distancia a P es menor que ε, y viceversa (bicontinuidad) dado δ' se puede hallar δ tal que para todo punto M que cumpla $PM<\delta$, sea $P'M'<\delta'$ Los homólogos A, B de los extremos A', B' del segmento se llaman *extremos* de arco



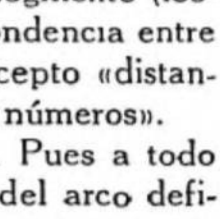
De esta definición se desprende *Todo conjunto de puntos en correspondencia biunívoca y bicontinua con los números reales de un intervalo, completo* (es decir, que incluya sus extremos) $a\leqslant x\leqslant b$ *es un arco de curva de Jordan*. Pues tales números se pueden representar por los puntos de un segmento (lección 18, § 1) Los caracteres biunívoco y bicontinuo de la correspondencia entre puntos y números se definen análogamente, sustituyendo el concepto «distancia entre puntos» por el «valor absoluto de la diferencia entre números».

Todo arco de circunferencia es un arco de curva de Jordan. Pues a todo punto del mismo corresponde el número que mide la amplitud del arco definido con uno de los extremos.

Llamaremos *curva cerrada de Jordan* a todo *conjunto de puntos en correspondencia «biunívoca» y «bicontinua» con los puntos de una circunferencia*, que llamaremos *imagen* de la curva. Los caracteres biunívoco y bicontinuo de la correspondencia se definen como para el arco.

De esta definición resulta: Dos arcos de curva de Jordan de extremos comunes A, B, sin otros puntos comunes, constituyen una curva de Jordan cerrada Basta hacer corresponder los segmentos imagen a dos arcos que completen una circunferencia.

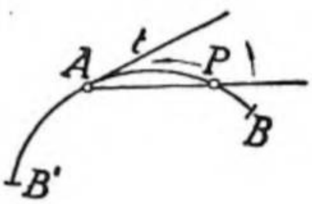
El conjunto de puntos del plano que distan de P menos que ε se llama *entorno* circular de P de radio ε. Llamaremos al conjunto de puntos de este entorno pertenecientes a la curva c, entorno de P en c. La bicontinuidad supone, pues, una correspondencia de entornos entre la curva y su imagen, y recíprocamente



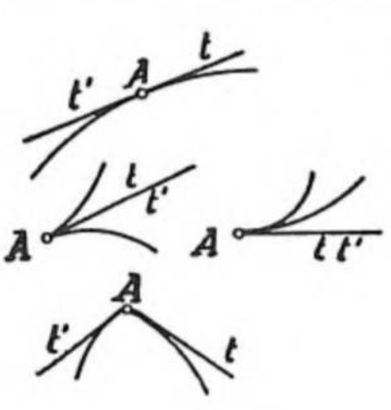
2. Sentidos en una curva de Jordan.— En todo arco de curva o en toda curva cerrada de Jordan, cabe definir dos sentidos: los correspondientes a los dos sentidos del segmento o de la circunferencia imagen

Todo punto P de un arco de curva AB, le divide en dos arcos PA y PB que tienen por imágenes los segmentos $P'A'$ y $P'B'$, en que el punto P', imagen de P, divide al segmento $A'B'$ imagen de AB. Análogamente: Dos puntos dividen a una curva cerrada de Jordan en dos arcos.

3. Concepto de tangente. Puntos ordinarios, angulosos y de retroceso.— Dado un punto A de una curva de Jordan (no extremo), elijamos un entorno de A en la curva, formado por dos arcos AB y AB' de extremo común A y opuesto sentido en la curva.



Consideremos en uno de estos arcos AB la semirrecta de origen A y que pasa por un punto P variable del mismo. Si al tender el punto P a confundirse con A la semirrecta AP tiende a un límite t, es decir, si dado un ángulo ω por pequeño que sea, es posible hallar un segmento ε tal que *para todo punto* P del entorno de A de radio ε en el arco, la semirrecta AP forme con t un ángulo menor que ω, diremos que t es la *semitangente* a la curva en el punto A y sentido AB.

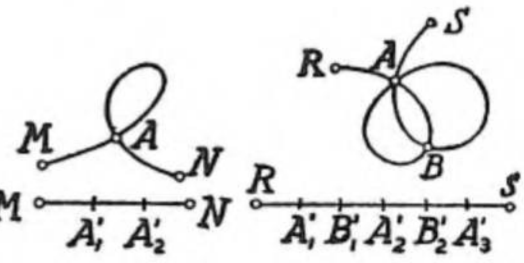


Si la semitangente t' en A en el sentido opuesto AB' existe y coincide con la opuesta a t diremos que la recta tt' es la tangente en A a la curva de Jordan, y el punto se llamará *ordinario*.

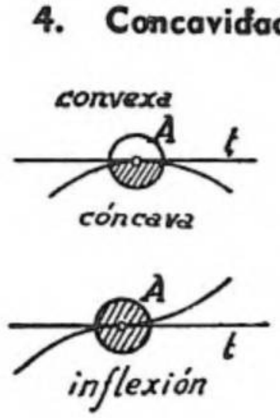
Si la semitangente t' coincide con t diremos que el punto A *es un punto de retroceso* de la curva.

Si la semitangente t' no está alineada con t, diremos que el punto es *anguloso*.

Para curvas definidas por correspondencias continuas pero no *biunívocas*, cabe la existencia de puntos llamados *múltiples*, es decir, con varias imágenes, cuyo entorno está constituído por dos o más arcos de curva simple de Jordan que tienen sus correspondientes tangentes. Una curva de Jordan carece, por definición, de puntos múltiples, puesto que a cada punto corresponde una sola imagen.



4. Concavidad, convexidad, inflexión.—Sea un punto ordinario de una curva o arco de curva de Jordan, es decir, con tangente t en él. Si los dos arcos de curva de origen común A y sentidos opuestos, situados en un cierto entorno de A, están ambos a un mismo lado de la tangente, diremos que la curva es, en este punto, *cóncava* respecto de dicho lado o semiplano, y *convexa* respecto del semiplano opuesto.



Si dichos arcos se hallan en semiplanos opuestos, el punto A y la tangente t se llaman *de inflexión* (*).

Cuando todas las tangentes a una curva cerrada de Jordan (o semitangentes si hay algún punto anguloso) dejan la curva en un mismo semiplano respecto de cada una de ellas, se dice que la curva es *convexa*.

(*) Suelen llamar algunos autores tangente de inflexión toda tangente que tiene un contacto de orden superior con la curva, separe o no a ésta.

Toda curva convexa no puede ser cortada por una recta en más de dos puntos, pues si lo fuera en tres, los dos extremos estarían separados por la tangente en el intermedio, en contra de la definición de convexidad.

5. Representación analítica de las curvas de Jordan.—Elegidos en el plano dos *ejes* cartesianos rectangulares fijos OX, OY, ya dijimos en la lección 36 que todo punto A del plano viene determinado por sus dos coordenadas x, y respecto de dichos ejes, y recíprocamente, a todo par de coordenadas dadas en un orden, corresponde un punto del plano, y uno sólo.

Todo arco de curva de Jordan vendrá, pues, representado por un conjunto de pares de coordenadas x, y en correspondencia biunívoca y bicontinua con los puntos de un segmento MN y, por tanto, en correspondencia con sus abscisas, s en la recta MN; es decir, vendrá determinado por dos funciones uniformes y continuas φ y ψ de s,

$$x=\varphi(s), \qquad y=\psi(s) \tag{1}$$

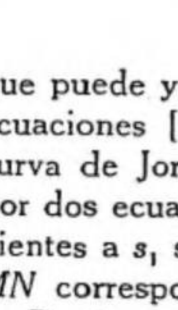
en el intervalo $s_1 s_2$ que define el segmento MN (*). Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones paramétricas* del arco de curva. Eliminando entre ellas el parámetro s se obtiene una relación directa entre x e y de la forma

$$y=f(x) \tag{2}$$

que puede ya no ser uniforme, aunque sí continua, si lo eran φ y ψ. Tanto las ecuaciones [1] como la [2] se llaman *representaciones analíticas* del arco de curva de Jordan. Una curva de Jordan cerrada se representará análogamente por dos ecuaciones de la forma [1], en las que los valores de x e y correspondientes a s_1 son iguales a los correspondientes a s_2 (basta imaginar el segmento MN correspondiente como la circunferencia imagen rectificada).

Recíprocamente, dadas dos funciones $x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$ definidas en un intervalo de s o una función $y=f(x)$ definida en un intervalo de x, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya abscisa x y ordenada y satisfacen a estas ecuaciones se llamará *representación gráfica cartesiana* de las ecuaciones [1] o de la [2]. Si la función $y=f(x)$ es continua y el intervalo en que está definida es completo, es decir, abarca los extremos, la representación gráfica en cuestión será un arco de curva de Jordan

6. Número de intersecciones de una curva de Jordan con una recta o polígono.— Cuando la curva es cerrada, se comprende intuitivamente que no puede ser cortada por una recta en un solo punto. *De ahora en adelante* NOS OCUPAREMOS SOLAMENTE DE LAS CURVAS DE JORDAN QUE TIENEN UN NÚMERO FINITO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LAS RECTAS QUE LAS CORTAN (**). Esto supuesto, se comprueba también intuitivamente que el número de puntos de intersección tiene que ser *par*.



(*) V la definición y propiedades de las funciones continuas en un curso de Análisis.

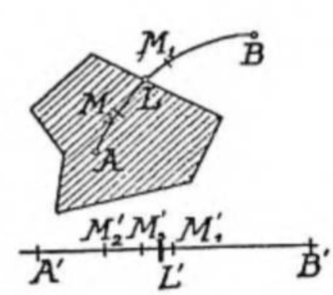
(**) Existen curvas de Jordan que tienen infinitas intersecciones con ciertas rectas, como la definida por $y=x \operatorname{sen} 1/x$ (con $y=0$ para $x=0$) que en el intervalo $-a \leqslant x \leqslant +a$ tiene infinitas intersecciones con el eje x

Este hecho que la intuición dicta, puede demostrarse rigurosamente del siguiente modo:

Diremos, ante todo, que una recta y una curva de Jordan se *atraviesan* o *cortan* en un punto P común a ambas, cuando en todo entorno de P la curva tiene puntos a uno y otro lado de la recta (no importa que ésta sea tangente de inflexión). Diremos, análogamente, que un polígono simple y una curva de Jordan se cortan en un punto común P cuando en todo entorno de P existen puntos de la curva en el interior y en el exterior del polígono. Demostremos ahora:

Si un arco de curva de Jordan tiene dos puntos A *y* B *en distinta región de aquéllas en que una recta o un polígono dividen al plano, atraviesan a dicha recta o polígono en un punto por lo menos.*

En efecto, sean A', B' los homólogos de A, B en el segmento imagen del arco y M'_1 el punto medio de A', B'. Si el punto M_1 homólogo de M'_1 en la curva pertenece a la recta (polígono) el teorema está demostrado. Si no es así, M_1 pertenece a una u otra región, por ejemplo la misma a la que pertenece B. Sustituyamos B por M_1 y razonemos análogamente con el arco AM_1 y su imagen $A'M'_1$, tomando su punto medio M'_2. Si el punto homólogo M_2 en la curva pertenece a la recta (polígono) el teorema está demostrado, de lo contrario pertenecerá, por ejemplo, a la misma región que A; entonces razonaremos con el arco M_2M_1 del mismo modo que acabamos de hacerlo con AB y con AM_1. Y así sucesivamente definiremos en la recta $A'B'$ una sucesión de segmentos $A'B'$, $A'M'_1$, $M'_2M'_1$, ... cada uno comprendido en el anterior, o lo que es lo mismo, dos sucesiones *monótonas* de puntos $A'A'M'_2$, ..., $B'M'_1M'_1$, que son además *convergentes*, por ser cada segmento mitad del anterior, y que (en virtud de lec. 17, § 7, III) tienen un punto límite común L' tal que en todo entorno del mismo hay infinitos puntos de ambas sucesiones.



Por la continuidad de la correspondencia entre el segmento $A'B'$ y el arco AB, a este punto L' corresponde un homólogo L del arco, en todo entorno del cual existirán infinitos puntos del arco situados en una y otra región del plano respecto de la recta (o polígono), lo que prueba: 1.º, que L pertenece a la recta (o polígono), ,pues si fuese interior (exterior) tendría un entorno formado por puntos todos interiores (exteriores); 2.º, que la curva y la recta (o polígono) se *cortan* en dicho punto.

Análogamente se prueba que: *Si una curva cerrada de Jordan tiene dos puntos* A, B *en distinta región de aquéllas en que una recta o un polígono dividen al plano, atraviesa a dicha recta o polígono por lo menos en dos puntos, uno situado en cada arco* AB. Basta repetir el razonamiento anterior para cada uno de dichos arcos y sus homólogos en la circunferencia imagen. De aquí resulta:

El número de puntos en que una curva cerrada de Jordan atraviesa una recta o un polígono simple es par. Partamos de un punto A y recorramos la curva en un sentido. Si llegamos a B después de haber cortado la recta (o polígono) una vez, estamos en distinta región que A, luego en el arco restante BA hay por lo menos otra intersección. Si no hay más que ésta, el teorema está demostrado; si hay otra más, repetiremos el razonamiento, y como al cerrar la curva se vuelve a la región de que se partió, el número de intersecciones es siempre par, ya que no es posible haber cruzado dos veces por un mismo punto, por carecer la curva de Jordan de puntos múltiples.

De este hecho se desprende la siguiente interesante consecuencia: Ordenadas las intersecciones de una curva de Jordan con una recta, previa elección de un sentido en una y en otra, *dos intersecciones* A, B *consecutivas en la recta, lo son también en la curva o hay intercaladas entre ellas un número par de intersecciones.* En efecto, cualquiera de los arcos AB completa con el segmento BA un contorno cerrado de Jordan que sólo puede atravesar la recta AB en un número par de puntos. Por tanto, si la curva recorrida en un sentido, *atraviesa* la recta en A *entrando* en uno de los semiplanos, en el punto B *sale* de él, y lo mismo ocurrirá si A y B en lugar de ser intersecciones consecutivas en la recta, tienen un número *par* de intersecciones intermedias.

7. Teorema de Jordan.—Toda curva cerrada de Jordan plana divide los restantes puntos del plano en dos regiones, una llamada *interior* y otra *exterior*, tales que:

1.°) *Ambas regiones están separadas* por el contorno, es decir, todo arco de curva de Jordan que una un punto exterior a uno interior atraviesa el contorno Significa. Tiene por lo menos un punto común con él y en todo entorno de este punto hay puntos del arco exteriores e interiores.

2.°) *Ambas regiones son conexas*, es decir, se puede unir dos cualesquiera de sus puntos sin atravesar el contorno.

3.°) La región exterior se distingue de la interior por ser ésta *finita* (es decir, ser todos sus puntos interiores a un cierto polígono), mientras la exterior no lo es.

Véase la demostración en la notas finales

El conjunto de los puntos del plano interiores a una curva cerrada plana de Jordan se llama *recinto* plano de Jordan, y la curva, *contorno* de dicho recinto. El conjunto formado por un recinto y su contorno se llama *recinto completo* o *dominio*.

8. Longitud de una curva de Jordan cerrada o de un arco.—Llamaremos polígono (quebrada) *inscrito* en una curva (arco) todo aquél cuyos vértices son un conjunto ordenado de puntos de la curva (y cuyos extremos son los del arco).

Dada una curva de Jordan cerrada (o arco de curva) que sólo pueda ser cortada por una recta en un número finito de puntos, existe una longitud λ mayor que los perímetros de todos los polígonos (quebradas) inscritos en la curva y tal que cualquier longitud $\lambda' < \lambda$ es igual o inferior a algunos de estos perímetros. (Véase la demostración en las Notas finales.)

Esta longitud λ se llama *longitud de la curva* (o arco) y es, por tanto, la menor de todas las longitudes mayores que todos los perímetros poligonales inscritos, por lo que se llama *extremo superior* de dichos perímetros.

Esta definición, aplicada a la circunferencia da la misma longitud definida en la lección 21 Demostrábamos allí simultáneamente que tal longitud es también extremo inferior de los perímetros de los polígonos circunscritos (es decir, es la mayor de las longitudes menores que todos estos perímetros), lo que nos permitió calcular la longitud de la circunferencia como límite común de perímetros inscritos y circunscritos cuyos lados tienden a cero.

Para hacer otro tanto en una curva de Jordan hay que exigir no sólo la existencia de tangentes, sino además el cumplimiento de ciertas condiciones que equivalen a la continuidad de su variación y que son de difícil manejo en el campo de la Geometría pura. En Cálculo integral se demuestra en cambio sin dificultad que para todo arco de curva de Jordan representado por una función uniforme $y=f(x)$ que admite derivada continua, la longitud puede definirse como extremo superior de los polígonos inscritos, como superior de los circunscritos y también como límite común de los polígonos inscritos y circunscritos cuyos lados tienden a cero

La definición restringida de que se ha partido, por exigir menos es aplicable a curvas de categoría más amplia (curvas de variación acotada) y que se llaman *rectificables* (*).

(*) V., por ejemplo, «Elementos de la teoría de funciones», de Rey Pastor, y «Curso teórico práctico de Cálculo Integral», del autor.

9. Area de un recinto plano de Jordan.— Análogamente a como hemos procedido para definir la longitud, se puede proceder para definir el área de un recinto de Jordan.

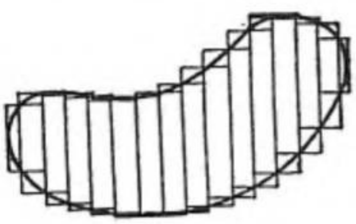
Dada una curva de Jordan cerrada, llamaremos polígono *envuelto* por ella a todo aquél que tenga sus puntos interiores al recinto que aquélla limita, excepto, a lo sumo, ciertos puntos del contorno del polígono, que pueden estar en la curva.

Siempre en el supuesto de que la curva no pueda ser cortada por una recta más que en un número finito de puntos, se demuestra fácilmente (v. Notas finales) que:

Existe un área α mayor que todas las áreas de los polígonos envueltos y tal que cualquier área $\alpha' < \alpha$ es igual o inferior a la de alguno de éstos. Esta área se llama *área del recinto* y es, por tanto, la menor de todas las áreas mayores que las de todos los polígonos envueltos.

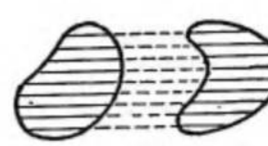
Llamando polígono *envolvente* de la curva a todo aquél que tenga en su interior dicha curva, excepto a lo sumo ciertos puntos comunes del contorno, se verifica igualmente que α es la mayor de las áreas menores que las de todos los polígonos envolventes. (V. demostraciones en Notas.)

10. El área como límite de una suma de rectángulos.—Consideremos un recinto de Jordan y cortémosle por un sistema de rectas paralelas, construyendo en cada faja los rectángulos R_i y r_i de longitud igual al segmento máximo y mínimo de los interceptados en el recinto por las paralelas en cada faja (*). La intuición nos dice que al hacer tender a cero la anchura de las fajas, las sumas de los rectángulos de una y otra clase tienden al área del recinto.



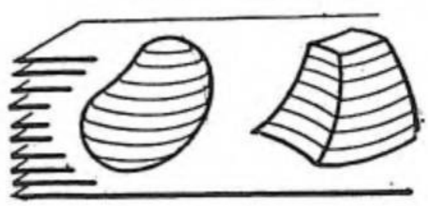
Si en lugar de los rectángulos de longitud máxima o mínima consideramos rectángulos intermedios cualesquiera, la suma de ellos tendrá, evidentemente, el mismo límite. En resumen, podemos enunciar la siguiente propiedad cuya demostración rigurosa se da en las Notas finales:

Si se corta un recinto de Jordan por un sistema de paralelas y se forma en cada faja el rectángulo cuyas dimensiones son la anchura de la faja y la longitud de uno de los segmentos interceptados en ella, el límite de esta suma es el área del recinto.



11. Principio de Cavalieri.— De lo anterior se desprende:

Dos recintos cerrados planos de Jordan cuyas secciones por un sistema de rectas paralelas sean segmentos respectivamente iguales, tienen igual área.

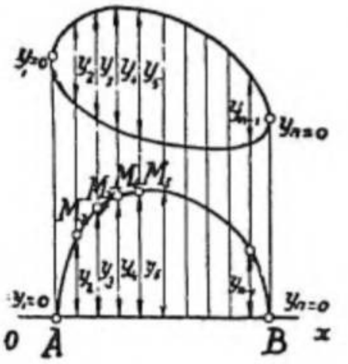


(*) Se demuestra que tales elementos existen. Si las paralelas interceptan más de un segmento se agrupan los limitados por puntos de intersección de igual orden y se razona con ellos del mismo modo.

Este principio se generaliza para volúmenes de cuerpos definidos de modo análogo. *Si las secciones producidas en dos cuerpos por un sistema de planos paralelos son respectivamente equivalentes, los volúmenes de estos cuerpos son iguales* (*).

12. Cálculo aproximado de áreas de recintos curvos.—El cálculo de longitudes y de áreas como límites, corresponde al cálculo integral. Sólo podemos exponer aquí, por su sencillez e interés práctico, algunas fórmulas aproximadas.

I. FÓRMULA DE SIMPSON.—Sea dado un recinto de Jordan cuya área se trata de calcular, que supondremos convexo (como el de la figura) y cortémosle por un sistema de rectas paralelas equidistantes dividiendo el recinto en un número par de fajas. Con objeto de simplificar nuestras consideraciones, imaginaremos trasladados todos los segmentos interceptados, a lo largo de las rectas que los contienen, hasta situarlos con el origen en una perpendicular Ox común a todas ellas. Según lo establecido en el párrafo anterior, el área del recinto dado será igual al área del nuevo recinto así obtenido. Razonaremos, pues, sobre recintos de esta clase (mixtilíneos).



Sean $y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$ ($y_1 = y_n = 0$) los segmentos interceptados por las rectas y δ la anchura de las fajas.

Un valor groseramente aproximado del área se obtendrá sustituyendo el arco AB por la poligonal $AM_2M_3M \ldots$ que une los extremos $y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$, con lo que resulta, sumando los triángulos y trapecios en que queda descompuesto el polígono,

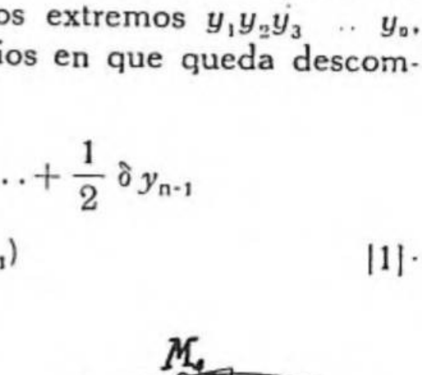
$$\frac{1}{2}\,\delta\, y_2 + \frac{1}{2}\,\delta\,(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}\,\delta\,(y_3 + y_4) + \ldots + \frac{1}{2}\,\delta\, y_{n-1}$$

$$\text{Area} \cong \delta\,(y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) \qquad [1]$$

Si y_1, y_n no son nulos (figura), los extremos son trapecios en vez de triángulos y hay que añadir

$$\frac{\delta}{2}\,(y_1 + y_n)$$

$$\text{Area} \cong \delta\left(\frac{1}{2}\,y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}\,y_n\right) \qquad [1']$$



Se comprende que mejoraremos la aproximación trazando, por los extremos de los segmentos de lugar par M_2, M_4 ..., tangentes a la curva hasta cortar a las paralelas anterior y posterior, y promediando la suma de las áreas de los trapecios circunscritos así obtenidos con la

(*) Para las superficies curvas la generalización sería falsa, es decir, dos superficies cuyas secciones por un sistema de planos paralelos sean líneas de igual longitud pueden no *ser equivalentes*, por razones análogas a las expuestas en la nota final de la lección 53.

suma de los triángulos o trapecios inscritos calculados en la fórmula anterior. Así se obtiene (por ser 2δ la altura común e y_2, y_4, ... las paralelas medias de los nuevos trapecios):

$$\text{Suma de los nuevos trapecios} = 2\delta\,(y_2 + y_4 + \ldots) \qquad [2]$$

y promediando con el resultado anterior [1']

$$\text{Area} \cong \frac{\delta}{2}\left(3\,y_2 + y_3 + 3\,y_4 + \ldots + \frac{y_1 + y_n}{2}\right) \qquad [3]$$

Este valor resulta, en general, excesivo. Se mejora todavía la aproximación, según se demuestra en Cálculo integral, promediando el valor [2] (por exceso) con el valor [1'] (por defecto) contado dos veces, es decir, sumando [2] con el doble de [1'] y dividiendo el resultado por 3.

Así se obtiene:

$$\text{Area} \cong \frac{\delta}{3}\,(y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 + 4\,y_4 + 2\,y_5 + \cdots + y_n)$$

que podemos escribir abreviadamente:

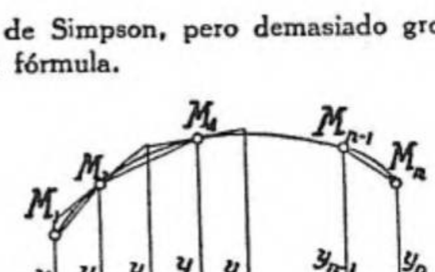
$$\boxed{\text{Area} \cong \frac{\delta}{3}\,[4\,P + 2\,I + E]} \qquad \text{(Simpson) (*).} \qquad [4]$$

donde E representa la suma de segmentos extremos, P la suma de segmentos de orden par e I la suma de los de orden impar, excluídos los extremos.

El área verdadera lo mismo que el valor de Simpson (4) están comprendidos entre (1') y (2) y diferirán, por tanto, entre sí menos que la mayor de las diferencias (2)-(4) y (4)-(1'), que es esta última y vale

$$\frac{\delta}{3}\left(P - I - \frac{E}{2}\right)$$

Este constituye, pues, un límite de error de la fórmula de Simpson, pero demasiado grosero para dar idea de la aproximación que proporciona esta fórmula.



II. FÓRMULA DE PONCELET.—Con objeto de abreviar trabajo, tratemos de expresar el área sólo en función de los segmentos de lugar par. Conservaremos los trapecios circunscritos del cálculo anterior y consideraremos la poligonal inscrita $M_1M_2M_4M_6 \ldots M_{n-1}M_n$ que determinan los extremos de los segmentos pares más los segmentos extremos. Se obtiene así:

(*) En las obras de Cálculo integral es corriente numerar las ordenadas empezando con el índice cero, es decir, y_0, y_1, y_2, ... Si así se procede queda invertida la paridad y el paréntesis es $[4I + 2P + E]$.

$$\text{Suma de trapecios inscritos} = \delta\left[\frac{y_1+y_2}{2} + (y_2+y_4)+(y_4+y_6)+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]$$
$$= 2\delta\left(P+\frac{E-E}{4}\right) \qquad [5]$$

(E' es la suma de los segmentos contiguos a los extremos).

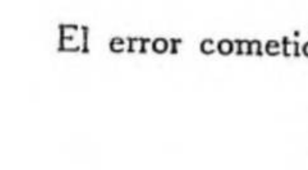
Que promediada con [2] da

$$\text{Area} \cong \delta\left(2P+\frac{E-E}{4}\right) \quad \text{(Poncelet.)} \qquad [6]$$

El error cometido es menor que

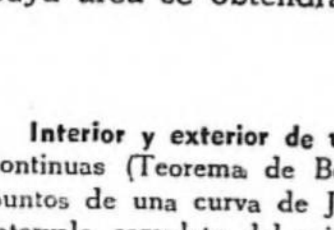
$$\frac{1}{2}[(2)-(5)] \qquad \text{que vale} \qquad \frac{\delta}{4}(E-E')$$

III. MÉTODO DE LA CUADRÍCULA.—En gran número de casos en los que no es preciso gran aproximación y el recinto viene dado empíricamente, es suficiente aplicar sobre dicho recinto una cuadrícula transparente (o al revés) y dibujar un polígono de lados paralelos a las direcciones de la misma, de tal modo que su contorno corte al del recinto en forma que se compensen los triángulos entrantes y salientes. Aun cuando esta compensación se efectúa por simple estimación visual, los errores cometidos suelen a su vez compensarse, obteniendo un polígono sensiblemente equivalente al recinto dado y cuya área se obtendrá por simple recuento



NOTAS

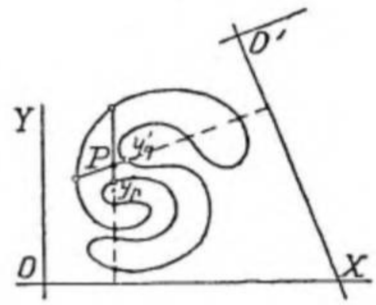
Interior y exterior de una curva cerrada de Jordan,—De las propiedades de las funciones continuas (Teorema de Bolzano-Weierstrass) se desprende que las coordenadas x, y de los puntos de una curva de Jordan cerrada, que son funciones continuas del parámetro s en un intervalo completo del mismo, son también funciones acotadas superior e inferiormente (*); de donde resulta que toda curva cerrada de Jordan (y también todo arco de curva de Jordan) puede encerrarse dentro de un rectángulo. Para fijar las ideas imaginaremos trasladados los ejes de modo que dicho rectángulo quede por entero en uno de los cuadrantes en que los ejes dividen al plano, por ejemplo el cuadrante limitado por las regiones positivas de dichos ejes.



Tracemos ahora secantes de la curva, paralelas al eje y, y ordenemos los puntos de intersección según las ordenadas crecientes y_1, y_2, y_n. Consideremos los segmentos limitados por los puntos de intersección y_1y_2, y_3y_4, .. y_{2n-1}, y_{2n}, es decir, segmentos de origen impar y extremo par, que llamaremos *cuerdas* de la curva. Llamaremos *interior* de la curva al conjunto de todos los puntos interiores a sus cuerdas, que se dirán asimismo *interiores* a la curva. Llamaremos *exterior* de la curva al conjunto de los puntos del plano no pertenecientes al interior ni a la curva, puntos que se dirán igualmente *exteriores* a dicha curva.

(*) V., por ejemplo, «Teoría de funciones», de Rey Pastor.

La definición de interior (exterior) es independiente del sistema de paralelas elegido: de otro modo: si respecto de un determinado eje OX está el punto P entre y_p e y_{p+1} en que p es impar, respecto de otro eje $O'X$ estará asimismo entre y'_q e y'_{q+1} en que q es también impar. En efecto, el cuadrilátero constituído por los ejes OX y $O'X$ (elegidos de modo que la curva esté en el ángulo que limitan) y las perpendiculares a ellos por P cortan a la curva en un número par de intersecciones (§ 6) y, por lo tanto, los números p y q de intersecciones comprendidas entre P y los ejes respectivos son de la misma paridad.



De ello se desprende como corolarios:

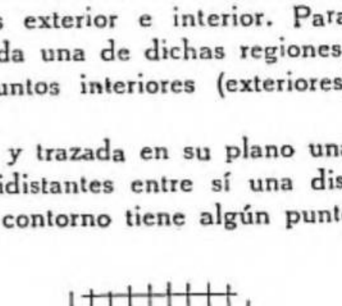
El segmento que une dos puntos interiores o dos exteriores, corta a la curva en un número par de intersecciones, o no la corta. El segmento que une dos puntos uno interior y otro exterior, corta a la curva en un número impar de intersecciones. Basta tomar un eje OX de referencia perpendicular a la dirección del segmento, y aplicar la definición.

Demostración del teorema de Jordan.— De lo que acabamos de demostrar resulta fácilmente:

Toda poligonal que une dos puntos M *y* N *uno interior y otro exterior a una curva cerrada de Jordan, corta a la curva en un punto por lo menos.* Basta, en efecto, añadir a dicho poligonal el segmento MN; si este segmento no corta a la poligonal, cierra con ella un polígono simple que tiene con la curva un número par de intersecciones, y como el número de intersecciones del segmento es impar, el de la poligonal tendrá la misma paridad. Si esta poligonal corta al segmento, bastará comparar el número de sus intersecciones con las de otra que no corte al segmento y que forma asimismo polígono simple con ella; razonando del mismo modo, las tres líneas habrán de cortar a la curva en número de intersecciones de la misma paridad.

El razonamiento anterior prueba la *separación* de las regiones exterior e interior. Para demostrar el teorema de Jordan falta sólo probar la *conexión* de cada una de dichas regiones, es decir, falta solamente demostrar la posibilidad de unir dos puntos interiores (exteriores) mediante una línea que no corte al contorno

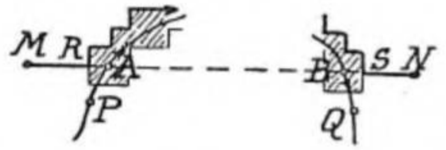
Para ello consideremos primero un arco de curva de Jordan AB y trazada en su plano una malla o cuadrícula formada por rectas paralelas a los ejes y equidistantes entre sí una distancia ϵ. Consideremos todos los cuadraditos de la cuadrícula cuyo contorno tiene algún punto común con la curva; como cada uno de estos puntos pertenece a dos cuadrados si está en un lado o a cuatro si coincide con un vértice, los cuadraditos en cuestión se van yuxtaponiendo, formado un recinto poligonal conexo. Consideremos otro arco de curva CD que no tenga ningún punto común con AB. Construyendo una malla de separación $\epsilon < \delta/\sqrt{2}$, siendo δ la distancia más pequeña que existe entre puntos de uno y otro arco (*), podemos conseguir que el polígono construído, en cuyo interior se halla AB, no tenga punto alguno común con CD, y lo mismo podríamos razonar para excluir de su interior puntos aislados prefijados no situados en AB.



Sentado esto, sean M y N dos puntos interiores a una curva de Jordan cerrada. Si el seg-

(*) Se puede demostrar rigurosamente la existencia de dicha δ de este modo: La distancia entre dos puntos, de coordenadas xy, $\xi\eta$, es $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}=d$. Si x, y son funciones continuas de s en el intervalo cerrado $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ y ξ, η son funciones continuas de σ en el intervalo cerrado $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, será d función continua de s, σ en el dominio rectangular (s, σ) correspondiente y, por tanto (Bolzano-Weierstrass), tiene d un mínimo δ en él, que es $\neq 0$ si los arcos de curva de Jordan definidos por $x(s)$, $y(s)$, $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$ *no tienen punto común*, como hemos supuesto. Por tanto es posible hallar un número positivo $\epsilon < \delta/\sqrt{2}$.

mento MN no corta al contorno, este segmento establece la conexión entre M y N. Si corta al contorno, lo hace en un número par de puntos (§ 6) y, por tanto, existe un primer punto A y un último punto B (distinto de A) ordenados en el sentido MN, por ejemplo. Recordemos ahora (§ 6) que, elegido un sentido en la curva, el arco AB que este sentido define, penetra por A en un semiplano α de los limitados por la recta MN, mientras por B sale de él. Si suprimimos, pues, en el arco opuesto dos arcos AP y BQ suficientemente pequeños para que en ellos no haya nueva intersección con la recta MN, se verificará: 1.º) P y Q están en un mismo semiplano, opuesto al α. 2.º) Es posible encerrar el arco AB en un polígono formado por yuxtaposición de cuadrados de una malla lo suficientemente estrecha para que dicho polígono no incluya en su interior los puntos M ni N, y para que su contorno no tenga punto alguno común con el arco PQ. Podemos, pues, conseguir que la curva corte sólo a dicho contorno en puntos de los arcos AP y BQ, es decir, en puntos situados en el semiplano que contiene P y Q.



Por otra parte, siendo M exterior y A interior a dicho polígono, MA corta en R al contorno, y análogamente BN le corta en S. Partiendo, pues, del segmento MR podremos recorrer el referido contorno poligonal en el sentido que determina el semiplano α y llegar a SN sin haber cortado la curva. Queda así establecida la unión de conexión entre los dos puntos interiores, de acuerdo con el enunciado del teorema de Jordan.

El mismo razonamiento puede aplicarse para establecer la conexión entre dos puntos exteriores.

La finitud del interior y la infinitud del exterior resulta de la definición establecida en el párrafo anterior.

Establecida la división del plano en dos regiones por una curva de Jordan cerrada, es fácil probar, repitiendo el razonamiento del § 6, que todo otro arco de curva de Jordan que tenga un punto interior y otro exterior corta a la curva.

Queda así demostrado el teorema enunciado en el § 7.

Existencia de la longitud.— Para demostrar la existencia de una longitud λ que cumpla las condiciones enunciadas en el § 8, a saber:

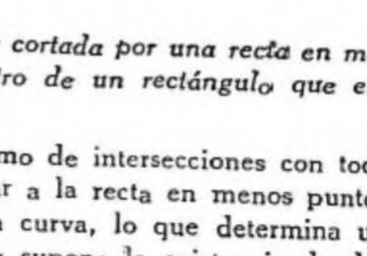
A) Todos los polígonos inscritos tienen longitud menor que λ.

B) Dada cualquier longitud $\lambda' < \lambda$ existen polígonos inscritos de longitud mayor que λ', demostremos previamente que:

Todo polígono inscrito en una curva (arco) que no pueda ser cortada por una recta en más de n puntos tiene longitud menor que n veces el semiperímetro de un rectángulo que envuelve la curva (arco).

Comprobemos ante todo que n es asimismo el número máximo de intersecciones con toda poligonal inscrita, o de otro modo, que la curva no puede cortar a la recta en menos puntos que una poligonal inscrita. En efecto, elegido un sentido en la curva, lo que determina un sentido en la poligonal, todo cruce de la poligonal con la recta supone la existencia de dos puntos A y B de la curva (los vértices inmediatos) a distinto lado de la recta y, por tanto, la existencia por lo menos de otra intersección del arco comprendido AB (§ 6).

Sentado lo anterior, proyectemos cada lado s de la poligonal en las direcciones de la malla sobre dos lados a y b de un rectángulo envolvente. Llamando s_x y s_y a estas dos proyecciones se tendrá $s \leqslant s_x + s_y$ (= en el caso de ser s paralelo a una de las direcciones), de donde $\Sigma s < \Sigma s_x + \Sigma s_y < n(a+b)$, ya que cada segmento s_x o s_y sólo puede ser proyección a lo sumo de n segmentos de polígono.



Con estos lemas preliminares es fácil construir una cortadura que define la longitud λ, de modo análogo a como se procedió para la circunferencia.

Puesto que todos los polígonos inscritos tienen longitud acotada, podemos clasificar las longitudes todas, en las dos siguientes clases:

Longitudes l, cada una de las cuales es igual o menor que el perímetro de algún polígono inscrito.

Longitudes L mayores que los perímetros de todos los polígonos inscritos.

que cumplen las condiciones de Dedekind: 1.ª) Existen longitudes de una clase y otra clase. 2.ª) Toda longitud pertenece a una u otra clase. 3.ª) Toda longitud l es menor que toda L.

Aplicando el axioma de Dedekind, existe una longitud y una sola λ frontera, tal que toda $\lambda'<\lambda$ pertenece a la clase l, es decir, verifica la condición B) del teorema y, además, toda longitud $\lambda''>\lambda$ pertenece a L. De donde resulta que también λ pertenece a L, es decir, es mayor que toda poligonal inscrita, de acuerdo con A); pues si λ fuese igual o menor que algún perímetro inscrito p podríamos, por intercalación de vértices en la curva, hallar otro perímetro inscrito $p'>p\geqslant\lambda$ con lo que p' habría de ser de la clase L, en contra de la clasificación.

Existencia del área.—Hagamos corresponder a cada polígono plano un rectángulo equivalente de base fija, de acuerdo con lo dicho en la lección 29, § 5. A cada área poligonal corresponde una altura del rectángulo equivalente. A cada área suma de dos corresponde una altura suma de las correspondientes a aquellas dos; podemos ordenar las áreas según las alturas correspondientes y resulta así establecida la continuidad de las áreas poligonales, sin más que aplicar el axioma de Dedekind a las alturas de los rectángulos así construídos.

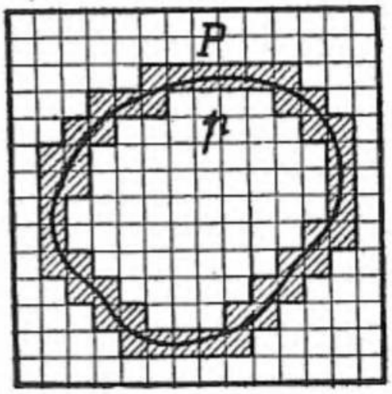
Esto sentado, observemos que todas las áreas de los polígonos envueltos por una curva de Jordan son menores que las de un rectángulo envolvente de la misma. Por tanto, pueden clasificarse todas las áreas en las dos siguientes clases·

Areas a, cada una de las cuales es igual o menor que la de algún polígono envuelto (*).

Areas A, mayores que las de todos los polígonos envueltos.

que cumplen las condiciones de Dedekind, con lo que se puede demostrar cómo para la longitud de la curva, la existencia de una frontera α (área del recinto) perteneciente a la clase A, es decir, mayor que todas las a, y tal que toda $\alpha'<\alpha$ pertenece a la clase a, como previene la definición de área del recinto dada en § 9. El área α es, pues, *extremo superior* de las áreas a (**).

Análogamente se prueba la existencia de un extremo inferior de las áreas A. Para probar la coincidencia de ambos extremos basta demostrar la existencia de polígonos envolventes y envueltos, cuya diferencia pueda hacerse tan pequeña como se quiera.



La continuidad de la curva de Jordan implica, como hemos dicho, su finitud, es decir, toda ella es interior a un cierto cuadrado de lado a. Tracemos en él una cuadrícula de lados paralelos a los del cuadrado. Todos los cuadrados de la cuadrícula que tienen algún punto común con el recinto o su contorno forman un polígono envolvente; todos los cuadrados interiores al recinto forman un polígono envuelto (evetualmente pueden formar más de uno si la cuadrícula no es bastante estrecha). La diferencia entre el polígono envolvente y el envuelto (o los) es el conjunto de cuadrados atravesados por el contorno (rayados en la figura) cuya área tiende a cero al aumentar el número de divisiones de la cuadrícula.

(*) Obsérvese que para definir el área no sería cómodo razonar con los polígonos *inscritos* (limitados por cuerdas), por cuanto éstos pueden tener área superior a la del recinto si éste no es convexo, es decir, si existen cuerdas exteriores.

(**) La demostración no difiere de la del párrafo anterior más que en el modo de probar aquí la existencia de un polígono envuelto de área superior a la de otro polígono envuelto dado p. Para construirle, basta trazar un entorno poligonal σ interior a la curva alrededor de un punto A del contorno de p, no perteneciente a ella. El conjunto de todos los puntos pertenecientes a p o σ define un polígono envuelto de área mayor que p.

En efecto: Sea p el número de filas (columnas) en que se ha dividido el cuadrado inicial. Cada horizontal, y lo mismo cada vertical sólo puede cortar n veces la curva; luego este contorno corta a la cuadrícula en menos de $2np$ cortes. Cada corte tiene a lo sumo cuatro cuadrados rayados contiguos cuya área es $4a^2/p^2$. Por lo tanto las áreas de los cuadrados rayados suman menos que $8na^2/p$, que tiende a cero al crecer p infinitamente (*).

En términos de la teoría de conjuntos podemos decir: El área α es la frontera común de los conjuntos formados por las áreas de polígonos envolventes y envueltos.

El área como límite.—Considerando una sucesión de mallas de amplitudes decrecientes $e_1, e_2, \ldots e_n, \ldots$ tendiendo a cero, y los polígonos envueltos y envolventes de áreas respectivas $p_1P_1, p_2P_2, \ldots p_nP_n, \ldots$ el área α frontera verificará constantemente $p_n<\alpha<P_n$ y por tender a cero P_n-p_n resulta $\alpha=\lim p_n=\lim P_n$, límite que es independiente del sistema de mallas elegido.

Sumando los cuadrados por columnas, los interiores pertenecientes a p_n forman rectángulos de altura menor que las cuerdas verticales de la curva y los que forman los polígonos envolventes P_n tienen altura mayor que dichas cuerdas. Si formamos, pues, rectángulos de igual ancho y cuya altura sea una cuerda vertical cualquiera de cada faja, la suma de dichos rectángulos estará comprendida entre p_n y P_n y tendrá, por tanto, el mismo límite, con lo que queda demostrado el enunciado del § 10.

NOTAS Y EJERCICIOS

Relación entre la fórmula del prismatoide y la de Simpson.—En el § 7 de la lección 56, al hacer aplicación de la fórmula del prismatoide para la cubicación de desmontes, zanjas, terraplenes, etc., cortando éstos por un número impar de secciones verticales equidistantes y *suponiendo prismatoidal* la porción de desmonte, etc., entre cada dos secciones consecutivas *de orden impar, de acuerdo con la misma ley con que varían las secciones de un prismatoide* para las áreas, obtenida en esta lección. Esta coincidencia indica que *la fórmula de Simpson es exacta cuando las ordenadas de la curva a que se aplica varían, entre cada dos consecutivas de orden impar, de cuerdo con la misma ley con que varían las secciones de un prismatoide paralelas a las bases.* Ahora bien, si expresamos el área de una de tales secciones en función de la distancia x de su plano a una de las bases se obtiene fácilmente una función cuyo grado es a lo sumo 2.

La fórmula de Simpson es exacta si entre cada dos ordenadas impares consecutivas la ley de variación de las ordenadas de la curva es una función de segundo grado de la abscisa. En Cálculo integral se demuestra la exactitud aun para las funciones de *tercer* grado.

1. Obtener el volumen de la esfera por aplicación de la fórmula de Simpson (o del prismatoide). (Basta considerar dos secciones extremas nulas y una intermedia diametral.)

2. Demostrar, aplicando el principio de Cavalieri, la equivalencia de una media esfera de radio r con el cuerpo que resulta de suprimir de un cilindro circunscrito de radio r y altura r un cono de iguales dimensiones.

Teorema de Guldin.—Se demuestra en Cálculo integral que: *El volumen engendrado por el giro completo de una figura plana alrededor de un eje de su plano que no la corta, es igual al producto del área de dicha figura por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad.*

3. Hacer aplicación de dicho teorema para calcular el volumen del toro.

4. Idem el volumen engendrado por un triángulo equilátero, cuadrado, hexágono regular, etcétera, de lado dado, al girar alrededor de una recta de su plano a distancia dada de su centro.

5. Hacer aplicación inversa del teorema de Guldin para calcular la posición del c. d. g. de un semicírculo.

6. Idem de un cuadrante de círculo.

7. Idem de un trapecio isósceles de base y altura dadas. (V. ejercicio 13, lec. anterior.)

8. Volumen engendrado por un cuadrante de círculo al girar n grados alrededor de una tangente en un extremo.

(*) Obsérvese que nuestro razonamiento cuenta los cuadrados más de una vez, pero *no excluye ningún cuadrado*, por lo mismo que no excluye ningún corte.

INDICE

CAPÍTULO X.—*Medida de figuras circulares*

CAPÍTULO XI.—*Metodología de las construcciones geométricas*

CAPÍTULO XII.—*Enlace, ordenación y sentido en el espacio*

CAPÍTULO XIII.—*Los movimientos y la congruencia en el espacio*

CAPÍTULO XIV.—*Propiedades métricas de los anguloides y poliedros*

CAPÍTULO XV.—*Los cuerpos redondos*

CAPÍTULO XVI.—*Homotecia, inversión y polaridad en el espacio*

CAPÍTULO XVII.—*Las áreas en el espacio*

CAPÍTULO XVIII.—*Los volúmenes*

APÉNDICE

FIN DEL TOMO I